数理解析研究所講究録
245巻 1975年 86-88

トーラス上の保測変換についての補足（II）

津田塾　伊藤俊次

十時氏草稿における微分方程式(1)と(2)はdifferentiableの範囲で考えることがしかるべきで，実際 草稿で述べられている Grevic, Kolmogorov 及び Arnold の仕事はそのようになっている。例えば

定理； γ を (1) の rotation number とするとき γ が "not too well" ならば (1) と (2) は同型（differentiable な保測変換があって）となる。

この定理は次のように理解するのが自然であろう。(2)という基本的な方程式を time change したとき，どこまで"変わりうるか"という問に対して，$\underbrace{R^1}_{}$（γについて）上 measure 0 の点をのぞいて"全く変わらない"という主張である。あるいは(1)という方程式は"殆んど全て"(2)と同じとなる。

それでは（γが）measure 0（の点）ではあるが "too well" な近似をもつ (1) なる方程式はどのようなものであろうか。

定理（Katok） (1)の方程式の γ が "too well"（not too well の対偶，無論 γ が無理数のとき）であるとき，

(1) は singular, simple spectrum をもつ。

この定理は次のように理解される。(2) の方程式は discrete spectrum (よって, singular simple) をもつが, その time change (1) は変化しても singular, simple spectrum までで Lebesgue spectrum を持つことはないという主張である。草稿の Sklover と合わせれば, 実際 singular simple, continuous なスペクトルをもつ (1) なる方程式があることを言っている。江川氏, 丸山氏の質問を整理すれば

(1) continuous でない, 又 discrete でない (1) なる方程式が存在するかは知られていない。

(2) Katok の結果から (1) の方程式の metrical entropy は "零" である。topological entropy については知られていないが他分 "零" となるであろう。一般に flow が与えられているとき, その time change の topological entropy がどう変わるかについては知られていない。

$\mathbb{T}^2$ 上の簡単な Anosov 系としての群同型写像 A が考えられるが, これは深く上記の (2) の方程式と結びついている。(これについては補足(I)を参照) ところで transverse な 2 つの方程式 ((2) type の方程式) の rotation number は 2 次方程式の解であるので "not too well" である。ここでは A に近い Anosov system として Sinai-Arnold による small parterbation

A_ε を考えよう。 A と A_ε は同型（topologicalな意味で）であることの主張（structure stable であることのそれ）であるが，parterbationの仕方に一定の制限をつけたとき，例えば A_ε は Lebesgue measure と絶対連続となる A_ε によって保たれる測度をもつとき，はたして，differentableな意味で保測な同型写像があるかという問である。これについて yes の可能性の予測として，

A_ε は transversal な flow が存在して (1) の形をしていること及び同じ ratation number をもち "not too well" であること。から transversal flow を用いて同型の可能性を求めたいのだが……（補足(I)参照）