数理解析研究所講究録
245巻 1975年 68-70

「トーラス上の微分方程式」へのコメント.

京大 教養　今西英器

1. 余次元1の現象について.

力学系を、群Gの多様体Mへの作用として考える. $G=\mathbb{R}$, $\dim M=2$ の時は Poincaré-Bendixon, Denjoy-Siegel の理論があるが、ここで本質的なのは、Mの中での orbit の余次元が1であることである。$M=\mathbb{R}$ (又は円周S^1), GはMに局所微分同相として作用する pseudo-group として、Gの作用の極小集合の性質を Sacksteder [4] が調べている。この結果は、余次元1の foliation の定性的研究で本質的な役割を果している. 例えば、ホロノミーのない余次元1の foliation は、閉1形式ωにより$\omega=0$で定義された foliation と同値である(正確な定式化と証明は[1]), Polynomial growth のn次元 Lie 群 (例えば$\mathbb{R}^n$) が$(n+1)$-次元多様体に局所的に自由に作用していれば、orbit は、正規部分多様体であるか、局所的に dense になる. (Plante

[2]). ・・・ 等の結果が得られている．これ等は．Denjoy-Siegel の自理論の最も自然な拡張と考えられる。

2．T^2 上の volume preserving flow について．

(1) $\dfrac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2)$ ，$i=1,2$．$f_1^2+f_2^2>0$ ，$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}=0$

を $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 上の volume preserving flow の方程式とする．(1)の解曲線は同相写像 $\varphi: T^2 \longrightarrow T^2$ により，$\dfrac{dx_i}{dt}=a_i$，$i=1,2$，の解曲線にうつるが，f_i が C^r-級，$r=1,2\cdots,\infty$，の時，φ は C^r-級微分同相にとれる．

石井氏より，この命題は Sternberg. Amer. J. Math. 79 (1957) にあるが，証明は怪しい，とお教え頂いたが．以下のように考えると（少くとも topologist には）容易に証明できる．

$\omega = f_2\,dx_1 - f_1\,dx_2$ とおくと，$\omega=0$ の積分多様体が，(1)の解曲線であり，ω は閉1形式である．従って問題は，non-singular な閉1形式で定義された foliation の分類ということになる．これは高次元では難しいが，2次元では殆んど自明である．explicit に書いたものでは次の結果がある．

定理（Roussarie [3]） $M=V\times S^1$，V は閉多様体で，$\dim V = 1$ or 2．ω_1 と ω_2 が M 上の non-singular な閉1形式で，同じコホモロジー類に属する．この時，恒等写像と

isotopic な微分同相 $\varphi: M \longrightarrow M$ が存在し. φ は $\omega_1 = 0$ の積分多様体を ω_2 のそれにうつす.

Roussarie は C^∞-級の場合をやっているが, C^r-級 $r \leqq \infty$ も同様である. $M = T^2$, 実解析的の場合も. 多分 O.K. である.

なお. 2次元多様体上の volume preserving flow の理論は. 上の様に閉1形式の形に直すと見通しが良くなる. 例えば. T. Ura. Ann. Ecole. Norm. Sup. Paris (1952) の結果は. コホモロジーできれいに解釈できる. しかしそれでも. M の genus が大きくなると相当面倒なようである.

[1] H. Imanishi, On the theorem of Denjoy-Sackssteder ---- ,

J. Math. Kyoto Univ. 1974, 607–634.

[2] J. F. Plante, On the existence of exceptional minimal sets ----,

J. Diff. Equations. 1974, 178–194.

[3] R. Roussarie, Plongement dans les variétés feuilletées ---

Publ. Math. I. H. E. S. 43 (1973), 101–141.

[4]. R. Sacksteder, Foliations and pseudo-groups.

Amer. J. Math. (1965), 79–102.