数理解析研究所講究録
246巻 1975年 125-130

リーマン面の分岐被覆について

島根大 文理　松永弘道

昨年の研究集会で種数2のリーマン面上の自己同型群の作用で同変な正則直線束の同値類のなす群の位数がdegreeごとに有限であることを述べた。参考文献[2]でこの位数は32であることを示した。今回は種数3のリーマン面の場合に同様な問題を取扱った。こゝでは自己同型全体のつくる群よりも，より簡単な対合による場合に重点を置いた。種数3のリーマン面はいずれもM_3で表わすことにする。$\mathbb{C}$を複素数全体の，$\mathbb{Z}$を整数全体のなす加群，$\mathcal{O}^*$を正則関数の，$\mathcal{O}^{1,0}$をアーベル微分の芽のなす層とする。チャーン類0の正則直線束の同値類のなす加群は

$$\frac{H^1(M_3, \mathbb{C})}{H^1(M_3, \mathbb{Z}) + \delta\Gamma(M_3, \mathcal{O}^{1,0})} \quad \cdots \quad (1)$$

である。[2]における様にGrothendieckによる正規列

$$e \to H^1(\mathbb{Z}_2, H^0(M_3, \mathcal{O}^*)) \to H^1(M_3, \mathbb{Z}_2; \mathcal{O}^*) \to H^1(M_3, \mathcal{O}^*)^{\mathbb{Z}_2} \quad (2)$$

を用いる。次に M, N をコンパクトリーマン面とし, $f: M \longrightarrow N$ を n 重被覆で,分岐点 $a_1, \cdots, a_k$ をもち, a_i での分岐度が $m_i - 1$, すなわち, f が a_i のまわりで局所的に $w = z^{m_i}$ で与えられるとすると, Riemann－Hurwitz の関係式は M, N の種数をそれぞれ p, p' とするとき,

$$p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} m_i + n(p'-1) + 1 \quad \cdots \quad (3)$$

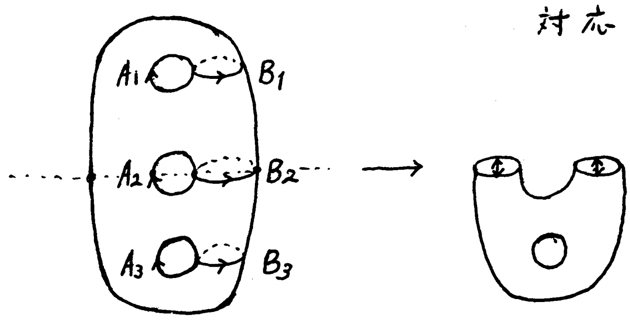
となる。

V を $\mathbb{C}^3$ において $(0,0,0)$ を孤立特異点としてもつ曲面とすると $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ 作用によって $\mathbb{CP}^2$ における平面代数曲線が得られる。本稿ではこの様にして得られる平面代数曲線が種数3をもつ場合に注目する。

I－1) $V: z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 = 0$ のとき得られる曲線 M の種数は $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$ である。$\mathbb{CP}^2$ の同次座標で

$$[z_0, z_1, z_2] \longrightarrow [z_0, z_1, -z_2]$$

で定まる正則対合を考えると,その不動点は $[1, \varepsilon_4^j, 0]$ (ただし ε_4^j は -1 の4乗根で, $j=1,2,3,4$) の4個である。この対合による商空間は種数1の曲線すなわちトーラスで $z_0^4 + z_1^4 + z_2^2 = 0$, ただし $\{t z_0, t z_1, t^2 z_2\} = \{z_0, z_1, z_2\}$, $\forall t \in \mathbb{C}^*$ で与えられる, ここに $\{\quad\}$ は同値類を表わすものとする。このとき,標準写像 $\varphi: M_3 \rightarrow M_1$ の分岐点は上の4個の不動点である。[4] の V を参照して φ を位相的に図示すると



対応するコホモロジー

$A_1 \to -A_3$

$B_1 \to -B_3$

$A_2 \to -A_2$

$B_2 \to -B_2$

一般のコホモロジー類は対合によって，次の様に変換される。

$$a_1A_1 + b_1B_1 + a_2A_2 + b_2B_2 + a_3A_3 + b_3B_3 \to -a_1A_3 - b_1B_3 - a_2A_2 - b_2B_2 - a_3A_1 - b_3B_1$$

従ってコホモロジー類が$\mathbb{Z}_2$-不変であるための条件は

$$(a_1+a_3)A_1 + (b_1+b_3)B_1 + 2a_2A_2 + 2b_2B_2 + (a_3+a_1)A_3 + (b_3+b_1)B_3$$
$$\in H^1(M_3,\mathbb{Z}) + \delta\Gamma(M_3,\theta^{1,0})$$

すなわち

$$a_1+a_3,\quad b_1+b_3,\quad 2a_2,\quad 2b_2 \in \mathbb{Z} \mod \delta\Gamma(M_3,\theta^{1,0}),$$

であるが$\delta\Gamma(M_3,\theta^{1,0})$が$A_k + b_{k,1}B_1 + b_{k,2}B_2 + b_{k,3}B_3$, $b_{k,j}\in\mathbb{C}$, $k=1,2,3$; $j=1,2,3$, で生成されることを考慮して，(2)より

$$e \to \mathbb{Z}_2 \to H^1(M_3,\mathbb{Z}_2;\theta^*) \to \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}_2$$

の形の正規列を得る。

I－2) V: $z_0^4 + z_1^3z_2 + z_2^3z_1 = 0$ のとき，対合 $[z_0,z_1,z_2] \to [-z_0,z_1,z_2]$ による商空間はやはりトーラスで $\mathbb{C}^3$ で方程式 $z_0^2 + z_1^3z_2 + z_2^3z_1 = 0$ で得られる代数的集合を $\{t^2z_0, tz_1, tz_2\} \equiv \{z_0,z_1,z_2\}$，ただし $t\in\mathbb{C}^*$，で同一視して得られるものであり，位相的様相，従って$\mathbb{Z}_2$-直線束の状況は I－1) と同様である。

III　固定点はないが分岐点をもつ場合.

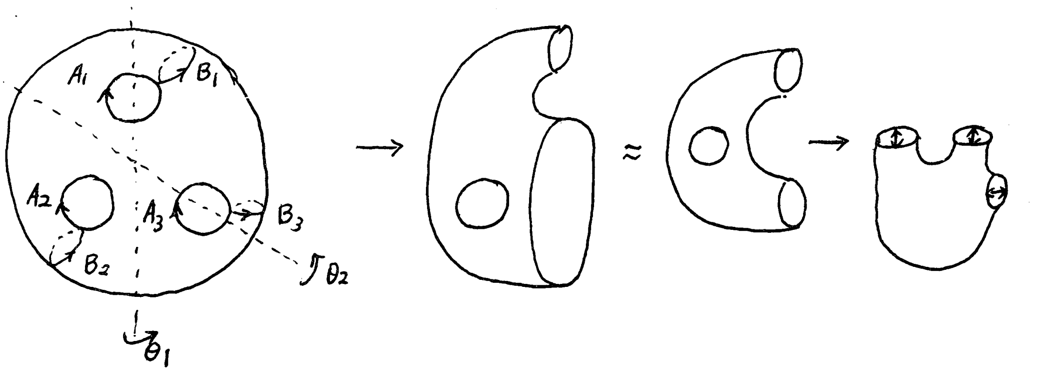
I−1)の平面代数曲線から始めて，次の様に分岐被覆を2つ組合わせる。

$$z_0^4+z_1^4+z_2^4=0 \searrow z_0^4+z_1^4+z_2^2=0 \nearrow z_0^4+z_1^2+z_2^2=0.$$

このとき標準写像　$\varphi: M_3 \to M_1 \to M_0$ は次の様になる。

$$\varphi([z_0,z_1,z_2]) = [\![z_0,z_1,z_2]\!]$$

$G=\{0\}\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ の作用で固定点はなく，φの分岐点は $[1,\varepsilon_4^j,0]$，$[1,0,\varepsilon_4^j]$，ε_4 は1の原始4乗根で，$j=1,2,3,4$，の8個である。次に群Gに対して，M_3上のG−直線束を調べるためにコホモロジー類が受ける変換を求める。I−1)を参照して



$$\begin{aligned}
\theta_1:\ & A_1 \longrightarrow -A_1, && a_1A_1+b_1B_1+a_2A_2+b_2B_2+a_3A_3+b_3B_3\\
& B_1 \longrightarrow -B_1 && \longrightarrow -a_1A_1-b_1B_1-a_2A_3+b_2B_3-a_3A_2+b_3B_2\\
& A_2 \longrightarrow -A_3 && \therefore\ 2a_1A_1+2b_1B_1+(a_2+a_3)A_2+(b_2-b_3)B_2\\
& B_2 \longrightarrow +B_3 && \qquad +(a_3+a_2)A_3+(b_3-b_2)B_3\\
& && \qquad \in H^1(M_3,\mathbb{Z})+\delta\Gamma(M_3,\theta^{1,0})
\end{aligned}$$

$$\theta_2 : \quad A_1 \to -A_2 , \quad a_1A_1+b_1B_1+a_2A_2+b_2B_2+a_3A_3+b_3B_3$$

$$B_1 \to B_2 \qquad \to -a_1A_2+b_1B_2-a_2A_1+b_2B_1-a_3A_3-b_3B_3$$

$$A_3 \to -A_3 \qquad \therefore (a_1+a_2)A_1+(b_1-b_2)B_1+(a_2+a_1)A_2+(b_2-b_1)B_2$$

$$B_3 \to -B_3 \qquad\qquad +2a_3A_3+2b_3B_3$$

$$\in H^1(M_3,\mathbb{Z})+\delta\Gamma(M_3,\theta^{1,0})$$

従って　$2a_1, 2b_1, 2a_3, 2b_3, (a_1+a_2), (b_1+b_2) \in \mathbb{Z} \bmod \delta\Gamma(M_3,\theta^{1,0})$。

Grothendieck による正規列は

$$e \to H^1(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2, H^0(M_3,\theta^*)) \to H^1(M_3;\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2;\theta^*) \to H^1(M_3,\theta^*)^{\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2}$$

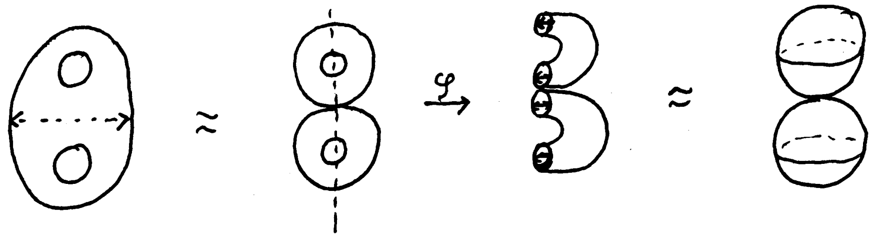
となるが[2], Proposition 2 の証明により左より2項目は $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ となり，$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ー直線束の個数は degree ごとに $4\times2\times2\times2\times2 = 64$ 個となる。

III　[2]における曲面を与える方程式について.

種数2の曲面は重複点を許すことなしには平面代数曲線として表わすことができないことはよく知られている。ここでは唯一つの重複点をもつ曲線のモデルをとりあつかう。

$V : z_0^6+z_1^6+z_1^4z_2^2=0$ は重複点 $[0,0,1]$ をもつ平面代数曲線で，この特異点を除去したものは種数2のリーマン面である。対合 $[z_0,z_1,z_2] \to [z_0,z_1,-z_2]$ に対する固定点は $[1,\varepsilon_6^j,0]$, $j=1,\cdots,6$，ただし ε_6 は -1 の原始6乗根，および $[0,0,1]$ の計7個である。標準写像 $\varphi : [z_0,z_1,z_2] \to \{z_0,z_1,z_2^2\}$ による商空間は $z_0^6+z_1^6+z_1^4z_2=0$，ただし $\{tz_0,tz_1,t^2z_2\}=\{z_0,z_1,z_2\}$,

$t \in \mathbb{C}^*$，で表わされるが，その特異点 $\{0, 0, 1\}$ を除去して球面が得られる。φ を位相的に図示すると



となり，特異点を除去したものが [2] の対合 θ による標準写像となる。

以上の様な考察だけでは $\mathbb{Z}_3$－直線束の状況がよくわからない例があるが，今後の問題としたい。

参考文献

[1] A. Grothendieck ; Sur le memoire de Weil [4], Generalization des fonctions Abbliennes, Semi. Bourbaki 141(1956)

[2] H. Matsunaga ; Idolomorphic θ-Line Bundles over a Compact Riemann Surface of genus 2. Mem. Fac. L. S. Shimane Univ 8 (1975) 17-20

[3] P. Orlik ; Seifert Manifolds, Lecture notes in Math. Springer 291 (1972)

[4] A. Hurwitz ; Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, Math. Ann. 39 (1891) 1~16.