数理解析研究所講究録
247巻 1975年 41-49

Lower Bounds For The Distributions Of Certain Multivariate Test Statistics

神大 養　藤越康祝
阪大 基工　磯貝恭史

§1. 序.　確率行列 A, B は互に独立で, それぞれ, Wishart 分布 $W_p(q, \Sigma ; \Omega)$, $W_p(n, \Sigma)$ に従い, AB^{-1} の固有根を $d_1 \geqq \cdots \geqq d_p$ とおく. Saw [5] は, $\mathrm{rank}(\Omega) \leqq k = p - s$ のとき,

$$(1.1) \quad P\left(\log \prod_{j=1}^{s} (1 + l_j) \leqq x \right) \leqq P\left(\log \prod_{j=1}^{s} (1 + d_{k+j}) \leqq x \right)$$

を示している. ここに, $l_1 \geqq \cdots \geqq l_s$ は UV^{-1} の固有根で, U, V は互に独立に $W_s(q, I_s)$, $W_s(n, I_s)$ に従う Wishart 行列である. (1.1) は回帰係数の次元に関する尤度比 (=LR) 統計量の仮説のもとでの分布に対する一つの下界を与えている. この尤度比統計量自身の分布は極めて複雑であるが, 下界の分布はかなりくわしく調べられており, (1.1) は棄却点をさぐる際に有効である.

この報告では, 任意の単調増加関数 $\phi(d_{k+1}, \cdots, d_p)$ に対

しても，(1.1)型の Bound が求まることを示し，その特別な場合として，(1.1)，および，Hotelling's T_0^2 type 統計量，Pillai's V type 統計量 に対する Bounds が求まることを注意する．さらに，Tintner's model における固有根，および，正準相関係数に関する類似の Bounds を導出し，検定統計量への応用を示す．

§2. 固有根に関する Bounds. 次の Lemma 1 は poincaré Separation Theorem としてよく知られている (c.f. Bellman [1], p.118].

Lemma 1. p 次の対称行列 A と，$HH' = I_s$ なる任意の $s \times p$ 行列 H に対して，

$$(2.1) \qquad \lambda_j(A) \geq \lambda_j(HAH') \geq \lambda_{k+j}(A) \quad , \; j = 1, \cdots, s$$

が成立する．ここに，$\lambda_1(A) \geq \cdots \geq \lambda_p(A)$ は A の固有根である．

関数 $\phi(x_1, \cdots, x_s)$ は各 x_j について単調増加関数であるとする．

Lemma 2. 確率行列 A は非心 Wishart 分布 $W_p(n, \Sigma; \Omega)$ に従い，$rank(\Omega) \leqq k = p - s$ とする．

$g_1 \geqq \cdots \geqq g_p$ を $A\Sigma^{-1}$ の固有根とするとき，

(2.2) $$P(\phi(g_1, \cdots, g_s) \leqq x) \leqq P(\phi(t_1, \cdots, t_s) \leqq x) \leqq P(\phi(g_{k+1}, \cdots, g_p) \leqq x)$$

および，とくべつな場合として，

(2.3) $$P(g_j \leqq x) \leqq P(t_j \leqq x) \leqq P(g_{k+j} \leqq x), \quad j=1, \cdots, s$$

が成立する．ここに，$t_1 \geqq \cdots \geqq t_s$ は U の固有根で，U は $W_s(n, I_s)$ に従う．

〔証明〕 $g_1 \geqq \cdots \geqq g_p$ の分布を扱うとき，$\Sigma = I_p$，$\Omega = \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_s, 0, \cdots, 0)$ としてよい．$\delta_1 \geqq \cdots \geqq \delta_s$ は $\Omega\Sigma^{-1}$ の nonzero roots．$H = [0, I_s]$，$U = HAH'$ として，Lemma 1 を用いると (2.2) をうる．

Lemma 3．p 次の対称行列 A，p 次の正定値行列 B，$HH' = I_s$ なる任意の $s \times p$ 行列 H に対して，

(2.4) $$\lambda_j(AB^{-1}) \geqq \lambda_j(HAH'(HBH')^{-1}) \geqq \lambda_{k+j}(AB^{-1}), \quad j=1, \cdots, s$$

が成立する．

〔証明〕 $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1(AB^{-1}), \cdots, \lambda_p(AB^{-1})\}$ とおく．このとき，$A = RDR'$，$B = RR'$ なる正則行列 R が存在

し,

$$\lambda_j(HAH'(HBH')^{-1}) = \lambda_j((HBH')^{-\frac{1}{2}}HAH'(HBH')^{-\frac{1}{2}}) = \lambda_j(MDM'),$$
$$j=1,\cdots,s$$

と表わせる．ここに，$M=(HRR'H')^{-\frac{1}{2}}HR$．$MM'=I_s$ であることに注意して，Lemma 1 を用いると (2.4) をうる．

この Lemma より，MANOVA case における固有根，および，正準相関係数の分布に対する次の Bounds をうる．

Lemma 4. 確率行列 A, B は互に独立で，それぞれ，Wishart 分布 $W_p(q,\Sigma;\Omega)$，$W_p(n,\Sigma)$ に従い，$\mathrm{rank}(\Omega) \leqq k = p-s$ とする．$d_1 \geqq \cdots \geqq d_p$ を AB^{-1} の固有根とするとき，

$$(2.5)\quad P(\phi(d_1,\cdots,d_s) \leqq x) \leqq P(\phi(l_1,\cdots,l_s) \leqq x) \leqq P(\phi(d_{k+1},\cdots,d_p) \leqq x)$$

および，とくべつな場合として，

$$(2.6)\quad P(d_j \leqq x) \leqq P(l_j \leqq x) \leqq P(d_{k+j} \leqq x),\quad j=1,\cdots,s$$

が成立する．ここに，$l_1 \geqq \cdots \geqq l_s$ は UV^{-1} の固有根で，U, V は互に独立で，それぞれ，$W_s(q,I_s)$，$W_s(n,I_s)$

に従う.

確率行列 S は Wishart 分布 $W_{p+q}(n, \Sigma)$ に従い, S, Σ を

$$S = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & q \end{array} & \end{array}, \quad \Sigma = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & q \end{array} & \end{array} \qquad (p \leqq q)$$

と分割する.

Lemma 5. $r_1^2 \geqq \cdots \geqq r_p^2$, $\rho_1^2 \geqq \cdots \geqq \rho_p^2$ をそれぞれ, 標本・母集団正準相関係数の2乗, i.e., $S_{12}S_{22}^{-1}S_{21}S_{11}^{-1}$, $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}^{-1}\Sigma_{11}^{-1}$ の固有根とする. $\rho_{k+1} = \cdots = \rho_p = 0$ のとき,

$$(2.7) \quad P(\phi(r_1^2, \cdots, r_s^2) \leqq x) \leqq P(\phi(\theta_1^2, \cdots, \theta_s^2) \leqq x)$$
$$\leqq P(\phi(r_{k+1}^2, \cdots, r_p^2) \leqq x)$$

および, とくべつな場合として,

$$(2.8) \quad P(r_j^2 \leqq x) \leqq P(\theta_j^2 \leqq x) \leqq P(r_{k+j}^2 \leqq x), \quad j=1, \cdots, s$$

が成立する. ここに, $s = p-k$, $\theta_1^2 \geqq \cdots \geqq \theta_p^2$ は $U(U+W)^{-1}$ の固有根で, U, W は互に独立で, それぞれ, Wishart 分布 $W_s(q, I_s)$, $W_s(n-q, I_s)$ に従う.

〔証明〕確率行列 A, B は $Y: p \times n$ が与えられたとき, 互に独立で, $W_p(q, I_p; \Omega)$, $W_p(n-q, I_p)$ に従うとす

る．ここに，$\Omega = \Gamma Y Y' \Gamma'$，$\Gamma = \mathrm{diag}(\rho_1/\sqrt{1-\rho_1^2}, \cdots, \rho_k/\sqrt{1-\rho_k^2}, 0, \cdots, 0)$，$Y$ の各要素は互に独立で $N[0,1]$ に従う．Constantine [2] より，$r_1^2 \geq \cdots \geq r_p^2$ は $A(A+B)^{-1}$ の固有根のと考えてよい．$H = [0, I_s]$，$U = HAH'$，$W = HBH'$ とおき，Lemma 3 を用いると (2.8) をうる．

§3. 応用. (2.2), (2.5), (2.7) より，ある種の検定統計量の仮説のもとでの分布に対する Lower Bounds が求まる．これらの検定統計量の分布は分っていないが，Bounding Distributions はいろいろ調べられている．Bounding Distribution から定まる棄却点を用いてテストを行うと，そのテストは Conservative になっている．

(i) Tintner's model. 確率行列 X; $p \times n$ の各列は互に独立で，$N[\cdot, \Sigma]$ (Σ は既知とする) に従い，$E[X] = \mu$ とする．仮説検定問題 H_1; $\mathrm{ran}(\mu) = k$，K_1; $\mathrm{rank}(\mu) > k$ に対して，Tintner [6] は検定統計量，$T = g_{k+1} + \cdots + g_p$ を提案している．ここに，$g_1 \geq \cdots \geq g_p$ は $XX'\Sigma^{-1}$ の固有根である．実際，$T \geq c$ のとき，H_1 をすてるという検定方式は LR 方式である．このことは，例えば，Fujikoshi [3] における Lemma 1 から分る．Lemma 2 より，

仮説 H_1 のもとで,

$$P(\,T \geq c\,) \leqq P(\,\mathrm{tr}\,U \geq c\,) \tag{3.1}$$

をうる. ここに, U は $W_s(n, I_s)$ に従う. 従って, $\mathrm{tr}\,U$ は $\chi^2_{[ns]}$ である. c_α を $P(\,\mathrm{tr}\,U \geq c_\alpha) = \alpha$ なように定めると, $P(\,T \geq c_\alpha\,) \leqq \alpha$ となる.

(ii) MANOVA モデルにおける次元に関する検定. 線型仮説問題に対する標準型は次のように表わせる. 確率行列, X_1 ; $p \times q$, X_2 ; $p \times n$ の各列は互に独立で, $N_p[\,\cdot\,, \Sigma\,]$ に従い, $E[\,X_1\,] = \Xi$, $E[\,X_2\,] = 0$ とする. このとき, "$\Xi = 0$" をテストする. ここでは, 仮説検定問題 H_2 ; $\mathrm{rank}\,(\Xi) = k$, K_2 ; $\mathrm{rank}\,(\Xi) > k$ を考える. このテストに対し次の3つの統計量が提案されている. (1) LR 統計量, $T_1 = \log \prod_{j=1}^{s} (1+d_{k+j})$, (2) Hotelling's T_0^2 type 統計量, $T_2 = \sum_{j=1}^{s} d_{k+j}$, (3) Pillai's V type 統計量, $T_3 = \sum_{j=1}^{s} d_{k+j} / (1 + d_{k+j})$. ここに, $d_1 \geq \cdots \geq d_p$ は AB^{-1} の固有根で, $A = X_1 X_1'$, $B = X_2 X_2'$ は互に独立で, それぞれ, $W_p(\,q, \Sigma\,;\, \Xi\Xi'\,)$, $W_p(\,n, \Sigma\,)$ に従う. Lemma 4 より, 仮説 H_2 のもとで,

$$P(\,T_1 \geq c\,) \leqq P(\,-\log(\,|V|/|V+U|\,) \geq c\,) \tag{3.2}$$

$$P(T_2 \geq c) \leqq P(\mathrm{tr}\, UV^{-1} \geq c),$$

$$P(T_3 \geq c) \leqq P(\mathrm{tr}\, U(U+V)^{-1} \geq c)$$

をうる．ここに，U，V は互に独立で，それぞれ，$W_p(s, I_s)$，$W_p(n, I_s)$ に従う．T_1 に対する Bound は Saw [5] により求められた．(3.2) における Bounding Distributions は多くの研究者により調べられている（その文献に対しては，e.g.，Johnson and Kotz [4] を参照されたし）。

(iii) 正準相関係数に関する検定．　**Lemma 5** で用いた記号をつかう．仮説検定問題 H_3 : $\rho_{k+1} = \cdots = \rho_p$，$K_3$: not H_3 に対して，MANOVA の場合と同様な次の３つの統計量を考える．(1) LR 統計量，$Q_1 = -\log \prod_{j=1}^{s}(1-r_{k+j}^2)$，(2) Hotelling's T_0^2 type 統計量，$Q_2 = \sum_{j=1}^{s} r_{k+j}^2/(1-r_{k+j}^2)$，(3) Pillai's V type 統計量 $Q_3 = \sum_{j=1}^{s} r_j^2$．Lemma 5 により，仮説 H_3 のもとで，

$$P(Q_1 \geq c) \leqq P(-\log(|W|/|U+W|) \geq c),$$

$$P(Q_2 \geq c) \leqq P(\mathrm{tr}\, UW^{-1} \geq c), \tag{3.3}$$

$$P(Q_3 \geq c) \leqq P(\mathrm{tr}\, U(U+W)^{-1} \geq c)$$

をうる．(3.3) の Bounding Distributions は (3.2) の Bounding

Distributions において，n を $n-q$ とおくことにより求められる．

References

[1] Bellman, R.(1960). Introduction to Matrix Analysis. McGraw-Hill, New York.

[2] Constantine, A. G.(1963). Some non-central distribution problems in multivariate analysis. Ann. Math. Statist. 34 1270-1285.

[3] Fujikoshi, Y.(1974). The likelihood ratio tests for the dênsionality of regression coefficients. J. Multivariate Anal. 4 327-340.

[4] Johnson, N. L. and Kotz, S.(1972). Distribution in Statistics: Continuous Multivariate Distributions. Wiely, New York.

[5] Saw, J. G.(1974). A lower bound for the distribution of a partial product of latent roots. Comm. Statist. 3 665-669.

[6] Tintner, G.(1945). A note on rank, multicollinearrity, and multiple regression. Ann. Statist. Math. 16 304-308.