数理解析研究所講究録
248巻 1975年 67-82

Ultradistribution の或る特徴づけについて

京大 数理研　西和田 公正

序　正則函数の境界値を ultradistribution として把えようというのが本稿のテーマである。この種の研究としては小松〔3〕がある。次の2つの問題について考える。

1．（singularity の order の問題）
　　正則函数の境界への増大度と、その境界値が属する ultradistribution の class との関係
2．（wave front の問題）
　　境界値のとられる方向と ultradistribution の Fourier 像が急減少する方向との関係

1．については Martineau〔4〕の結果の一部が ultradistribution の場合にも成り立つことを調べる。2．に於ては Hörmander〔2〕によって導入された analytic wave front set を、正則函数の境界値の言葉によって言換える。

§1. Test functions と Ultradistributions

notations の煩雑さを避ける為に，ここでは Roumieu type の Gevrey class のみを考える．即ち

<u>定義1</u> (Test functions) $1 \leq s$ とする．$R^n \supset \Omega$: open，$\Omega \supset K$: regular compact，$h > 0$ に対して

$$\mathcal{E}_{s,h}(K) = \{ \varphi \in C^\infty(K) ; \exists C > 0, \sup_K |D^\alpha \varphi| \leqq C h^{|\alpha|} (\alpha!)^s \}$$

$$\mathcal{D}_{s,h}(K) = \mathcal{E}_{s,h}(K) \cap C_0^\infty(K)$$

とおく．両方とも Banach 空間である。更に

$$\mathcal{E}_s(K) = \varinjlim_{h \to \infty} \mathcal{E}_{s,h}(K)$$

$$\mathcal{E}_s(\Omega) = \varprojlim_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{E}_s(K)$$

$$\mathcal{D}_s(K) = \varinjlim_{h \to \infty} \mathcal{D}_{s,h}(K)$$

$$\mathcal{D}_s(\Omega) = \varinjlim_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{D}_s(K) .$$

まとめると

$$\mathcal{E}_s(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) ; \forall K, \exists C, \exists h > 0, \sup_K |D^\alpha \varphi| \leqq C h^{|\alpha|} (\alpha!)^s \}$$

$$\mathcal{D}_s(\Omega) = \{ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) ; \exists C, \exists h > 0, \sup |D^\alpha \varphi| \leqq C h^{|\alpha|} (\alpha!)^s \}$$

<u>定義2</u>　Ultradistribution of gevrey class of order s $(s>1)$ を $\mathcal{D}'_s(\Omega)$ で定義する．$\mathcal{E}'_s(\Omega)$ ($\subset \mathcal{D}'_s(\Omega)$) は compact support を持つ ultradistribution の全体である．

定義1．2 の諸空間の topology については 小松［3］に詳しい。

Ultradistribution と正則函数の境界値との関連を調べるのだから．Test functions も $\mathbb{C}^n$ 上の函数の制限と考えるのが自然であるように思われる．

<u>定理1</u>　$R^n \supset \Omega$: open ，V : Ω の complex nbd．このとき $\varphi \in C^1(\Omega)$ に対して次の (a) と (b) は同値である。

(a)　$\varphi \in \mathcal{E}_s(\Omega)$

(b)　或る $\psi \in C^1(V)$ が存在して $\psi|_\Omega = \varphi$，更に次の評価をみたす．：　$\forall K \subset\subset \Omega$ に対して $\exists c, \exists h$

$$(1.1) \qquad \sup_K |\bar\partial \psi(x+iy)| \le c \exp(-|hy|^{\frac{1}{1-s}}) \qquad \left(\begin{smallmatrix} s>1 \\ \text{の時} \end{smallmatrix}\right)$$

$$\left(\quad \bar\partial \psi(x+iy) = 0 \qquad \text{near } K \qquad s=1 \text{ の時} \right)$$

<u>証明</u>　(a) ⇒ (b)，$s>1$ の時．$\varphi \in \mathcal{D}_s(\Omega)$ と仮定

してよい．従がって

$$\exists h>0 \quad , \sup |D^\alpha \varphi| \le C h^{|\alpha|} (\alpha!)^s$$

形式的に

$$\psi(x+iy) = \sum \varphi^{(\alpha)}(x)(iy)^\alpha \chi(b_{|\alpha|} y)/\alpha!$$

とおく。ここで $\chi \in C_0^\infty(R^n)$, $=1$ if $|y| \le \frac{1}{2}$, $=0$ if $|y| \ge 1$ $\quad b_{|\alpha|} = h' |\alpha|^{(s-1)}$ $\quad$ もし $h < e^{s-1} h'$ ならば $\psi \in C^\infty(V)$ がわかる．この時

$$(1.2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar z_j}(x+iy) = \sum \varphi^{(\alpha+1_j)}(x)(iy)^\alpha \left(\chi(b_{|\alpha|} y) - \chi(b_{|\alpha|+1} y)\right)/2\alpha! + \sum \varphi^{(\alpha)}(x)(iy)^\alpha b_{|\alpha|} \chi_j'(b_{|\alpha|} y)/2\alpha!$$

$$\frac{1}{2 b_{|\alpha|+1}} \le |y| \le \frac{1}{b_{|\alpha|}} \quad \text{on } \operatorname{supp}\left(\chi(b_{|\alpha|} y) - \chi(b_{|\alpha|+1} y)\right) \quad \text{or} \quad \operatorname{supp} \chi_j'(b_{|\alpha|} y)$$

に注意すれば (1.2) の summation は

$$(2h'|y|)^{\frac{1}{1-s}} - 1 \le |\alpha| \le (h'|y|)^{\frac{1}{1-s}}$$

の範囲でとればよいことがわかる．

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial \bar z_j}\right| \le 2^{n-1} \sup_{(2h'|y|)^{\frac{1}{1-s}} - 1 \le |\alpha| \le (h'|y|)^{\frac{1}{1-s}}} \left\{ C h^{|\alpha|+1} (|\alpha|+1)^s (\alpha!)^{s-1} |y|^{|\alpha|} \right\}$$

$$\leq C\exp\left(-|h'y|^{\frac{1}{1-s}}\right) \quad \text{if} \quad h < h' e^{s-1}$$

(b) ⇒ (a) この場合も $s>1$ とし $\psi \in C_0^1(V)$ と仮定してかまわない。(a) を証明する為に φ を Cauchy kernel を使って表現した場合どうしても $\sup\left|\frac{\partial^j \psi}{\partial z_{i_1}\cdots\partial z_{i_j}}(x+iy)\right|$ といったものの実軸の近くでの減少度を仮定しなければならない。それを避ける為に dirac 函数の平面波展開

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int_{|\omega|=1}\frac{d\omega}{(x\cdot\omega+i0)^n}$$

を利用する。$\varphi = \psi|\Omega$ に対して

$$\varphi(x) = \int \varphi(x-x')\,\delta(x')\,dx'$$

$$= \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\iint \varphi(x-x')\frac{dx'\,d\omega}{(x'\cdot\omega+i0)^n}$$

$$= \frac{2i(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\iiint_{t>0}\frac{\langle\bar\partial\psi(x-x'+it\omega),\omega\rangle}{\langle x'+it\omega,\omega\rangle^n}\,dt\,dx'\,d\omega$$

$$= \frac{2i(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\iiint_{t>0}\frac{\langle\bar\partial\psi(x-x'+it\omega),t\omega\rangle}{\langle x'+it\omega,t\omega\rangle^n}\,t^{n-1}\,dt\,d\omega\,dx'$$

$$= \frac{2i(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\iint\frac{\langle\bar\partial\psi(x-x'+iy'),y'\rangle}{\langle x'+iy',y'\rangle^n}\,dy'\,dx'$$

$$= \frac{2i(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\iint\frac{\langle\bar\partial\psi(z'),\operatorname{Im} z'\rangle}{\langle x-z',\operatorname{Im} z'\rangle^n}\,dx'\,dy'$$

$$\therefore\ |D^\alpha \varphi| \le C\alpha!\ \sup\left(|\mathrm{Im}\, z|^{-n-|\alpha|}|\bar\partial \psi(z)|\right)$$
$$\le C\alpha!\ \sup\left(|y|^{-n-|\alpha|}\exp\left(-|hy|^{\frac{1}{1-s}}\right)\right)$$
$$\le C\, h'^{|\alpha|}(\alpha!)^s \qquad ,\ \exists h'.$$

以後 Ω, V は定理1の意味でとる。R^n の open convex cone Γ に対して $T(\Gamma) = R^n + i\Gamma$ とおく。

<u>定理2</u> 正則函数 $f \in \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma))$ に対して次の4条件は同値である。

任意の $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ に対して

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{y\downarrow 0\\ y\in\Gamma'}} f(x+iy)$ が $\mathcal{D}'_s$ の中で存在する。

(b) $\Gamma' \ni y$ が小さい時、x の函数族 $\{f(x+iy)\}$ は $\mathcal{D}'_s$ の中で有界.

(c) $\forall K \subset\subset \Omega$, $\forall h>0$ をとると $\exists \delta>0, \overbrace{,}^{\exists M} \exists C>0$

$$(1.3)\quad \left|\iint f(x+iy)\phi(x,y)\,dx\,dy\right| \le C \sup_{\substack{\alpha,(x,y)\\|\beta|\le M}} \left|\frac{D_x^\alpha D_y^\beta \phi(x,y)}{h^{|\alpha|}(\alpha!)^s}\right|$$

$$\text{for } \forall \phi \in \mathcal{D}_{s,h}\left((K+i\Gamma')\cap\{|y|\le\delta\}\right)$$

(d) $\forall K \subset\subset \Omega$, $\forall h>0$ をとると $\exists C>0$

$$(1.4)\qquad \sup_{x\in K}|f(x+iy)| \le C\exp\left(|hy|^{\frac{1}{1-s}}\right),\quad y\in\Gamma' : \text{small}$$

注意1　(d)⇒(a) は小松[3]によって証明された。ここでの我々の証明は[3]のものと若干異なる。hyperdifferential operator を用いない代わりに定理1を用いる。

注意2　(c)は f が境界 Ω を越えて R^{2n} の ultradistribution として（y方向には distribution）定義される可能性を示唆している。この種の関係は Martineau によって発見されたが、ここではそういう表現を表に出すことはしなかった。Martineau は更に f の distribution としての prolongement $\tilde{f}$ で $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2} \partial f \otimes \delta(y)$（$\partial f$ は f の境界値，$n=1$ の時の式）なるものが存在することを示した。我々の証明（(d)⇒(a)）はこの考えに負う所が大きい。

定義3　$f \in \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma))$ が定理2の同値条件をみたす時 f は $\mathcal{D}'_s(\Omega)$ の中に境界値 $f(x+i\Gamma 0) = \lim_{y \downarrow 0} f(x+iy)$ を持つと云う。

定理2の証明　(d)⇒(a)　$\forall \varphi \in \mathcal{D}_s(\Omega)$ に対して $\lim_{y \downarrow 0} \langle f(x+iy), \varphi(x) \rangle$ が存在することを示せばよい。定理1による φ の $\mathbb{C}^n$ への拡張を $\psi(x+iy)$ とする。(supp ψ $\subset V$ としてよい。) 任意の $u \in C^1_0(\mathbb{C})$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(z)\,dz = 2i \iint_{y>0} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(x+iy)\,dx\,dy \quad , \left(z = x+iy\right)$$

であることに注意すれば、$\theta \in \Gamma'$ を勝手に固定した時、

$$\lim_{y \downarrow 0} \langle f(x+iy), \varphi(x) \rangle$$
$$= \lim_{y \downarrow 0} 2i \iint_{t>0} f(x+iy+it\theta) \langle \bar{\partial} \psi(x+it\theta), \theta \rangle \, dx\, dt.$$

右辺は $y \in \Gamma'$ がどのような path で 0 に収束しようとも (1.1) と (1.4) によって絶対収束する積分

$$(1.5) \qquad 2i \iint_{t>0} f(x+it\theta) \langle \bar{\partial} \psi(x+it\theta), \theta \rangle \, dx\, dt$$

に収束する。

(a) ⇒ (b) は明らかである。

(b) ⇒ (c) $\{f(x+iy)\}_{\Gamma' \ni y:\, \mathrm{small}}$ は $\mathcal{D}_s'(\Omega')$ $(\Omega' \subset\subset \Omega)$ の中で有界であるから、~~同程~~ $\mathcal{D}_s(\Omega')$ の上で同程度連続である。($\mathcal{D}_s$ は tonnelé であることに注意) 従がって $\mathcal{D}_{s,h}(K)$ $({}^\forall K \subset\subset \Omega,\ {}^\forall h>0)$ 上でも同程度連続である。

$$\therefore \quad |\langle f(x+iy), \psi(x) \rangle| \le C \sup_{x,\alpha} \frac{|D_x^\alpha \psi|}{h^{|\alpha|} (\alpha!)^s}, \quad {}^\forall \psi \in \mathcal{D}_{s,h}(K)$$

C は small $y \in \Gamma'$ に independent である。

$$\therefore \quad \left| \iint f(x+iy)\, \phi(x,y)\, dx\, dy \right|$$

$$\leq C \int_{|y|\leq \delta} \sup_{x,\alpha} \frac{|D_x^\alpha \phi(x,y)|}{h^{|\alpha|}(\alpha!)^s}\, dy$$

$$\leq C' \sup_{x,y,\alpha} \frac{|D_x^\alpha \phi(x,y)|}{h^{|\alpha|}(\alpha!)^s}$$

(c) $\Rightarrow$ (a)　K', Γ'' を $K+i\Gamma' \subset\subset K'+i\Gamma'' \subset\subset \Omega+i\Gamma$ となるようにとる。或る $\varepsilon>0$ が存在し $z=x+iy \in K+i\Gamma'$ に対して $\mathrm{dist}\,(x, \partial K') > \varepsilon$, $\mathrm{dist}\,(y, \partial\Gamma'') > \varepsilon|y|$ とできる. $\psi(\tau) \in \mathcal{D}_s(\mathbb{C})$ を $\psi = 1$ if $|\tau| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\psi = 0$ if $|\tau| \geq \varepsilon$ となるようにとる. $\phi(\zeta) = \prod_1^n \psi(\zeta_j)$ は $\mathcal{D}_{s,h}(\mathbb{C}^n)$ の元である. $h>0$ は任意に大きくとれる。Cauchy の積分定理によって $z=x+iy \in K+i\Gamma'$ に対して

$$f(z) = (-\pi)^n \iint \frac{f(\zeta)}{\prod(\zeta_j - z_j)} \frac{\partial^n}{\partial\bar{\zeta}_1 \cdots \partial\bar{\zeta}_n}\left[\phi\left(\zeta - x + i\frac{\eta-y}{|y|}\right)\right] d\xi d\eta$$

$$\therefore\ |f(z)| \leq C \sup_{\substack{\alpha,\,(\xi,\eta)\\ |\beta|\leq M \\ |\zeta_j - z_j| \geq \frac{\varepsilon}{2}|y|}} \left(\frac{D_\eta^\beta D_\xi^\alpha \left[\dfrac{\frac{\partial^n}{\partial\bar{\zeta}_1 \cdots \partial\bar{\zeta}_n}\left(\phi\left(\zeta - x + i\frac{\eta-y}{|y|}\right)\right)}{\prod(\zeta_j - z_j)} \right]}{h^{|\alpha|}\, |\alpha|^{s|\alpha|}} \right)$$

$$\leq C|y|^{-2n-M} \sup_\alpha \left(1 \Big/ \left|\frac{\varepsilon y}{2}\right|^\alpha h^{|\alpha|}\, |\alpha|^{(s-1)|\alpha|} \right)$$

$$\leq C|y|^{-2n-M} \exp\left(\left(\frac{\varepsilon}{2} h|y|\right)^{\frac{1}{1-s}} \right)$$

$$\leq C_{h'} \exp\left(|h'y|^{\frac{1}{1-s}} \right)$$ （h' は任意に大きくとれる.）

§2 Analytic wave front set

Roumieu [7] により $\mathcal{E}'_s$ の元に対して Fourier 変換、Parseval's, Fourier inversion formulae, convolution の Fourier 像 etc. が $\mathcal{E}'$ の時と同じように成立つことが確認された。従がって [2] の方法によって $f \in \mathcal{D}'_s$ に対して $WF_A(f)$ が定義される。

<u>定義4</u> $f \in \mathcal{D}'_s(\Omega)$, $(x_0, \xi_0) \in T^*(\Omega) \setminus 0$,

$(x_0, \xi_0) \notin WF_A(f) \iff \exists U$: x_0 の nbd,

$\exists V$: ξ_0 の conical nbd,

$\exists \{f_N\}$: bdd seq. in $\mathcal{E}'_s(\Omega)$

s.t. $f_N = f$ in U,

$$(2.1) \qquad |\hat{f}_N(\xi)| \le C(CN/|\xi|)^N, \quad \xi \in V, \quad N = 1, 2, \cdots$$

<u>補題1</u> $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, $r > 0$, N: 自然数, $h > 0$

$\Rightarrow \exists \chi_N \in \mathcal{D}_s(\mathbb{R}^n)$ s.t. $\chi_N = 1$ in K,

$\chi_N = 0$ in $\{x;\ \mathrm{dist}(x, K) \ge r\}$,

$$(2.2) \qquad |D^{\alpha+\beta}\chi_N| \le C(C/r)^{|\alpha|}|\alpha|^{s|\alpha|}(CN/r)^{|\beta|}, \quad |\beta| \le N$$

C は s と n によって決まる。

<u>補題2</u> f, (x_0, ξ_0), U, V に対して (2.1) が正

しいとする。$U \supset K$: compact nbd of x_0, $V \supset \Gamma$: conical nbd of ξ_0 を任意にとる。$\chi_N \in C_0^\infty(U)$, $=1$ on K は (2.2) をみたすとする。この時 $\{\chi_N f\}$ は $\mathcal{E}'_s$ の中で有界で Γ の上で (2.1) をみたす。

補題1.2 の証明は [2] と全く同様に証明できる。$\{\chi_N\} \subset \mathcal{D}_s$ が (2.2) をみたせば $\{\chi_N\}$ は $\mathcal{D}_{s'}$ $(\forall s' \geq s)$, $\mathcal{D}$ の中でも有界である。ゆえに $\{\chi_N f\}$ は $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'_{s'}$ $(s' \geq s)$ の中で有界であるから次の系を得る。

<u>系1</u> $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_s$, $\mathcal{D}_{s'}$ $(1 < s' \leq s)$ に於ける analytic wave front set の概念は compatible である。

<u>定理A3</u> $\pi : T^*(\Omega) \setminus 0 \to \Omega$ とすると $\pi(WF_A(f)) =$ anal. sing. supp f である。(証明は [2] と同じ)

<u>定理A4</u> $f \in \mathcal{D}'_s(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ とする。

$\{V_\alpha\}$: finite family of open convex proper cones in R^n

$\{\Gamma_\alpha\}$: V_α の dual cones

この時次の (a) と (b) は同値である。

(a) $WF_A(f)|_{x_0} \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$

(b) $\exists \omega$: x_0 の nbd, W : ω の complex nbd

$\exists \Gamma'_\alpha \supset\supset \Gamma_\alpha$, $f_\alpha \in \mathcal{O}(W \cap T(\Gamma'_\alpha))$

s.t. $f = \sum_\alpha f_\alpha(x + i\Gamma_\alpha 0)$ in $\mathcal{D}'_s(\omega)$

<u>証明</u>　(b) ⇒ (a)　次の補題は便利である.

<u>補題3</u>　$\chi_{2N} \in \mathcal{D}_s(\Omega)$,　V : Ω の complex nbd

χ_{2N} の $\mathbb{C}^n$ への拡張　$\chi_{2N}(x+iy) \in C_0^\infty(V)$ で次の評可をみたすものが存在する。

$$(2.3)\qquad \sup_x \left| D_x^\beta \bar{\partial} \chi_{2N}(x+iy) \right| \leq C(c|y|)^N N^{|\beta|} \exp\left(-|hy|^{\frac{1}{1-s}}\right)$$

$$\text{when}\quad |\beta| \leq N$$

c, h は N に independent である.

<u>証明</u>　定理1の証明と同様に

$$\chi_{2N}(x+iy) = \sum \chi_{2N}^{(\alpha)}(x)(iy)^\alpha \chi(b_{|\alpha|} y) / \alpha!$$

とおく。χ は定理1の時と同じものであるが. $\{b_{|\alpha|}\}$ は

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_N \leq b_{N+1} \leq \cdots$$
$$b_{N+j} = h' j^{s-1}$$

とおく。ここで $b_0 = h'$ は $\chi_{2N} \in C_0^\infty(V)$ となるようにとる。次のような評可を考える.

$$|y|^{-N} \exp\left(h|y|^{\frac{1}{1-s}}\right) \left| D_x^\beta \sum_{|\alpha| \leq N} \chi_{2N}^{(\alpha+1_j)}(x)(iy)^\alpha \left(\chi(b_{|\alpha|+1} y) - \chi(b_{|\alpha|} y)\right) \right| / \alpha!$$

$$\leq \sum_\alpha \frac{C(CN)^{|\alpha|+|\beta|}}{\alpha!} \cdot \left(\frac{1}{2d_0}\right)^{N-|\alpha|} \cdot \exp\left(h(2d_0)^{\frac{1}{s-1}}\right)$$

$$\leq C^{1+N} N^{|\beta|}$$

$$|y|^{-N} \exp(\bullet (h|y|)^{\frac{1}{1-s}}) \Big| \sum_{|\alpha|>N} \chi_{2N}^{(\alpha+\beta+1_j)}(x)(iy)^\alpha (\chi(b_{|\alpha|+1}y) - \chi(b_{|\alpha|}y)) \Big| \div 2\alpha!$$

$$\leq \exp((h|y|)^{\frac{1}{1-s}}) (CN)^{|\beta|+N} \sum_{|\alpha|>N} C h^{|\alpha|-N} (|\alpha|-N)^{s(|\alpha|-N)} |y|^{|\alpha|-N}$$

$$|(\chi(b_{|\alpha|+1}y) - \chi(b_{|\alpha|}y))| \cdot |\alpha|^{-|\alpha|}$$

$|\alpha|^{|\alpha|} \geq (|\alpha|-N)^{|\alpha|-N} N^N$ に注意すれば上の式はやはり $C^{1+N} N^{|\beta|}$ で押さえ~~ら~~られる.

<u>定理4の証明</u> ((b) ⇒ (a))　　$\theta \in \Gamma$, $|\alpha| \leq N$ の時

$$\xi^\alpha \langle f(x+i\Gamma_0), \chi_{2N}(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \rangle$$

$$= 2i \iint_{t>0} D_x^\alpha \{ f(x+it\theta) \langle \bar\partial \chi_{2N}(x+it\theta), \theta \rangle \} e^{-i\langle x+it\theta, \xi\rangle} dx.$$

$\langle \xi \cdot \theta \rangle < 0$ なる ξ の conical nbd で. 上の式は (2.3) より $C(CN)^N$ で押さえられる.

(a) ⇒ (b)　　$V'_\alpha \subset\subset V_\alpha$ を

$$WF_A(f)|_{x_0} \subset \bigcup_\alpha V'_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} F^c$$

となるようにとる。

$$(2.4)\qquad g(x) \overset{\mathrm{def}}{=} (2\pi)^{-n}\int_F \hat{f}_N(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi$$

$$(2.5)\qquad = f_N(x) - (2\pi)^{-n}\int_{\bigcup_\alpha V'_\alpha} \hat{f}_N(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi .$$

(2.5) の第2項は Γ'_α (V'_α の dual cone) 方向からの正則函数の境界値の和に書ける。 $f = f_N$ (near x_0) に注意すれば

$$WF_A(g)_{|x_0} \subset \bigcup_\alpha \overline{V'_\alpha} \subset \bigcup_\alpha V_\alpha .$$

ゆえにもし g の分解が得られれば f の分解が得られることになる。一方 (2.4) より $g \in C^\infty$ である。従がって (a)⇒(b) C^∞ 函数 f について証明すればよい。しかしこの場合（更に $\mathcal{D}'$ の場合）定理5は [5] によって証明された。

定理2の notation によって $f \in \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma))$ をとる。定理4の (b)⇒(a) により $WF_A(f) \subset \Omega \times (\Gamma$の dual cone$)$ これに (a)⇒(b) を適用すると 各 $x \in \Omega$ に対して $\tilde{f}$ $\in \mathcal{O}((x$の複素近傍$) \cap T(\tilde{\Gamma}))$ $(\tilde{\Gamma} \subset \Gamma)$ が得られる。この時 $f \equiv \tilde{f}$ である。

<u>定理5</u> $f \in \mathcal{O}(V \cap T(\Gamma))$, $f(x + i\Gamma 0) = 0$ in $\mathcal{D}'_s(\Omega)$ ならば $f \equiv 0$ である。

<u>証明</u> 適当な complex hyperplane で切ればよいから

fは1変数と仮定してよい. $K \subset\subset \Omega$, dist $(K, \partial V) > \varepsilon$ とする. $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}_{s,h}(K)$ を fix する.

$$g(\zeta) = \int f(x+\zeta)\varphi(x)\,dx \qquad (\operatorname{Im}\zeta > 0)$$

$$= 2i \iint_{t>0} f(x+it+\zeta)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}(x+it)\,dt\,dx$$

($\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}$ は定理1によって構成した $\varphi(x+iy)$ に対するもの)

$D_\varepsilon = \{\zeta\ ;\ \operatorname{Im}\zeta > 0,\ |\zeta| < \varepsilon\}$ とおくと, $g(\zeta)$は D_ε で正則, $\overline{D}_\varepsilon$ で連続, $\partial D_\varepsilon \cap \{\operatorname{Im}\zeta = 0\}$ で 0 である. 故に $g \equiv 0$. これより $\forall y$に対して $f(x+iy) = 0$. 即ち $f \equiv 0$ である.

References

[1] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand, 1966.

[2] Hörmander, L., Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math. Vol 24, pp 671 ~ 704, 1971.

[3] Komatsu, H., Ultradistributions, I Structure theorems and a characterizations, J. Fac. Sci.

Univ. Tokyo, Sec IA, <u>20</u>, pp 25 - 105, 1973.
[4] Martineau, A., Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, Proc. Inter. Summer Course on the theory of distributions, Lisbon, pp 195-326, 1964.
[5] Nishiwada, K. On local characterizations of wave front sets of distributions in terms of boundary values of analytic functions and their application to partial differential equations, to appear
[6] Roumieu, C., Ultra-distributions définis sur R^n et sur certaines classes de variétés différentiables, J. Anal. Math. <u>10</u> (1962-63), pp 153 - 192.