数理解析研究所講究録
245巻 1975年 82-85

トーラス上の保測変換についての補足（I）

東教大 理　　小和田 正

十時氏の講演では、トーラス上の力学系の話題として、微分方程式で定義される力学系の時間変更の問題と、群同型の測度論的同型問題について論じられたが、こゝでは、それら二つの話題に関係のあることを，二，三補足したい。

群同型の位相的同型問題

M_2 を2次元トーラス，A_i と M_2 の連続な群同型とする。$(i=1,2)$ この時 いつ A_1 と A_2 が位相同型か、即ち

$$\varphi^{-1}A_1\varphi = A_2$$

となる M_2 の homeomorphism がいつ存在するかというのが、我々の問題である。いゝかえれば、群同型（Anosov system の一例）の位相的特性を決定する不変量をみいだすことである。

M_2 上の Haar measure μ を考えることにより、群同型 A を測度論的な力学系 (M_2, μ, A) とみたときの不変量の一つが、

エントロピーであることが知られているが、エントロピーは位相的不変量ではない。測度論的同型ではあるが位相同型ではない群同型の組が存在することが知られているからである。

$M_2^\wedge$ を群 M_2 の character group とする。我々の結果は次の通りである。

定理、 群同型 A_1, A_2 は次の式をみたす λ, φ_k が存在する時、またその時に限り位相同型である。

$$\varphi_1(M_2^\wedge)=\varphi_2(M_2^\wedge) \text{及び} \varphi_k(A_k^* \hat{g}) = \lambda\varphi_k(\hat{g}) \qquad k=1,2 \qquad -(*)$$

こゝで、λ は実数、φ_k は $M_2^\wedge$ の R_2 への isomorphic imbedding， A_k^* は A_k の transpose である。

系 群同型 A_1, A_2 が位相同型になるのは代数的同型即ち、或 unimodularな群同型 B が存在して

$$B^{-1}A_1B = A_2$$

が成立する時、かつその時に限る。

注、定理の条件(*)をみたす φ_k が存在するものとする。この時 $\{g_s^{(k)}\}$ を

$$(g_s^{(k)}, g^\wedge) \equiv \exp\{i\langle s, \varphi_k(\hat{g})\rangle\}, \quad \hat{g}\in M_2^\wedge$$

によって定義すると $\{g_s^{(k)}\}$ は M_2 の 1-parameter subgroup で、かつ M_2 で dense である。

$$Z_t^{(k)} g = g + g_t^{(k)}, \quad g \in M_2 \qquad -\infty < t < +\infty$$

とすると $(M_2, \mu, Z_t^{(k)})$ は離散スペクトルを持つ ergodic flow であり、そのスペクトルは $\{\varphi_k(\hat{g}), \hat{g} \in M_2^{\wedge}\}$ である。これに対して、Halmos-Neumann の良く知られた結果により、写像 σ がつくれて、

$$\sigma Z_s^{(1)} \sigma^{-1} = Z_s^{(2)} \qquad -(**)$$

となるが、更に $\sigma A_1 \sigma^{-1} = A_2$ でありこの σ は連続な群同型であることがわかる。

σ の構成をみると、σ は 1-parameter group $\{g_t^{(1)}\}$ を $\{g_t^{(2)}\}$ に写している、即ち flow $\{Z_t^{(1)}\}$ の軌道を $\{Z_t^{(2)}\}$ の軌道にうつす写像によって A_1 と A_2 は同型になっている。

更に、容易に

$$A_k^{-1} Z_t^{(k)} A_k = Z_{\lambda t}^{(k)} \qquad -(***)$$

が成立している。即ち A_k は $\{Z_t^{(k)}\}$ の軌道を保っている。

以上の考察をまとめれば、homeomorphism σ は (***) をみたす flow の軌道の間の mapping から構成されることがわかる。このような方法は Arnold-Sinai が群同型の small perterbation の安定性を調べた方法と同様なものである[伊藤氏の講演参照]。かゝる方法は強制力関数をもつ非自律系の perterbation の問題にも有効であろう。上の定理は n 次元の群同型の場合にも、次元を取替え、λ のか

わりに regular matrix で　$\varphi_k(A_k^* \hat{g}) = T^* \varphi_k(\hat{g})$　をみたすものとすればそのまゝ成立する。

A_kをn次元トーラスM_nの群同型、v_kを固有ベクトル，λを実固有値とする。　$\varphi_k(e_j) = \gamma_j^{(k)}$，$e_j = (0, \overset{j}{\cdots} 0, 1, 0 \cdots 0)$，$\gamma_j^{(k)} = v_k$の$j$成分とする。$\varphi_k$を$M_n^{\wedge}$に自然に拡張したときもし，$\varphi_k$が isom. になれば$\varphi_k$から同様にして同型写像$\sigma$が構成されるが、このことは、$A_k$の1つの固有値と固有ベクトルから同型写像がつくれることがあることを示す。

時間変更の問題：

前注で構成された flow $\{Z_t^{(k)}\}$ は微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = \gamma^{(k)}$$

で定義されるものに一致する，但し$\gamma = \frac{\gamma_2^{(k)}}{\gamma_1^{(k)}}$　。$S_t^{(k)} \equiv Z_{\lambda t}^{(k)}$とおくと$S_t$を定める微分方程式は　$\frac{dx}{dt} = 1/(1/\lambda)$　$\frac{dy}{dt} = \gamma^{(k)}/(1/\lambda)$ となる。これは十時氏の講演に於ける　$\frac{dx}{dt} = 1/H(x,y)$，$\frac{dy}{dt} = \gamma^{(k)}/H$ に於いて$H(x,y) \equiv \lambda$の場合になっている。我々の式$(***)$は flow $\{Z_t^{(k)}\}$は flow $\{S_t^{(k)}\}$に時間変更$\tau = \tau(x,g) = \lambda t$について同型写像$A^{(k)}$によって同型にうつっていることを示す。これは一般に二つの軌道を同じくする flow $(\Omega, T_t^{(1)}, \mu_1)$ $(\Omega, T_t^{(2)}, \mu_2)$の同型問題に於いて$\mu_1 = \mu_2$の case の時間変更　$\sigma T_t^{(1)} \sigma^{-1} \omega = T_{\tau(t,\omega)}^{(2)} \omega = T_t^{(2)} \omega$ は$\tau(t,\omega) = \lambda t$ (a.e. ω) に限る(Sinai)の事実例からみて興味深い。