数理解析研究所講究録
246巻 1975年 76-81

Semicharacteristic classes と群 $O(48,k,l)$ について

北大理　神島芳宣

§1

球面に free に act する finite group を決定する問題において，Milnor は[1]の中で3次元球面 S^3 上に free に act するか否かの finite group を次のように分類した．

a)　群 $Q(8n,k,l)$　n even　$n\geq 2$　$k>l\geq 1$

b)　群 $Q(8n,k,l)$　n odd　$n>k\geq l$

c)　群 $O(48,k,l)$　$l\not\equiv 0 \pmod 2$　$l\not\equiv 0 \pmod 3$

d)　群 $A\times Z_l$　（Aは上の任意の群で $(\mathrm{ord}A,l)=1$ をみたす）

このうち Milnor は c) の $l\neq 1$ の場合，S^3 に free に act しないことを示したが，その他については決定していない。　その後 R. Lee は[2]において a) と c) について，S^3（もっと一般に $8t+3$ 次元の mod 2 homology sphere）に free に act しないことを示したが，c) の場合の証明は $l=1$ の時は正しくない。(See[3])

従って，ここで $O(48,k,l)$ のある sub group を選ぶことに

より，Leeのbordism invariantを使って$O(48,k,l)$が$8t+3$次元のmod 2 homology sphereにfreeにactしないことを示す。なお，中岡氏は，彼の定義したEquivariant Point Theoremの応用として，$O(48,k,l)$がfreeにactしないことを示している([4])

Leeのbordism invariant $\chi_{\frac{1}{2}}$とは，finite group Gのun-oriented bordism group $\mathcal{N}_{2n+1}(G)$から標数2の有限体K上のG-representationのつくるRelative Grothendieck group $\widetilde{R}_{GL,ev}(G)$へのhomomorphism；$\chi_{\frac{1}{2}}: [G,M] \longmapsto \chi_{\frac{1}{2}}(M;K)$である。この時，Leeは次のことを示した([2], Th. 4.13)

$Z_{2,p}$ (p: odd)をdihedral groupとする時，$\mathcal{N}_{2n+1}(Z_{2,p})$の元[M]に対して，$\chi_{\frac{1}{2}}(M;K) = \hat{\chi}([K]+[V_1]+\cdots+[V_{\frac{p-1}{2}}])$.

ここで，$Z_{2,p}$は，x, yでgenerateされ，$x^2 = y^p = (xy)^2 = 1$をみたすもの．[K]，[V_i]は$Z_{2,p}$のirreducible representationで，$\widetilde{R}_{GL,ev}(Z_{2,p})$において，$Z_2$-basisをなす．($i=1,\cdots,\frac{p-1}{2}$)

$\hat{\chi}$は，Kervaire semi-characteristic；$\hat{\chi} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim H_i(M;Z_2)$ (mod 2).

(Note，Kは，Z_2にprimitive p-th root of unityを付加した体で$Z_{2,p}$のsplitting fieldとなっている).

群$O(48,k,l)$ ($l \not\equiv 0 \pmod 2$, $l \not\equiv 0 \pmod 3$)は，generator X, P, Q, R, Aと次の生成関係をもつものである；$X^{3^k} = P^4 = A^l = 1$

$P^2 = Q^2 = R^2$，$PQP^{-1} = Q^{-1}$，$XPX^{-1} = Q$，$XQX^{-1} = PQ$，$RXR^{-1} = X^{-1}$

$RPR^{-1}=QP$, $RQR^{-1}=Q^{-1}$, $AP=PA$, $AQ=QA$, $RAR^{-1}=A^{-1}$

$AX=XA$.

§ 2.

定理　　群 $O(48,k,l)$ ($l\not\equiv 0 \pmod 2$, $l\not\equiv 0 \pmod 3$) は 8t+3 次元の mod 2-homology sphere に free に act しない。（[2] の Cor. 4.17）

証明

イ) $l\neq 1$ の場合 $\{X,P,Q\}$ によって generate される subgroup は，$T(8,3^k)$ に isomorphic な $O(48,k,l)$ の normal subgroup であり その quotient group $O(48,k,l)/T(8,3^k)$ は，dihedral group $Z_{2,l}$ に isomorphic である．ここで $T(8,3^k)$ とは，x,y,z によって generate され，relation $x^2=(xy)^2=y^2$, $zxz^{-1}=y$, $zyz^{-1}=xy$, $z^{3^k}=1$ ($k\geq 1$) をもつものである。(see [2] or [1]) また，$T(8,3^k)$ の cohomology に関して，次のことが知られている。 $H^i(T(8,3^k);Z_2)=\begin{cases}Z_2 & (i\equiv 0,3)\\ 0 & (i\equiv 1,2)\end{cases}$ （4を法として）。

今，M を 8t+3 次元の mod 2-homology sphere とし，$O(48,k,l)$ が free に act するとすれば，quotient manifold $M/T(8,3^k)$ には natural に $Z_{2,l}$ が free に act する． $H_i(M;K)=H_i(M;Z_2)\otimes_{Z_2}K=0$ ($i<8t+3$) より，vector space として，$H_i(M/T(8,3^k);K)\cong H_i(T(8,3^k);K)$ ($i<8t+3$) .

従って，　$H_i(M/T(8,3k);K) = \begin{cases} K & i \equiv 0,3 \pmod 4 \\ 0 & i \equiv 1,2 \pmod 4 \end{cases} \quad (0 \leq i \leq 8t+3)$

$H_i(M/T(8,3k);K)$ には，$Z_{2,\ell}$ が act しているが（homology への induce action に関して），上のことより trivial であるから，

Semi-characteristic　$\chi_{\frac{1}{2}}(M/T(8,3k);K) = \sum_{i=0}^{4t+1} (-1)^i [H_i(M/T(8,3k);K)]$

$$= [K]$$

$\hat{\chi} = \sum_{i=0}^{4t+1} \dim H_i(M/T(8,3k);K) \pmod 2 = 1$　よって，[2] の Th. 4.13 に反する．よって矛盾．

ロ）$\ell = 1$ の場合　　即ち $A = 1$ の時．この時 $k \geq 2$ である（$O(48,1,1)$ は，binary octahedral group でこれは free に act する．(see, [11])）　　$\bar{X} = X^{3^{k-1}}$ とおくと，$\bar{X}^3 = 1$，$\bar{X}P = P\bar{X}$
$\bar{X}Q = Q\bar{X}$ をみたす。$O(48,k,1)$ において $\{\bar{X}, P, Q, R\}$ によって generate される subgroup O' を考える。O' において $\{P, Q\}$ によって generate される subgroup は $Q(8)$ に isomorphic な O' の normal subgroup である．ここで $Q(8)$ は，binary dihedral group ；$\{x, y \mid x^2 = (xy)^2 = y^2\}$ となるものである．
また，quotient group $O'/Q(8)$ は $Z_{2,3}$ に isomorphic である。今，
$O(48,k,1)$ が $8t+3$ 次元の mod 2-homology sphere M に free に act するとすれば，その subgroup O' は M に free に act し，quotient mani

-fold $M/Q(8)$ には，natural に $Z_{2,3}$ が free に act する．前と同様に，$H_i(M/Q(8);K) \cong H_i(Q(8);K) = \begin{cases} K & i\equiv 0,3 \pmod 4 \\ K\oplus K & i\equiv 1,2 \pmod 4 \end{cases}$ $(i<8t+3)$ (see [5]).

一方，$H_i(M/Q(8);K)$ は，$KZ_{2,3}$-module であるから，$Z_{2,3}=\{[\bar{x}]=S, [R]=T\}$ とおくと，$H_i(M/Q(8);K)$ には，$S_*: H_i(M/Q(8)) \longmapsto H_i(M/Q(8))$ が act しているが，$\delta: Q(8)\longmapsto Q(8)$ を $\delta(U)=\bar{X}U\bar{X}^{-1}$，$U\in Q(8)$ なる automorphism とすると，δ は classifying space への map $\delta: B_{Q(8)}\longmapsto B_{Q(8)}$ を induce し，上の同型対応で S_* に対応するものは，$\delta_*: H_i(Q(8);K)\longmapsto H_i(Q(8);K)$ である．ところが $\delta(P)=P$，$\delta(Q)=Q$，$Q(8)=\{P,Q\}$ であるから，$\delta=id$ 即ち，対応する $S_*=id$ となる．よって $KZ_{2,3}$-module $H_i(M/Q(8);K)$ において，S の作用は，trivial．involution T に対しては，$H_i(M/Q(8);K)$ の元 $x(\neq 0)$ で $T_*x=x$ なるものがあるから，

$$0\longmapsto Kx\longmapsto H_i(M/Q(8);K)\longrightarrow H_i(M/Q(8);K)/Kx\longrightarrow 0$$

より Grothendieck group $R_K(Z_{2,3})$ で，$[H_i(M/Q(8);K)]=[K]+[H_i(M/Q(8);K)/Kx]$

inductively に $[H_i(M/Q(8);K)] = \dim H_i(M/Q(8);K)[K]$

よって，Relative grothendieck group $\widetilde{R}_{GL,ev}(Z_{2,3})$ において，

$[H_i(M/Q(8);K)] = \dim H_i(M/Q(8);K)[K] \pmod 2$．　従って，

semi-characteristic $\chi_{\frac{1}{2}}(M/Q(8);K)=\sum_{i=0}^{4t+1}(-1)^i[H_i(M/Q(8);K)]$

$= \hat{\chi}[K]$

$\hat{\chi} = \sum_{i=0}^{4t+1} \dim H_i(M/Q(8); K) = 1$ より，矛盾である．

証明終り．

References

[1] J. Milnor : Groups which act on S^n without fixed points Amer. J. Math. 79 (1957) pp 623–630

[2] R. Lee : Semicharacteristic classes, Topology 12 (1973) pp 183–199

[3] 中岡稔 : 群作用をもつ多様体のトポロジー 数理研講究録 (1974) pp 56.

[4] 中岡稔 : Groups which act freely on Manifolds. (to appear)

[5] Cartan-Eilenberg : Homological Algebra. Princeton press. pp. 253.