数理解析研究所講究録
245巻 1975年 58-67

トーラス上の微分方程式

慶応大・工・石井 一平

§.1 20世紀前半までに得られた結果

トーラス $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の非特異な微分方程式系

$$(1) \qquad \frac{dx_j}{dt}=f_j(x_1,x_2) \qquad (j=1,2)$$

$$\left(\begin{array}{l} f_j(x_1+1,x_2)=f_j(x_1,x_2+1)=f_j(x_1,x_2) \\ f_1^2(x_1,x_2)+f_2^2(x_1,x_2)>0 \\ f_j(x_1,x_2)\in C^r \qquad (r\geq 1) \end{array}\right.$$

を考え，(1)によって T^2 上に定まる flow を φ_t と書く。$(t\in\mathbb{R})$

Poincaré は、このような微分方程式系に対し、次のような仮定を置いて、これを研究した。

［仮定］；T^2 上に次の性質を持つ C^1-closed curve C が存在する。

i) 任意の $p\in T^2$ に対し、$\tau=\tau(p)>0$ が存在して、$\varphi_\tau(p)\in C$ となる。

ii) $\mathcal{C}$ は φ_t のすべての orbit に transversal に交わる。

この仮定を満足する $\mathcal{C}$ に対し、$\mathcal{C}$ の diffeomorphism γ が

$$\gamma(p) = \varphi_{T(p)}(p) \quad : T(p) = \min\{\tau > 0 \mid \varphi_\tau(p) \in \mathcal{C}\}$$

によって定まる。この diffeomorphism を調べることによって、φ_t の orbit の様子を知ることができる。

まず、$\mathcal{C}$ に向きを定め、弧 $\widehat{p\gamma(p)}$ の定められた向きに沿って測った長を $l_1(p)$ と書く。以下同様に、$\widehat{\gamma(p)\gamma^2(p)}$ の長さを $l_2(p)$, $\widehat{\gamma^2(p)\gamma^3(p)}$ の長さを $l_3(p)$, ‥‥‥ とおく。このとき、$\mathcal{C}$ の全長を l とすると、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_1(p) + l_2(p) + \cdots + l_n(p)}{nl}$$

は収束し、しかも $p \in \mathcal{C}$ のとり方によらない。(この値は、rotation number と呼ばれる。) この事実をもとにして、Poincaré は次の二つの定理を証明した。

Theorem. 1.

φ_t が periodic orbit を持つ

$\Leftrightarrow$ rotation number が有理数

Theorem. 2. rotation number が無理数のとき、$S(\subset \mathcal{C})$ を

$\{\gamma^n(p) \mid p \in C,\ n \in \mathbb{Z}\}$ の導集合とすれば，（S は initial point p のとり方によらない。）次の二つのうち，いづれかが可能である。

a) $S = C$

b) S は C 上 nowhere dense な perfect set.

Theorem. 2 において $S = C$ の場合には，φ_t のすべての orbit は，T^2 上 dense になっており，b) の場合は，φ_t の orbit はすべて non-compact であるがその閉包は内点を含まない。

Poincaré は b) の場合が実際に可能であるか否かを決定することはできなかったが、この問題は後に，Denjoy, Siegel によって[redacted]解決された。Denjoy は $f_j \in C^1$ のとき，b) の場合が起こり得ることを示し，Denjoy 及び Siegel は $f_j \in C^2$ ならば，b) の場合は不可能であることを示した。Siegel はさらにその証明の中で，上に仮定した閉曲線の存在をも示している。以上の結果をまとめると次の定理になる。

Theorem. 3. $f_j \in C^2$ $(j=1,2)$ で，φ_t が periodic orbit を持たないならば，φ_t の orbit はすべて T^2 上 dense である。

Example

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = a_2 \qquad (a_1 , a_2 \in \mathbb{R})$$

によって定まる flow を考えると、

i) $a_1 : a_2$ が rational $\Leftrightarrow$ すべての orbit が periodic

ii) $a_1 : a_2$ が irrational $\Leftrightarrow$ すべての orbit が T^2 上 dense

となっている。

この flow は n 次元トーラス $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ 上の系

$$(2) \quad \frac{dx_j}{dt} = a_j \qquad (j = 1, \cdots, n) \qquad a_j \in \mathbb{R}$$

によって定まる flow に拡張され、このときは、$a_1, a_2, \cdots, a_n$ が有理数体上1次独立なとき、又そのときに限り、すべての orbit が T^n 上 dense となる。(2) によって T^n 上に定まる flow は、Weyl-flow と呼ばれている。

§.2 T^2 上の minimal flow

一般に相空間 M 上に flow φ_t が与えられたとき、$p \in M$ を通る φ_t の orbit を $O(\varphi_t, p)$ で表わす。(M は距離空間とし、その距離を $d(\cdot,\cdot)$ で表わす。)

Definition. 1. 任意の $p \in M$ に対し、$\overline{O(\varphi_t, p)} = M$ である

とき，ρ_tはM上の minimal flow であるという。

Definition. 2. M上の二つの flow ρ_t, π_t が弱同型であるとは，M の homeomorphism h で，任意 $p \in M$ に対し，

$$h(O(\rho_t, p)) = O(\pi_t, h(p))$$

となるものが存在することである。

Definition. 3. M 上の二つの flow ρ_t, π_t が強同型であるとは，M の homeomorphism h で，任意の $p \in M$ と任意の $t \in R$ に対し，$h(\rho_t(p)) = \pi_t(h(p))$ となるものが存在することである。h を π_t から ρ_t への isomorphism と呼ぶ。

Definition. 4. M上の flow ρ_t が stable であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が定まり，

$$d(p, q) < \delta \quad , p, q \in M$$

ならば

$$d(\rho_t(p), \rho_t(q)) < \varepsilon$$

が，すべての $t \in R$ について成り立つことである。

以上のような定義を与えると，次のことがいえる。

Theorem.4. φ_t が T^2 上の minimal flow ならば、φ_t に弱同型な Weyl-flow が存在する。

Theorem.5.

(A) T^2 上の minimal flow φ_t に強同型な Weyl-flow が存在する為の必要十分条件は、φ_t が stable なことである。

(B) φ_t は T^2 上の stable な minimal flow で、Weyl-flow $\frac{dx_j}{dt} = a_j$ $(j=1,2)$ に強同型であるとする。さらに、h_1 および h_2 を φ_t からこの Weyl-flow への isomorphism とする。このときある $p \in T^2$ に対して $h_1(p) = h_2(p)$ ならば、$h_1 = h_2$ である。

特に微分方程式系(1)が measure-preserving ならば、次の定理がなりたつ。

Theorem.6

(i) $f_j = a_0^{(j)} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} a_{m,n}^{(j)} e^{2\pi i(mx+ny)}$ $\quad (j=1,2)$

(ii) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \equiv 0$

$\Longrightarrow$ (1)で定義される flow は、$\frac{dx_j}{dt} = a_0^{(j)}$ $(j=1,2)$ で定まる Weyl-flow に弱同型である。

§.3　3次元トーラス上の flow

Theorem.4 によれば、Weyl-flow は T^2 上の minimal flow の標準形であるといえる。このことは、高次元のトーラスの場合にもいえるであろうか？

そこで 3次元トーラス $T^3 = R^3/Z^3$ 上の非特異な微分方程式系

$$(3)\qquad \frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, x_3) \qquad (j = 1, 2, 3)$$

$$\left(\begin{array}{l} f_j(x_1+1, x_2, x_3) = f_j(x_1, x_2+1, x_3) = f_j(x_1, x_2, x_3+1) = f_j(x_1, x_2, x_3) \\ \sum f_j^2 > 0, \qquad f_j \in C^r \quad (r \geq 1) \end{array}\right.$$

を調べてみよう。

これについて、次のような Saito [ ] の結果がある。

Theorem.7

(i) $f_j(x_1, x_2, x_3) = a_0^{(j)} + \sum_{(m_1, m_2, m_3) \neq (0,0,0)} a_{m_1 m_2 m_3}^{(j)} e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}$ $\qquad (j = 1, 2, 3)$

(ii) $\sum \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \equiv 0$

(iii) (3)で定まる flow は stable

$\Longrightarrow$ a) $a_0^{(1)}, a_0^{(2)}, a_0^{(3)}$ が有理数体上 1 次従属ならば、(3)で定まる flow は T^3 上の minimal flow ではない。

b) $a_0^{(1)}, a_0^{(2)}, a_0^{(3)}$ が有理数体上 1 次独立ならば、(3)

で定まるflowは、Weyl-flow $\dfrac{dx_j}{dt} = a_0^{(j)}$ $(j=1,2,3)$ に強同型である。

この定理によって、stableでmeasure-preservingなminimal flowに関しては、問題は肯定的に解かれる。ところがunstable flowでは、答は否定的である。

Theorem. 8.

(4) $\dfrac{dx_1}{dt} = 1$, $\dfrac{dx_2}{dt} = \alpha$, $\dfrac{dx_3}{dt} = f(x_1, x_2)$

$(\ \alpha \notin \mathbb{Q}\ ,\ f(x+1, x_2) = f(x_1, x_2+1) = f(x_1, x_2) \quad f \in C^r\ )$

によって定まるT^3上のflowは、もしstableでないならば、T^3上のminimal flowで、且、いかなるWeyl-flowにも弱同型ではない。

Remark. (4)によって定まるflowをunstableとするように、αおよび$f(x_1, x_2)$を選ぶことは可能である。

最後に(4)で定まるunstable flowの一つの特徴を述べておこう。

Definition. 5. M 上の flow φ_t が homogeneous flow であるとは、任意の二点 $p, q \in M$ に対し、次の性質をもつ M の homeomorphism h が存在することをいう。

i) $h(p) = q$

ii) $h(O(\varphi_t, x)) = O(\varphi_t, h(x))$ for $\forall x \in M$

Remark. homogeneous flow に弱同型な flow はやはり homogeneous である。従って T^2 上の minimal flow は全て homogeneous である。

Theorem. 9.

(4) によって定まる unstable flow は、homogeneous ではない。

(4) によって定まる unstable flow と、Weyl-flow で T^3 上の minimal flow が尽くされるかどうかはわかっていない。（弱同型な flow は同一視して。）

— References —

[1] Denjoy, A., Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, Journ. Math. pures et appl., 9 (1932) 333-375.

[2] Ishii, I., On a non-homogeneous flow on the 3-dimensional torus, Funkcial. Ekvac. (to appear).

[3] Poincaré, H., Sur les courbes définies par les équations différentielles, Oeuvres vol.1 137-158.

[4] Saito, T., On the measure preserving flow on the torus, Journ. Math. Soc. Japan, 3 (1951) 279-284.

[5] Saito, T., On dynamical systems in n-dimensional torus, Funkcial. Ekvac., 7 (1965) 91-102.

[6] Siegel, C. L., Note on differential equations on the torus, Ann. of Math., 46 (1945) 423-428.