数理解析研究所講究録
248巻 1975年 293-311

b函数における最近の発展

京大 理　　大野 環

b函数論において，解明され，またされつつあることに関して，手短かにのべることを目的とする。§1は，一般の $\mathcal{D}(X,\Omega)$-Module についてのべ，reduced b-fn 等を統制する。§2に，柏原により示された"基本定理"を紹介するが，原証明に対し，いくつかの簡略化と改良がほどこされている。§3において，generic α での $\mathcal{D}f^{\alpha}$ と $\mathcal{D}(s)f^{s}$ との関連，又，当然のことのように，どこにも明記されていない，f^{s} の解析接続に関することを含めておく。§4において，multiple Lagrangean が singul-support にそなわる場合の，matrix b函数について，簡単にのべる。§5には，$b(s)$ の explicit formula のいくつかの試みがおさめられている。§6において，かなり地位のおちた"基本予想"に関して，地位の落ちぐあいと，修正の試みについてふれる。

(*) 締切期日の都合上，§4, §5, §6 はおさめられていない。

§1. $\mathcal{D}[t,s]$-Module, 一般b函数

$\mathcal{D}[s]f^s$ は $P(s)f^s \longrightarrow P(s+1)f^{s+1}$ という $\mathcal{D}$-linear map を許すが，この map の存在から，reduced b 函数についてのかなりの部分なとが導かれる。そこで一般に，

t, s は $\mathcal{D}$-linear map であり，交換関係

$ts - st = t$ を満たすものとする．

例えば $\mathcal{D}[s]f^s$ においては，"s" を "s を乗ずる作用"，"t" を "map $P(s)f^s \rightsquigarrow P(s+1)f^{s+1}$" とすれば，交換関係はみたされる．以下のすべての Modules $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ は $\underline{\mathcal{D}[t,s]\text{-Module}}$ とする。

Def. 1 ① $s \in \mathrm{End}(\mathcal{L})$ (以下いばいば $\mathcal{L} \circlearrowleft s$ と記す) が nonzero minimal polynomial をもつとき，それを $d_{\mathcal{L}}(s)$ と記す．(minimal polynomial が 0 のときは $d_{\mathcal{L}}$ が存在しないという)

② $b_{\mathcal{N},\nu}(s) = d_{\mathcal{N}/t^{\nu}\mathcal{N}}(s)$

③ $b_{\mathcal{N}}(s) = b_{\mathcal{N},1}(s)$

Def. 2 $\mathbb{C}[s] \ni f(s) \neq 0$ に対し，$w(f) \in \mathbb{N}_0$ を次の様に定める。

i) $f \in \mathbb{C} \Rightarrow w(f) = 0$

ii) $f(s) = \prod_{i=0}^{l} (s+\alpha+i)^{\varepsilon_i}$ $\quad \varepsilon_0 \varepsilon_l \neq 0 \Rightarrow w(f) = l+1$

iii) 一般の f については，$f(s)=0$ の根を mod $\mathbb{Z}$

で分類し，$f=\prod_{j=1}^{k} f_j$ （$f_j=0$ の根と $f_{j'}=0$ の根は $j\neq j'$ では mod $\mathbb{Z}$ で等しくなく，各 $f_j=0$ の根は mod $\mathbb{Z}$ でことごとく等しい）として，$w(f)=\max_j w(f_j)$.

Thm. 1 $d_{\mathcal{Z}}(s)$ が存在する $\Rightarrow$ $t^{w(d_{\mathcal{Z}})}\mathcal{Z}=0$ †.

∵) $d_{\mathcal{Z}}(s)\mathcal{Z}=0$. 左から $t^{w(d_{\mathcal{Z}})}$ を作用させて

$d_{\mathcal{Z}}(s+w(d_{\mathcal{Z}}))\,t^{w(d_{\mathcal{Z}})}\mathcal{Z}=0$. 又，$\mathcal{Z}\supset t^{w(d_{\mathcal{Z}})}\mathcal{Z}$ より

$d_{\mathcal{Z}}(s)\,t^{w(d_{\mathcal{Z}})}\mathcal{Z}=0$.

g.c.d $(d_{\mathcal{Z}}(s),\, d_{\mathcal{Z}}(s+w(d_{\mathcal{Z}})))=1$ より $t^{w(d_{\mathcal{Z}})}\mathcal{Z}=0$ ■.

Π において，$b_{\pi}(s)$ が存在するとき，$\forall\nu$ について $b_{\pi,\nu}(s)$ は存在し，$b_{\pi,\nu}(s)\mid[b_{\pi}(s)]_{\nu}$ である．（但し $[\varphi(s)]_{\nu}=\varphi(s)\varphi(s+1)\cdots\varphi(s+\nu-1)$）．$b_{\pi,\nu}(s)$ に関して，次の構造定理が成立する．

Thm.* 2 ① $\exists\nu_0\in\mathbb{N}_0$, $\overline{b}_{\pi}(s)\in\mathbb{C}(s)$, $\overline{b}'_{\pi}(s), c_{\pi}(s)\in\mathbb{C}[s]$ s.t. $\forall\nu\geq\nu_0$,

$$b_{\pi,\nu}(s)=[\overline{b}_{\pi}(s)]_{\nu}\,c_{\pi}(s+\nu)$$

$$=c_{\pi}(s)\,[\overline{b}'_{\pi}(s)]_{\nu} \qquad (1\text{-}1)$$

$$\overline{b}_{\pi}(s)\,c_{\pi}(s+1)=c_{\pi}(s)\,\overline{b}'_{\pi}(s) \qquad (1\text{-}2)$$

* この定理の原形は，本質的に佐藤による．
† 特に，t: injective or t: surjective $\Rightarrow$ $\mathcal{Z}=0$.

② * $t \in \mathrm{End}(\pi)$ が injective であれば，かえて

$\overline{b}_\pi(s) \in \mathbb{C}[s]$．このときはさらに，

$\nu \leq \nu_0$ についても，$\exists c_{\pi,\nu}(s),\ c'_{\pi,\nu}(s) \in \mathbb{C}[s]$

s.t. $\nu < \nu'$ ならば

$$c_{\pi,\nu}(s) \mid c_{\pi,\nu'}(s) \mid c_\pi(s) \qquad (1\text{-}3)$$
$$c'_{\pi,\nu}(s) \mid c'_{\pi,\nu'}(s) \mid c_\pi(s)$$

又，①の $\nu_0 = W(b_\pi) - 1$ ととることができ，

$$c_\pi(s) \mid [\overline{b}_\pi(s)]_{W(b_\pi)-1} \qquad (1\text{-}4)$$
$$b_\pi(s) \mid [\overline{b}_\pi(s)]_{W(b_\pi)} \qquad (1\text{-}5)$$

即ち，b函数が2通りにreduceできるわけであるが，$\overline{b}, \overline{b}'$ cの関係を示す，筆者の公式（1-2）によれば，いずれか一方を考えればよく，通常のb函数論では pair $(\overline{b}_\pi, c_\pi)$ を考察する．t が injective でないときに，$\overline{b}_\pi(s)$ が polynomial とは限らぬのは，次の事情による．

~~$st^\nu = t^\nu(s-\nu)$~~ $t^\nu s = (s+\nu)t^\nu$ より，$\mathrm{Ker}\, t^\nu$ は s-invariant である．$\tilde{\pi} = \pi / \bigcup_\nu \mathrm{Ker}\, t^\nu$ とおくと，$\tilde{\pi}$ において t は injective．従って，$\overline{b}_{\tilde{\pi}}(s)$ は②により polynomial．このとき，$\tilde{c}(s) = c_\pi(s) / c_{\tilde{\pi}}(s)$ とおいて，

$$\overline{b}_\pi(s) = \frac{\tilde{c}(s)}{\tilde{c}(s+1)}\, \overline{b}_{\tilde{\pi}}(s)$$ となっていることがわかる．

（$\overline{b}'_\pi(s) = \overline{b}'_{\tilde{\pi}}(s)$ である）

* さらに，p.6bisの Remark をみよ．

証明は、[ ]における Thm 3 の証明と同様であるが、①の一般的情況のためには、多少の拡張を要す。詳細略。

sub Module との関連について、次の定理がある。

Thm 3　$\mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2$

1. $t : \mathfrak{N}_1 \to \mathfrak{N}_1$ injective
2. $d_{\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_2}(s)$ が存在する。
3. $b_{\mathfrak{N}_1}(s)$ or $b_{\mathfrak{N}_2}(s)$ が存在する

$\Rightarrow$ $\exists\ \tilde{c}(s),\ \tilde{\tilde{c}}(s)$ s.t.

$$\tilde{c},\ \tilde{\tilde{c}} \mid d_{\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_2}, \qquad c_{\mathfrak{N}_1}\tilde{\tilde{c}} = c_{\mathfrak{N}_2}\tilde{c} \qquad (1\text{-}6)$$

$$\bar{b}_{\mathfrak{N}_1}(s) = \frac{\tilde{c}(s)}{\tilde{c}(s+1)}\bar{b}_{\mathfrak{N}_2}(s), \quad \bar{b}'_{\mathfrak{N}_1}(s) = \frac{\tilde{\tilde{c}}(s)}{\tilde{\tilde{c}}(s+1)}\bar{b}'_{\mathfrak{N}_2}(s) \qquad (1\text{-}7)$$

$$\bar{b}_{\mathfrak{N}_2}(s) \mid [\bar{b}_{\mathfrak{N}_1}(s)]_{w(d_{\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_2})+1}, \qquad (1\text{-}8)$$

$$\bar{b}_{\mathfrak{N}_1}(s) \mid [\bar{b}_{\mathfrak{N}_2}(s - w(d_{\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_2}))]_{w(d_{\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_2})+1}$$

(1-8) は (1-7) と (1-6) の第一式より従う。

(1-7) から特に $\deg \bar{b}_{\mathfrak{N}_1} = \deg \bar{b}_{\mathfrak{N}_2}$ ($\deg \bar{b}'_{\mathfrak{N}_1} = \deg \bar{b}'_{\mathfrak{N}_2}$) であるが、さらにその表示の形より、$\bar{b}_{\mathfrak{N}_1}$ と $\bar{b}_{\mathfrak{N}_2}$ の根の mod $\mathbb{Z}$ groups の代表元 (mod $\mathbb{Z}$) の集合、各 group の元数、は一致している。しかも (1-6) の第一式を考えあわせれば、代表元 α の group の対応する因子が

$$\bar{b}_{\mathfrak{N}_1} \cdots (s+\alpha+\lambda_1^{(1)})(s+\alpha+\lambda_2^{(1)}) \cdots\cdots (s+\alpha+\lambda_k^{(1)}) \quad \lambda_k^{(1)} \le \lambda_{k+1}^{(1)}$$

$$\bar{b}_{\mathfrak{N}_2} \cdots (s+\alpha+\lambda_1^{(2)})(s+\alpha+\lambda_2^{(2)}) \cdots\cdots (s+\alpha+\lambda_h^{(2)}) \quad \lambda_h^{(2)} \le \lambda_{h+1}^{(2)}$$

とすれば，　$\lambda_k^{(2)} \geq \lambda_k^{(1)} \geq \lambda_k^{(2)} - w(d_{\pi_1/\pi_2})$

であることまで知られる。（$\bar{b}'_{\pi_1}$ と $\bar{b}'_{\pi_2}$ についても同様）

証明においては，条件2より Thm 1 を用いて

$\pi_2 \supset t^{w(d_{\pi_1/\pi_2})}\pi_1$ となることに注意し，[ ] の Thm 11

の証明の方針に，より精密な考察を加える．尚，上式より

$\pi_1 \supset \pi_2 \supset t\pi_2 \supset t^{w(d_{\pi_1/\pi_2})+1}\pi_1$ となり，従って

$$b_{\pi_2}(s) \mid [b_{\pi_1}(s)]_{w(d_{\pi_1/\pi_2})+1} \qquad (1\text{-}9)^*$$

という（1-8）に類似の式が等号に得られる．（$\bar{b}'_{\pi_2}$ についても）．

Cor. $\pi_1 \supset \pi_2 \supset \pi_3$

1. $t : \pi_1 \to \pi_1$ injective
2. d_{π_1/π_3} が存在する（$\Leftrightarrow$ d_{π_1/π_2} かつ d_{π_2/π_3} が存在する）
3. b_{π_1} or b_{π_2} or b_{π_3} が存在する．

$\Rightarrow$ ① $\deg \bar{b}_{\pi_1} = \deg \bar{b}_{\pi_2} = \deg \bar{b}_{\pi_3}$

$(= \deg \bar{b}'_{\pi_1} = \deg \bar{b}'_{\pi_2} = \deg \bar{b}'_{\pi_3})$

② $\bar{b}_{\pi_j}$ … $(s+\alpha+\lambda_1^{(j)})$ … $(s+\alpha+\lambda_h^{(j)})$ $j=1,2,3$ $\lambda_k^{(j)} \leq \lambda_{k+1}^{(j)}$

が mod $\mathbb{Z}$ deg で α に対応する因子とすれば，

$$\lambda_k^{(1)} \leq \lambda_k^{(2)} \leq \lambda_k^{(3)}. \qquad (\bar{b}' \text{についても同様})$$

③ $\bar{b}_{\pi_1} = \bar{b}_{\pi_3} \Rightarrow \bar{b}_{\pi_2} = \bar{b}_{\pi_1} = \bar{b}_{\pi_3}$，　$c_{\pi_1} \mid c_{\pi_2} \mid c_{\pi_3}$

$\bar{b}'_{\pi_1} = \bar{b}'_{\pi_3} \Rightarrow \bar{b}'_{\pi_2} = \bar{b}'_{\pi_1} = \bar{b}'_{\pi_3}$，　$c_{\pi_3} \mid c_{\pi_2} \mid c_{\pi_1}$

* 又，$\exists m$，$b_{\pi_2}(s) \mid [\bar{b}_{\pi_1}(s)]_m$ も等号．

Remark　Thm 2 の②に，さらに補足説明を加える．

$w(b_\pi)=1$ のとき，$\nu_0=0$ にとれること，(1-4)，(1-5) より　$c_\pi=1$，$b_\pi=\bar{b}_\pi$ がわかる。即ち

$$w(b_\pi)=1 \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \bar{b}_\pi=\bar{b}'_\pi=b_\pi, \quad c_\pi=1 \\ b_{\pi,\nu}(x)=[b_\pi(x)]_\nu \end{array} \right)$$

尚，証明の方法から，$\underline{w(c_\pi)\leq w(b_\pi)-1}$ が知られていることを注意しておく．これと，(1-2) の

$$\bar{b}_\pi(s)=\frac{c_\pi(s)}{c_\pi(s+1)}\bar{b}'_\pi(s) \qquad \text{により，}$$

$\bar{b}_\pi=0$ と $\bar{b}'_\pi=0$ の根の mod $\mathbb{Z}$ groups の個数，mod $\mathbb{Z}$ groups の代表元 (mod $\mathbb{Z}$) の集合，各 group の元数が一致し，代表元 α の group の対応する因子が

$$\bar{b}_\pi \cdots (s+\alpha+i_1)(s+\alpha+i_2)\cdots(s+\alpha+i_h) \qquad i_k\leq i_{k+1}$$

$$\bar{b}'_\pi \cdots (s+\alpha+i'_1)(s+\alpha+i'_2)\cdots(s+\alpha+i'_h) \qquad i'_k\leq i'_{k+1}$$

であるとすれば，$\underline{i'_k-w(b_\pi)+1\leq i_k\leq i'_k}$ であることがわかる。c_π は，(1-2) の型で $\bar{b}$ と $\bar{b}'$ をつなぐ唯1の多項式であることに注意せよ．実際，そのようなものが2つあれば，比は周期1の有理関数となり，定数である。(1-7) の $\tilde{c}$，$\tilde{\bar{c}}$ についても同様．

§2. b函数論の基本定理

$\mathcal{L}$ が holonomic $\mathcal{D}[t,s]$-Module であれば，$\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{L})$* は有限次元であることが知られている[ ]ので，$d_{\mathcal{L}}(s)$ は存在する．従って，§1 において，例えば「$d_{\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_2}(s)$ が存在する」とした所は，「$\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_2$ が holonomic である」と書き換えて成立する。

又，p.4 の $\tilde{\mathfrak{N}}$ について，次の命題が成立する。

Thm 4　$\mathcal{D}[t,s]$ Modules の exact sequence

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}' \to 0$$

において　1. $t : \mathfrak{N}' \to \mathfrak{N}'$ injective

2. $\mathcal{L}$: holonomic

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{N}' \cong \tilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}/\mathrm{Ker}\, t^{w(dz)} .$$

∵) $\tilde{\mathfrak{N}}$ は，t が injective となる universal な $\mathfrak{N}$ の quotient であるから，条件 1 より $\tilde{\mathfrak{N}} \xrightarrow{\exists} \mathfrak{N}' \to 0$ 即ち

$0 \to \bigcup \mathrm{Ker}\, t^{\nu} \to \mathcal{L}$．一方，$\mathcal{L}$: holonomic より，Thm 1 によれば $\mathcal{L} \subset \mathrm{Ker}\, t^{w(dz)}$．従って，$\mathrm{Ker}\, t^{\nu} = \mathrm{Ker}\, t^{w(dz)}$ $\nu \geq w(dz)$ かつ $\mathfrak{N}' \cong \tilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}/\mathrm{Ker}\, t^{w(dz)}$ ∎

Thm 5** $\mathfrak{N}$: next holonomic $\mathcal{D}[t,s]$-Module
$t : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ injective

$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{N} \text{ は purely } (n-1) \text{ dimensional}$$

* の各 stalk.　　** 柏原によりこの定理 ~~a state~~ は初めて指摘された．

$\mathcal{N}$ の低次元性が $\widehat{SS}(\mathcal{N})$ の低余次元性に反映すること，

$\mathcal{E}xt$ の exact sequence を考えること，により

Cor. 1) $\widehat{SS}(\mathcal{N})$ は purely $(n-1)$ codimensional

2) $\mathcal{N}$ の holonomic submodule は 0 に限る．

Proof of Thm 5) $\mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D})=0$ のみ示せばよい．

$0 \to \mathcal{N} \xrightarrow{t} \mathcal{N} \to \mathcal{M} \to 0$ とおくと，

$$\cdots \leftarrow \mathcal{E}xt^{n+1}(\mathcal{M},\mathcal{D}) \leftarrow \mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D}) \xleftarrow{t} \mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D}) \leftarrow \cdots$$

一般に $\operatorname{codim} \widehat{SS}(\mathcal{E}xt^i(\cdot,\mathcal{D})) \geq i$ であり，$\mathcal{E}xt^{n+1}(\mathcal{M},\mathcal{D})=0$，

$\mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D})$ は holonomic.

$$0 \leftarrow \mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D}) \xleftarrow{t} \mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D})$$

より Thm 1 (脚注*をみよ) より $\mathcal{E}xt^n(\mathcal{N},\mathcal{D})=0$ ∎.

Thm 6. (柏原)* $\mathcal{M}$: coherent left (right) $\mathcal{D}_X^f$-Module

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array}$$

1) f : projective かつ proper. $\left(\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & Y \times \exists \mathbb{P}^N \\ \downarrow & \swarrow & \\ Y & & \end{array}\right)$

2) $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}_0$ a) $\mathcal{M}_0$: coherent $\mathcal{O}_X$ Module

b) $\mathcal{M} = \mathcal{D}^f \mathcal{M}_0$ $(= \mathcal{M}_0 \mathcal{D}^f)$

$\Rightarrow$ 1) $R^i f_*(\mathcal{D}^f_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X^f}{\otimes}} \mathcal{M}) = \mathcal{N}^i$ は coherent left $\mathcal{D}_Y^f$ Module.

$(R^i f_*(\mathcal{M} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{D}^f_{X\to Y}) = \mathcal{N}^i)$ (right)

2) $\widehat{SS}(\mathcal{N}^i) \subset \rho\varpi^{-1}(\widehat{SS}(\mathcal{M}))$

* the proof will be published elsewhere.

ここに ρ, ϖ は

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y T^*Y & \xrightarrow{\varpi} & T^*X \\ \downarrow \rho & & \\ T^*Y & & \end{array}$$

Thm 7. (b 函数 拡張の基本定理) (柏原)

$f(x)$: holomorphic function $\mathcal{M} = \mathcal{D}(s) f^s$ $\left(\overset{\text{or}}{=} f^s dx\, \mathcal{D}[s]\right)$

$\Rightarrow$ 1) $\widehat{SS}(\mathcal{M}) = W \equiv \{(x, s\,\mathrm{grad} f);\ f(x) \neq 0,\ s \in \mathbb{C}\}^{\text{closure}} \subset T^*X$

2) $b_{\mathcal{M}}(s)$は存在し, $b_{\mathcal{M}}(s) = 0$ の根は, stlictly negative rational number.

∵) 以下の証明では, 後の実例をみても, 都合のよいことがわかるように, $\mathcal{M} = f^s dx\, \mathcal{D}[s]$ ととる.

$$\begin{array}{ccc} X' - Y' & \hookrightarrow & X' \\ \wr\wr & & \downarrow \pi \\ X - Y & \hookrightarrow & X \end{array}$$

$f' = f \circ \pi = x_1'^{m_1} \cdots x_n'^{m_n}$ $\quad Y = \{f = 0\}$, $Y' = \pi^{-1}(Y)$

と広中の resolution theorem よりできる.

さらに, $\pi^*(dx) = \eta(x')\, dx'$ $\quad \eta(x') = (\text{invertible})\, x_1'^{\varepsilon_1} \cdots x_n'^{\varepsilon_n}$ と~~なっている~~.

なっている。(きちろく $X' - Y'$ では $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 0$)

$f'^s dx'\, \mathcal{D}_{X'}[s]$ は明らかに next maximal coherent $\mathcal{D}_{X'}$ Moduleであり, $\widehat{SS}(f'^s dx'\, \mathcal{D}_{X'}[s]) = W' = \{(x', \mathrm{grad}\,\log f');\ \cdots\}^{\text{closure}}$.

$\mathcal{M}' = f'^s \pi^*(dx)\, \mathcal{D}_{X'}[s]$ とおく. $\eta(x')$ の形より,

$\exists l$, $f'^s dx'\, \mathcal{D}_{X'}[s] \supset \mathcal{M}' \supset f'^{s+l} dx'\, \mathcal{D}_{X'}[s]$ であるから,

$\mathcal{M}'$はやはり next maximal coherent $\mathcal{D}_{X'}$ Module であり,

$$\widehat{SS}(\mathcal{M}') = W'.$$

$\int \mathcal{M}' = R^0\pi_*(\mathcal{M}' \overset{L}{\otimes} \mathcal{D}_{X'\to X})$ と記す.

$\hat{SS}(\int \mathcal{M}') \subset \rho\varpi^{-1}(W') = \rho\varpi^{-1}(W' - T^*X' \times_Y Y') \cup \rho\varpi^{-1}(W' \cap f^{-1}(0))$

第一項は, 同型な部分であり $W - f^{-1}(0)$ にすぎない.

第二項は, ~~Lagrangian~~ holonomic set を上げてよこしたもので isotropic であり, 大きくとまれる Lagrangian Λ に入る。

$\therefore \quad \hat{SS}(\int \mathcal{M}') \subset W \cup \Lambda$

$u \in \int \mathcal{M}'$ を, $f'^s \pi^*(dx) \otimes |_{X'\to X}$ の class とする.

(即ち 大略 $u = (\int \delta(x - \pi(x'))\, f'^s \eta(x')\, dx')\, dx$.)

今, $P(s, x, D_x)u = 0$ とすれば, Y外では $P(s, x, D_x) f^s = 0$

従って X 全体で $P(s, x, D_x) f^s = 0$.** 即ち,

$\bullet$ surjective map $\mathcal{U}\mathcal{D}_X[0] \to \mathcal{M} \to 0$ が存在する。

一方, この map は Y外では同型故, Kernel は holonomic.*

従って, $\mathcal{M}$ では $t: P(s) f^s \to P(s+1) f^{s+1}$ が injective である

ことより Thm 4 を用いて $\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{U}\mathcal{D}_X[0]}$.

~~例~~ 依 $\therefore \quad \widetilde{\int \mathcal{M}'} \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow 0$.

$\therefore \quad \hat{SS}(\mathcal{M}) \subset \hat{SS}(\widetilde{\int \mathcal{M}'}) \subset \hat{SS}(\int \mathcal{M}') \subset W \cup \Lambda$

再び t の injectivity と Thm 5 の(cor 4)を用いて $\underline{\hat{SS}(\mathcal{M}) = W}$.

さて, $b_{\mathcal{M}'}(s)\mathcal{M}' \subset t\mathcal{M}'$ 即ち diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{M}' \arrow[r, "t"] & \mathcal{M}' \\ & & \mathcal{M}' \arrow[u, "b_{\mathcal{M}'}(s)"'] \arrow[ul, "\exists G"] \end{tikzcd}$$

に Functor $\int$ を作用させて

$$\begin{tikzcd} \int \mathcal{M}' \arrow[r, "t"] & \int \mathcal{M}' \\ & \int \mathcal{M}' \arrow[u, "b_{\mathcal{M}'}(s)"'] \arrow[ul, "\exists G"] \end{tikzcd}$$

$\therefore \quad b_{\int \mathcal{M}'}(s) \mid b_{\mathcal{M}'}(s)$.

* $\hat{SS}(\mathcal{U}\mathcal{D}_X[0]) \subset W \cup \Lambda$ かつ $W \cap \{f=0\}$ が holonomic set であることより.

** ここで, P の作用は右にかくべきであった. 3か所の等式は, そのように解釈されたい.

又，$\widetilde{\int \mathfrak{N}'} \leftarrow \mathfrak{N} \leftarrow 0$ において，この2つのModulesは
Y外で同型故 Cokernelはholonomic*. 従って，$m = w(d\widetilde{\int \mathfrak{N}'}/\mathfrak{N})$
とおくと，Thm 3の後の式(1-9)により，

$$b_{\mathfrak{N}}(s) \mid [b_{\widetilde{\int \mathfrak{N}}}(s)]_{m+1}$$

又，$b_{\widetilde{\int \mathfrak{N}'}}(s) \mid b_{\int \mathfrak{N}'}(s)$ は明らか故，

$$b_{\mathfrak{N}}(s) \mid [b_{\int \mathfrak{N}'}(s)]_{m+1} \mid [b_{\mathfrak{N}'}(s)]_{m+1} .$$

$b_{\mathfrak{N}'}(s)=0$ の根は，strictly negative rational numberであるから，定理の2)を得た ∎

Remark. 1 もし $\widetilde{\int \mathfrak{N}'} \subseteq \mathfrak{N}$ であれば，$m=0$ 故
$b_{\mathfrak{N}}(s) \mid b_{\mathfrak{N}'}(s)$. しかるに実例でみるように，一般にこの式は成立しない。従って，$\widetilde{\int \mathfrak{N}'}$ は $\mathfrak{N}$ にかなり近いものではあるが，一般には異なる。各々，純次元的であって，$0 \to \mathcal{E}xt^{n-1}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\int \mathfrak{N}'}, \mathcal{D}) \to \mathcal{E}xt^{n-1}_{\mathcal{D}}(\mathfrak{N}, \mathcal{D}) \to \mathcal{E}xt^{n}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\int \mathfrak{N}'}/\mathfrak{N}, \mathcal{D}) \to 0$ という，exact sequenceがある。

Remark. 2. Thm 7は，$b_{\mathfrak{N}}$ の存在のみでなく，$b_{\mathfrak{N}}(s)=0$ の根の分母となりうる数が，resolutionからわかることをも示している事に注意せよ。

→ exact sequence $0 \to \mathfrak{N} \to \widetilde{\int \mathfrak{N}'} \to \widetilde{\int \mathfrak{N}'}/\mathfrak{N} \to 0$ は，$\widetilde{\int \mathfrak{N}'}$ がholonomic submoduleをもたないことから，splitしているわけでもない。 ~~Ext(∫N'~~

* 前頁注*を参照

$\mathcal{M} = \mathcal{D}[s]f^s = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s]$ とすると,

$\mathcal{M}/t\mathcal{M} = \mathcal{M}/t\mathcal{M} = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s] + \mathcal{D}[s]f$. 従って,

Cor. $\mathcal{M}$ は holonomic system であり,

$\hat{SS}(\mathcal{M}) = W_0 = W \cap \{f=0\}$

一般に, $b_{\mathcal{D}[s]f^s}(s)$ を $b_f(s)$ と記す. $x \in X$ の近傍で考えていることを明記するときは, $b_{f,x}(s)$ とも記す. 又,

K compact $\subset X$ に対し, $b_{f,K}(s) = \underset{x \in K}{\mathrm{l.c.m}}\, b_{f,x}(s)$.

Thm 7 の証明と同様に, 次の定理を得る. (Thm 7 は特に用いる).

Thm 8 $f : X \to \mathbb{C}$ holomorphic.

$\pi : X' \to X$ projective, proper s.t.

$X' - \pi^{-1}(\{f=0\}) \simeq X - \{f=0\}$.

$\Rightarrow \exists N, \quad b_{f,x}(s) \mid [b_{f',\pi^{-1}(x)}(s)]_N \quad f' = f \circ \pi$.

☆ $\mathcal{J}_0 = \{P \in \mathcal{D} \mid \mathcal{D}f^s = 0\}$ とすると, $W = V(\mathcal{J}_0)$ がわかる.

∵) $\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}f^s + \cdots + \mathcal{D}s^{l-1}f^s$.

例. $f = x^r + y^r$ $\left(\begin{array}{l} x = x' \\ y = x'y' \end{array}\right.$ で blow up.

$f \circ \pi = (x')^r (1 + (y')^r)$ $dx \wedge dy = x' dx' \wedge dy'$

$x' = 0$ $y' = \omega_1$ の nbd で考えることにして, $(1+(y')^r) = \prod (y' - \omega_j)$

$$\pi' = ((x')^r (\omega_1 - y') \varphi(y'))^s x' dx' \wedge dy'$$

$$b_{\pi'}(s) = \overline{b}_{\pi'}(s) = (s+1)(s+\tfrac{2}{r}) \cdots (s+\tfrac{r+1}{r})$$

他の点での b はこれの約数になっている. 一方,

$$b_f(s) = (s+1)(s+\tfrac{2}{r}) \cdots \cdots (s+\tfrac{2r-2}{r})$$

$$\overline{b}_f(s) = (s+1)(s+\tfrac{2}{r}) \cdots (s+\tfrac{r+1}{r})$$

$$b_f \mid [b_{\pi'}]_2 \quad , \quad \underbrace{\overline{b}_f \mid \overline{b}_{\pi'}}_{\text{これは一般的事情でなりたつかと予想する.}}$$

例. $f = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ $x_n = t$ $x_i = x_i' t$ $i = 1, \cdots, n-1$

$f \circ \pi = t^2 (x_1'^2 + \cdots + x_{n-1}'^2 + 1)$ $dx = t^{n-1} dx' \wedge dt$

$$b_{\pi'} = (s+1)(s+\tfrac{n}{2})(s+\tfrac{n+1}{2})$$

$$b_f = (s+1)(s+\tfrac{n}{2})$$

$$b_f(s) \mid b_{\pi'}(s)$$

$b_{\mathcal{D}_{X'}f's} = (s+1)(s+1)(s+\frac{1}{2})$ であり, form により

よく調整されていることがわかる.

§3. $\mathcal{D}f^{\alpha}$ α: generic について.

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $\mathcal{M}_{\alpha} = \mathcal{M}/(s-\alpha)\mathcal{M}$ とおく.

$\mathcal{M}_{\alpha} = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}[s] + (s-\alpha)\mathcal{D}[s] = \mathcal{D}/\mathcal{J}[s]|_{s=\alpha}$ である. surjective map

$$\mathcal{M}_{\alpha} \to \mathcal{D}f^{\alpha} \to 0 \qquad (3\text{-}1)$$

が存在する. α が ($b_{\mathcal{M}}(s)=0$ の根) + (自然数) でないとき, (3-1) が同型であることが, 柏原により注意されたが, ここでは, それを精密化した必要十分条件を示す.

$b_{\mathcal{M}}(s)=0$ の根の集合を $\overline{R}$, $C_{\mathcal{M}}(s)=0$ のそれを C とする.

(1-4) より $(\overline{R}+\mathbb{N}) \cap C = \phi$ に注意せよ.

Thm 9 $\quad \alpha \notin (\overline{R}+\mathbb{N}) \cup C$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}f^{\alpha}$$

Proof) $\Rightarrow$ $\quad (Pf^{\alpha}=0 \Rightarrow Pf^{s} \in (s-\alpha)\mathcal{D}(s)f^{s})$ を示せばよい。

$\mathrm{ord}\, P = m\ (\geq 1)$ とすると, $Pf^{s} = (s-\alpha)a(s,x)f^{s-m}$. 従って,

$\mathcal{D}[s]f^{s} \cap (s-\alpha)\mathcal{D}(s)f^{s-m} \subset (s-\alpha)\mathcal{D}[s]f^{s}$ を示せばよい.

s を $s+m$ にして, $t^{m}\mathcal{M} \cap (s+m-\alpha)\mathcal{M} \subset (s+m-\alpha)t^{m}\mathcal{M}$.

条件により, $s+m-\alpha$ は $b_{\mathcal{M},m}(s)$ の因子でない. 従って,

$\mathcal{M}/t^{m}\mathcal{M} \xrightarrow{s+m-\alpha} \mathcal{M}/t^{m}\mathcal{M}$ *. そこで $t^{m}\mathcal{M} \cap (s+m-\alpha)\mathcal{M} \ni v = (s+m-\alpha)u$

とせよ。上の同型で, 左の u を右へうつして, $v \in t^{m}\mathcal{M}$ より 0.

よって左にもどって $u \in t^{m}\mathcal{M}$ $\quad \therefore v \in (s+m-\alpha)t^{m}\mathcal{M}$.

* injective であることしかつかわないが, 実際 $(s+m-\alpha)^{-1}$ は s の多項式で表示される.

$\Leftarrow$ $\alpha \in (\bar{R}+\mathbb{N}) \sqcup C$ とせよ. 十分大なる ν をとれば,

$b_{\pi,\nu}(\alpha-\nu)=0$. $b_{\pi,\nu}(s)$ の定義より, $\exists P_\nu(s) \in \mathcal{D}[s]$

s.t. $P_\nu(s+\nu) f^{s+\nu} = b_{\pi,\nu}(s) f^s$. $\therefore P_\nu(\alpha) f^\alpha = 0$.

今 $\mathcal{M}_\alpha \simeq \mathcal{D} f^\alpha$ とすれば, $\{P \in \mathcal{D} \mid P f^\alpha = 0\} \subset \mathcal{J}[s] + (s-\alpha)\mathcal{D}[s]$

故, $P_\nu(\alpha) = Q(s) + (s-\alpha) R(s)$, $Q(s) \in \mathcal{J}[s]$.

(実際, $R(s) = -\dfrac{Q(s)-Q(\alpha)}{s-\alpha}$, $Q(\alpha) = P_\nu(\alpha)$ となる $Q(s)$, とできる)

そこで, $R_\nu(s) = \dfrac{P_\nu(s)-P_\nu(\alpha)}{s-\alpha} + R(s)$ とおくと,

$$R_\nu(s+\nu) f^{s+\nu} = \frac{b_{\pi,\nu}(s)}{s+\nu-\alpha} f^s.$$

これは $b_{\pi,\nu}(s)$ の最小性に反する.

さて, $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow 0$ と, Thm 7 の 1), さらに,

$f_i s - f D_i \in \mathcal{J}[s]$ より, W の generic point は $\widehat{SS}(\mathcal{M}_\alpha)$ に

属さず, $f=0$ と $\xi_i=0$ のみが残る故,

$$\widehat{SS}(\mathcal{M}_\alpha) \subset W_0 \sqcup \{\xi=0\}.$$

これは, <u>一致する</u>と予想されるが, 不明である。これは,

quasi-homogeneous な f について成立すれば, 一般の f について示すことができる. 又, それより Cor. として,

$\alpha \notin (\bar{R}+\mathbb{N}) \sqcup C \Rightarrow \widehat{SS}(\mathcal{D} f^\alpha) = W_0 \sqcup \{\xi=0\}$

が従う. 詳しくは [ ] を参照のこと.

$$\alpha \in (\bar{R}+\mathbb{N}) \sqcup C \Rightarrow \widehat{SS}(\mathcal{B}f^{\alpha}) \subsetneq W_0 \sqcup \{\xi=0\} \quad (?)$$

については，事情は微妙である．極端な場合を考えると，

$\bar{R}+\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_0$ （$\because$ $(s+1) \mid b_{f,x}(s)$ ~~ゼロ~~，をみれば，

if $\alpha \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \widehat{SS}(\mathcal{B}f^{\alpha}) = \{\xi=0\}$ となり，たしかにちがってくる．又，$\mathcal{B}f^{\alpha}$ が simple の場合は，（$C=\phi$ が知られており）$\alpha \in \bar{R}+\mathbb{N} \Rightarrow \mathcal{B}f^{\alpha}$ は W_0 のある Lagrangeans 上に support がなくなることが，柏原による一般論からわかっている。(?)は，多少修正の要ありと思われる．実際，

（例） $f = x^3+y^3+z^3$

$$\bar{b}_f = (s+1)\cdot(s+\tfrac{3}{3})(s+\tfrac{4}{3})(s+\tfrac{5}{3}) \qquad c_f = (s+1)$$

$$W_0 = \{f=0 \text{ の conormal}\} \sqcup T^*_{\{0\}}\mathbb{C}^3.$$

$C \ni -1$ であるが，f^s は $s=-1$ において 2 位の pole をもち，$f^s = \frac{c_{-2}}{(s+1)^2} + \frac{c_{-1}}{(s+1)} + \cdots$ と展開される．そして，この c_{-1} は，$\delta(f)$ と $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ の一次結合になると思われる。即ち $\widehat{SS}(\mathcal{B}f^{-1}) = W_0 \sqcup \{\xi=0\}$ とも思われ，一般に C に属する α については $\widehat{SS}(\mathcal{B}f^{\alpha})$ はへらないと予想される。（上の例が不都合なら，後にもきくまる。）

即ち，予想として，

$$\alpha \in \bar{R}+\mathbb{N} \Rightarrow \widehat{SS}(\mathcal{B}f^{\alpha}) \subsetneq W_0 \sqcup \{\xi=0\}.$$

f^sの解析接続におけるΓ函数の役割は，当然のこととされ，詳しく言及されることが少ないので，ここにしるしておく．

$\overline{b}_n(s)=\prod(s-\beta)$ とし，　$\overline{\gamma}_n(s)=\prod\Gamma(s-\beta)$　とおく．

このとき，　$P_\nu(s+\nu)f^{s+\nu}=b_{n,\nu}(s)f^s$　を書きなおし，

$$\frac{1}{C_n(s+\nu)}\left(P_\nu(s+\nu)\frac{1}{\overline{\gamma}_n(s+\nu)}f^{s+\nu}\right)=\frac{1}{\overline{\gamma}_n(s)}f^s$$

$\mathrm{Re}\,s>0$ では f^s は適当に定理されるので，$\frac{1}{\overline{\gamma}_n(s)}f^s$ は全平面に解析接続される．~~すなわち~~，即ち，

f^s は $s\in\overline{\mathbb{R}}-\mathbb{N}_0$ にのみ pole をもつ．

pole の位置のみ見る場合，集合$\mathbb{C}$があらわれないのは(1-4)より $\mathbb{C}\subset\overline{\mathbb{R}}-\mathbb{N}_0$ であることより当然だが，pole の位数をも考える場合，それが $\overline{b}_n(s)$ の支配下にあることは重要である．$b_n(s)$ のみ見ていたのでは，f^sの pole を記述するには不正確なのである。

具体的に f^sを hyperfunction として定理するにあたって，pole の状況はもちろん色々ことなりうる．

$$f=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$$

の場合，　f_+^s，f_-^s，$(f+i0)^s$，$(f-i0)^s$ などが定義され，pole 位，residue は 色々ことなる．[ ]．

以上を総合すれば，$\mathcal{D}f^{\alpha}$ は

$$\alpha \in \bar{R} + \mathbb{Z}$$

の時にのみ，興味ある事態がおこっている．この事情については，$\mathcal{D}f^{\alpha}$ が simple な場合，ほぼ完全に調べられている[ ]。Simple でない場合，C における事情は複雑であろう。

この重要な $\bar{b}_{\mathcal{M}}(s)$ も，実は"最小多項式"としてとらえることができる[ ]。その前に，一般的注意をしておくと，$\exists N$, $\mathcal{D}[s]f^{s-N} \supset \mathcal{M}_1 \supset \mathcal{D}[s]f^{s+N}$ となっている $\mathcal{D}[t,s]$-Module $\mathcal{M}_1$ に対しては，Thm 2 ① が成立し，$b_{\mathcal{M}_1}(s) \mid b_{\mathcal{M}_1,2N+1}(s-N)$ である．同様な $\mathcal{M}_2$ $(\subset \mathcal{M}_1)$ があれば，Thm 3 の条件 1.2.3 はみたされ，(1-6)(1-7)(1-8) が成立する。

又，$\widehat{SS}(\mathcal{M}_1) = W$，$\widehat{SS}(\mathcal{M}_1/t\mathcal{M}_1) \subset W_0 \subset \widehat{SS}(\mathcal{M}_1/t^{2N+1}\mathcal{M}_1)$．

今 $\mathcal{M}_{red} = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{D}[s][\bar{b}_{\mathcal{M}}(s-\nu)]_{\nu} f^{s-\nu}$ とおくと，これは有限項で安定することがわかり，上述の $\mathcal{M}_1$ の条件をみたす．そして，

$$b_{\mathcal{M}_{red}}(s) = \bar{b}_{\mathcal{M}}(s), \quad c_{\mathcal{M}_{red}}(s) = 1$$

となる．詳細は[ ]を参照のこと．

（尚，これに関連して，$\mathcal{M}^{red} = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} [t^{\nu}\mathcal{M}_{red} : [\bar{b}_{\mathcal{M}}(s)]_{\nu}] \bigcup_{\ell \geq 0} \mathcal{D}[s]f^{s-\ell}$ が coherent かどうか，まだ未解決である．）