

Fuchs 双曲型方程式

東大 理 田原 秀敏

19世紀後半に証明された Cauchy-Kowalevsky の定理は、その後の偏微分方程式論の中で一つの出発点としての意義をもっている。特に初期値問題という側面に着目すれば、それは双曲型方程式の理論として膨大な体系に発展してきた。従って、この定理を拡張する事は新しい数学の局面の可能性を示唆する。特に双曲型の理論の拡張を可能にするであろう。最近 Baouendi-Goulaouic [1] は characteristic initial hypersurface をもつ作用素に迄 Cauchy-Kowalevsky の定理を一般化した。彼等はそれを「Fuchs型」と呼んだが、それは non-characteristic の場合のかなり自然な拡張を与えている。(Hasegawa [2][3] も参照)。そこで、もし Fuchs型作用素について C^∞ の、又は B 等の函数の中で議論を展開しようとするれば、当然「双曲型」の条件が必要になってくるだろう。かくして、我々はここに「Fuchs双曲型」なる概念に到達する。それは当然 双曲型 のかなり自然な拡張を与えるはず

である。我々は本稿で、まず Fuchs 双曲型なるものを定義し、それについて *hyperfunction solution* の構造をしらべてゆくことにしたい。その結果、従来双曲型方程式に関して得られた結果の多くが、我々の Fuchs 双曲型方程式の場合に這一般化される事になるだろう。

(はあ、この仕事をするに当たり、小松、佐藤、大島、三輪の各先生方から多くの *suggestion* を受けました。ここに感謝の意を込めて表記しておきます。)

目次： §1 Fuchs 系

§2 Fuchs 双曲系

§3 巾零 Fuchs 系

§1 : Fuchs 系

最初に Baouendi-Goulaouic [1] の結果を思い出しておこう。 m 階の微分作用素 $P(t \times D_t D_x)$ が次の (i) (ii) を満たす時、彼等は P を t に関し *weight* $(m-k)$ の Fuchs 型と呼んだ。(ここで $(t, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$)

$$(i) \quad 0 \leq k \leq m \text{ で } P = t^k D_t^m + P_1(t \times D_x) t^{k-1} D_t^{m-1} + \dots + P_{m-k}(t \times D_x) D_t^{m-k} + \dots + P_m(t \times D_x)$$

なる形に書ける。

$$(ii) \quad 1 \leq j \leq k \text{ に対し } \text{ord } P_j(0 \times D_x) \leq 0 \quad (P_j(0 \times D_x) = Q_j(x) \text{ とおく。})$$

この時 $P(\lambda, x) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1) + a_1(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2) + \cdots + a_r(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+r+1)$
 とおく時次の結果が成り立つ。

定理 (Baouendi-Goulaouic [1], Hasegama [2] [3])

P を weight $(m-k)$ の Fuchs 型とする。任意の正則函数 $f(t, x)$, $u_0(x), \dots, u_{m-k+1}(x)$
 に対し, $Pu = f$, $(\frac{\partial}{\partial t})^\nu u|_{t=0} = u_\nu$, $0 \leq \nu \leq m-k-1$ なる Cauchy 問題は正則解
 が唯一存在する。
 ($P(\lambda_0) \neq 0$ for $\lambda \gg m-k, \lambda \in \mathbb{Z}$ の時)

上の場合 $\tilde{P} = t^{m-k}P$ を考える事により, weight 0 に reduction できる。
 $t^l D_t^l = t D_t (t D_t - 1) \cdots (t D_t - l + 1)$ に注目すると, 上の Fuchs 型は, Volenik タイ
 プの matrix 表示できる。そこで一般に次の様に定義しよう。

定義 $P(t \times D_t D_k) = t D_t - A(t \times D_k)$; $A(t \times D_k) = (A_{ij}(t \times D_k))_{1 \leq i, j \leq m}$ の matrix
 が次の (i) (ii) を満たす時, Volenik の意味で, t に関し Fuchs 系という。

$$(i) \exists (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m \text{ s.t. } \text{ord } A_{ij}(t \times D_k) \leq n_i - n_j + 1.$$

$$(ii) t=0 \text{ とおいた時 } \text{ord } A_{ij}(0 \times D_k) \leq 0.$$

本節では, この Fuchs 系について複素解析的な議論を行なう。
 後の応用の為, $A_{ij}(t \times D_k)$ は必ずしも微分作用素とせず, 一般に,
 $(t_0, x_0, \langle \xi_0, dx \rangle) = (0, 0, dx_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{P}^n$ の近傍で定義された $\mathbb{R}.D.O_p$ と理解
 する。 $A(t \times \xi) = \sum_j A^{(j)}(t \times \xi)$ と齊次部分に分ける。この時 $A^{(0)}(0, 0, \xi_0)$ の
 固有値を特性固有値, $(\lambda - A(0 \times D_k))^{-1} = (S_{ij}(\lambda \times D_k))$ ($\lambda \gg 1$ は存在) と書
 く時 $\lambda = \max_{S_{ij} \neq 0} |n_i - n_j| + 1$ を P の F -order と呼ぶことにする。§1.1 では,

Fuchs系に対する Cauchy問題の形式的な基本解を構成し、応用として Fuchs系の Cauchy-Kowalewskyの定理を導く。§1.2は §1.1の少々面倒な評価の部分の証明につきやす。

§1.1. Fuchs系の形式的基本解.

定義 (1.1.1) 正整数 m に対し形式和 $R(t \times D_x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} R_j(t \times D_x)$ が次の (i) (ii) (iii) を満たすものを $\frac{1}{m}$ 次の形式的 $\Psi D \mathcal{O}_p$ と呼ぶ。

(i) $\exists \varepsilon > 0$ が存在して、 $R_j(t \times \xi)$ は $\{(t, \xi); |t| < \varepsilon, |\xi| < \varepsilon, |\xi - \xi^0| < \varepsilon\}$ で定義された正則関数で ξ に関し j 次斉次式である。

(ii) $\exists M > 0$ が存在して、 $0 < \delta < \varepsilon$ なる $\forall \delta$ に対して、

$$\sup_{|t| < \delta, |\xi| < \varepsilon, |\xi - \xi^0| < \varepsilon, |\xi| = 1} |R_j(t \times \xi)| \leq C_\delta (M \delta^{\frac{1}{m}})^j / j! \quad \text{for } j \geq 0.$$

(iii) $\exists A > 0$ at. $\sup_{|t| < \varepsilon, |\xi| < \varepsilon, |\xi - \xi^0| < \varepsilon, |\xi| = 1} |R_j(t \times \xi)| \leq (j!) A^{-j}$ for $j < 0$,

特に R_j が ξ の j 次斉次多項式で、(ii) (iii) の評価を $|\xi| = 1$ 全体で満す時形式的 diff op と呼ぶ。各々の全体を $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$, $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{m})$ と書く。

注意 (1.1.2) 1) $m=1$ の時は柏原河合 [4] で finite velocity をもつ $\Psi D \mathcal{O}_p$

として導入されている。 $m > 1$ ではいわば infinite velocity とする。

2) $P(t \times D_x)$ を t に正則な無限階の $\Psi D \mathcal{O}_p$ とする時、 $P \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ である。

命題 (1.1.3) $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$, $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{m})$ は次の性質をもつ。

1) $P = \sum P_j$, $Q = \sum Q_j \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ に対し、 $S_\ell = \sum_{\ell=j+k-1} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha P_j(t \times \xi) D_x^\alpha Q_k(t \times \xi)$ と

おく. この時 $S = \sum_{\ell} S_{\ell}(t \times D_{\ell}) \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$. 従って $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ は環構造をもつ.

2) $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ は t に正則な無限階 $\mathbb{A}D \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ のはず環の拡大環である.

3) $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{m})$ は. 部分環として $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ の中で閉じている

4) $P = \sum P_j \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ の時 $D_t P = \sum \frac{\partial}{\partial t} P_j$ とおくと $D_t P \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$.

(証明). Cauchy の不等式を使えばよい. (柏原・河合 [4] Lemma 2.1 参照).

命題より, $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ の中で $(tD_t - A(t \times D_x)) \cdot E(t \times D_x) = F(t \times D_x)$ なる微分方程式を考える事が出来る. 今 $P = tD_t - A(t \times D_x)$ を $(0, dx_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{P}^n$ の近傍で定義された $\mathbb{A}D \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ の Fuchs 系, $F(t \times D_x)$ を無限階 $\mathbb{A}D \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ とした時, $P(t \times D_x) \cdot E(t \times D_x) = F(t \times D_x)$ の解 $E(t \times D_x)$ を $\hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{m})$ の中で考える事にしよう. (但し行列の size を $\tilde{m} \times \tilde{m}$ とする.). 両辺を t の中に展開すると次の漸化式を得る.

$$(l - A_0)E_l = \sum_{i=1}^{\ell} A_i E_{\ell-i} + F_{\ell} \quad (\text{但し, } A = \sum t^i A_i, F = \sum t^i F_i, E = \sum t^i E_i)$$

もし P の特性固有値 $\{n \in \mathbb{Z}; n > n_0 > 0\}$ ならば, Fuchs 系の定義より $\ell > n_0$, $(\ell - A_0)$ は可逆. 従って順次 $(\ell - A_0)^{-1}$ を掛けてゆくと, E_{ℓ} は $\{E_0, \dots, E_{n_0}\}$ と $\{F_{\ell}\}$ の一次結合で書けてしまう. 故に

$$\sum_{\ell=n_0+1}^{\infty} t^{\ell} E_{\ell}(x D_x) = W_0(t \times D_x) E_0(x D_x) + \dots + W_{n_0}(t \times D_x) E_{n_0}(x D_x) + R_F(t \times D_x)$$

なる形に一意的に書ける. この時次の定理が成り立つ.

定理 (1.1.4) P を Fuchs 系, $A = P$ の F-order, $F(t \times D_x)$ を無限階 $\mathbb{A}D \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$

この時, $W_0(t \times D_x), \dots, W_{n_0}(t \times D_x), R_F(t \times D_x) \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\sigma})$ となる.

(証明は §1.2 に於て行なう.)

系 (1.1.5) P : Fuchs 系, $\{\alpha_i \in \mathbb{Z}; n > n_0 > 0\}$ とする. 無限階数 D, \mathcal{O}_p
 $U_0(xD_k), \dots, U_{n_0}(xD_k), F(txD_k)$ に対し, 次の Cauchy 問題 (e) を考える.

$$(e) t \frac{\partial}{\partial t} E - A(txD_k) E = F, \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^v E|_{t=0} = U_v(xD_k) \quad 0 \leq v \leq n_0.$$

(e) が $\hat{\mathcal{D}}$ の中に解をもつ必要十分条件は, 次をみたす事である.

$$(*) \quad 0 \leq l \leq n_0 \text{ に対し, } (l - A_0) U_l / l! = \sum_{i=1}^l A_i U_{l-i} / (l-i)! + F_l \text{ を満たす.}$$

この時解 $E(txD_k) \in \hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{2})$ ($\rho = F$ -order) で, 一意的であり, 定理の基本解 $W_\nu(txD_k)$ を使って, $E = R_F + \sum_{j=0}^{n_0} (t^{n_0+j} W_j(txD_k) + t^j) U_j(xD) / j!$ と書ける.

系より, わかる様に, $W_\nu(txD_k)$ が Fuchs 系の形式的な基本解を与えている. P の各成分が微分 \mathcal{O}_p から成る時は, $|\mathcal{S}|=1$ の各点で $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{2})$ の評価をもつ事と, $|\mathcal{S}|=1$ が Compact なる事より, ただちに基本解 $W_\nu(txD_k) \in \hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{2})$ が理解される. $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{2})$ の定義より, \mathcal{O} (正則函数の芽のはす環) の作用素環 $\text{ie. } \hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{2}) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ である. 従って, 次の Fuchs 系の Cauchy-Kowalevsky の定理を得る.

定理 (1.1.6) $P = tD_k - A(txD_k)$ を微分作用素の Fuchs 系, 特性固有値 $\in \{n \in \mathbb{Z}; n > n_0 > 0\}$, $\rho = P$ の F -order とする. Cauchy 問題 (e).

$$(e) P(txD_k) U(t,x) = f(t,x), \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^v U|_{t=0} = U_0(x), \quad 0 \leq v \leq n_0, \quad f, U_\nu \in \mathcal{O}.$$

(e) が \mathcal{O} の中に正則解をもつ必要十分条件は (*) をみたす事である.

$$(*) \quad 0 \leq l \leq n_0, \quad (l - A_0) U_l / l! = \sum_{i=1}^l A_i U_{l-i} / (l-i)! + f_l, \quad f = \sum t^l f_l(x);$$

更にもし data が $\{x \in \mathbb{C}^n \mid |x| \leq r \ll 1\}$ で与えられたならば、解は $\{(tx) \mid |t| \leq (r-|x|/M)^\Delta\}$ で存在する。(M は \mathbb{P} のみに依存する定数)

(証明). $f(tx), u_j(x)$ を 0 階微分作用素として基本解 $W_\nu(tx, D_x), R_F(tx, D_x) \in \hat{\mathcal{D}}(\mathfrak{a})$ 故に解は $u(tx) = R_F(tx, D_x) \cdot 1 + \sum_{j=0}^{\infty} (t^{n+j} E_j(tx, D_x) + t^j) u_j(x) / j!$ と書ける. 定理の後半は次の補題を示せば十分である.

(補題). $P(tx, D_x) \in \hat{\mathcal{D}}(\mathfrak{a})$. $f(tx)$ は $\{(tx) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mid |x| \leq r, t \text{ は十分広い領域}\}$ で正則とする. この時 $P(tx, D_x) f(tx)$ は $\{(tx) \mid |x| \leq r, |t| \leq (r-|x|/M)^\Delta\}$ なる領域で正則となる.

(証明). $|f(tx)| \leq B$ とする. Cauchy 不等式より $|D_x^\alpha f|_{|x| \leq s} \leq \alpha! \frac{1}{(r-s)^{|\alpha|}} B$ - 方 $P \in \hat{\mathcal{D}}(\mathfrak{a})$ 故 $|P_j|_{|x| \leq \delta} \leq C_\delta (M\delta^{\frac{1}{2}})^j / j!$ を得る. $P_j(tx, \xi) = \sum P_{j\alpha}(tx) \xi^\alpha$ とおくと $|P_{j\alpha}(tx)|_{|x| \leq \delta} \leq C_\delta (M\delta^{\frac{1}{2}})^j / j!$ を得る. 両評価式より,

$$\begin{aligned} |P(tx, D_x) f(tx)|_{|x| \leq \delta, |t| \leq s} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} C_\delta (M\delta^{\frac{1}{2}})^j / j! \cdot \alpha! \frac{1}{(r-s)^{|\alpha|}} B \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} C_\delta B \cdot 2^{n-1} \left(\frac{2M\delta^{\frac{1}{2}}}{r-s} \right)^j \end{aligned}$$

故に $2M\delta^{\frac{1}{2}} < r-s$ で収束 i.e. $\delta < (r-s/M)^\Delta$ で収束する. $|x| \leq s$ で考えたが、この s を動かすと補題の領域を得る. g.e.d.

この Cauchy-Kowalevsky の定理は Volterric の意味の Kowalevsky 系や Baouendi-Goulaouic [1] の結果を含んでしまう. 実際 $P = D_t - A(tx, D_x)$ を Kowalevsky 系とする時 $\tilde{P} = tD_t - tA(tx, D_x)$ は Fuchs 系 \tilde{P} の F-order = 1. 故に Cauchy 解の存在及びその領域についての結果はただちに得る. P.3 で説明した様に matrix 表示すれば Fuchs 型に対する

結果を含む事は明らか. 領域についての陳述を合わせる.

定理 (1.1.7) P を weight $(m-k)$ の Fuchs 型, $e(\lambda) \neq 0$ for $\lambda \geq m-k, \lambda \in \mathbb{Z}$,

任意の正則函数 $f(t, x), U_0(x), \dots, U_{m-k-1}(x)$ に対し, Cauchy 問題 (E)

$$(E) \quad P(t, x, D_t, D_x) u(t, x) = f(t, x) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\nu} u(t, x) \Big|_{t=0} = U_{\nu}(x) \quad 0 \leq \nu \leq m-k-1$$

は唯一つの正則解をもつ. 更にもし data を $\{x \in \mathbb{C}^n : |x| \leq r \ll 1\}$ で与えたならば解 u は $\{(t, x) : |t| \leq (r/M)^{\Delta}\}$ $\Delta = \min\{m, k+1\}$ で存在する. (ここで M は P のみに依存する定数).

(証明) $m=k$ の時は P3 の方法で matrix 表示すれば良い. $m \neq k$ の時 $\hat{P} = tP$ とおき \hat{P} を次の様にして matrix 表示してゆく. $U_0 = u, U_1 = D_t U_0, \dots, U_{m-k-1} = D_t U_{m-k-2}, U_{m-k} = t D_t U_{m-k-1}, \dots, U_{m-1} = (t D_t - k + 1) U_{m-2}$ とおく. $D_t u = v \Leftrightarrow t D_t u = t v$ により Fuchs 系にもってゆく. F-order $< k+1$ 故定理の領域を得る. g. e. d.

§1.2. FCK 級数の評価.

本節では, §1.1 の定理 (1.1.4) の証明の実行を目標とする. 最初に評価実行の武器とたる Monvel-Kree [5] の形式 norm の説明をしておく. $P(x, D_x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{j-k}(x, D)$ を j 階準 D, \mathcal{O}_p とする時,

$$N_j^{\omega}(P; T) = \sum_{k, \alpha, \beta} \frac{2(2\pi)^k k!}{(|\alpha|+k)! (|\beta|+k)!} \sup_{\omega} |D_x^{\alpha} D_x^{\beta} P_{j-k}(x, \xi)| T^{-2k+|\alpha|+|\beta|}$$

とおく. 主な性質は次の通りである.

(i) $P(x, D)$ が $\mathbb{A}, D, \mathcal{O}_p$ の増大条件を満たす $\Leftrightarrow N_j^\omega(P; T)$ が収束巾級数.

(ii) $P_\nu(x, D)$ を j_ν 次 $\mathbb{A}, D, \mathcal{O}_p$ ($\nu=1, 2$) ならば $N_{j_1+j_2}^\omega(P_1 P_2; T) \ll N_{j_1}^\omega(P_1; T) \cdot N_{j_2}^\omega(P_2; T)$.

定義 (1.2.1) 次の形の級数を形式的 FCK 級数と呼ぶ.

$$R(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} R^\ell t^\ell ; R^\ell = \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{Z}_+ \\ \ell = m_1 + \dots + m_p > 1 \\ k_p = m_p, k_i = m_i - m_{i+1} (1 \leq i < p)}} A_{k_1}(m_1) A_{k_2}(m_2) \dots A_{k_p}(m_p)$$

この R^ℓ に関し次の漸化式が成り立つ事は容易にわかる.

$$(1) R^1 = A_1(t), \quad (2) R^{\ell+1} = A_1(\ell+1)R^\ell + \dots + A_\ell(\ell+1)R^1 + A_{\ell+1}(\ell+1)$$

従って FCK 級数とは漸化式 (1) (2) より構成される級数に他ならない. 今 $\{A_k^{(i)}(m)\}_{1 \leq i \leq s, k, m \in \mathbb{Z}_+}$ を $\mathbb{A}, D, \mathcal{O}_p$ の集合, C, C^{-1} を可逆行列とする. この時 $A_k(m) = C(A_k^{(1)}(m; x, D_k) + \dots + A_k^{(s)}(m; x, D_k))C^{-1}$ とおくと形式的 FCK 級数ができる. これを $R(C\{A_k^{(i)}(m)\}C^{-1}; t \times D_k)$ とかく.

命題 (1.2.2) $\{A_k^{(i)}(m; x, D_k)\}_{1 \leq i \leq s, k, m \in \mathbb{Z}_+}$ が次の 1) 2) を満たし, C, C^{-1} が有限階 $\mathbb{A}, D, \mathcal{O}_p$ ならば, $R(C\{A_k^{(i)}(m)\}C^{-1}; t \times D_k) \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{s})$ となる. 但し

1) $A_k^{(i)}(m; x, D_k)$ は高々 i 階以下の $\mathbb{A}, D, \mathcal{O}_p$.

2) \exists 領域 ω , $\exists \lambda > 0, M > 0, B > 0$ s.t. $N_i^\omega(A_k^{(i)}(m); \lambda) \ll \frac{MB^k}{m^i}$.

(証明)
$$A_{k_1}(m_1) \dots A_{k_p}(m_p) = \sum_{1 \leq \varepsilon_i \leq s} C A_{k_1}^{(\varepsilon_1)}(m_1) A_{k_2}^{(\varepsilon_2)}(m_2) \dots A_{k_p}^{(\varepsilon_p)}(m_p) C^{-1}$$

$$= \sum_{\substack{P_1 + P_2 + \dots + P_s = P \\ P_i \geq 0}} \left(C \sum_{\substack{P_i = \#\{1 \leq i \leq p_i \cap j_i\} \\ 1 \leq \varepsilon_i \leq s}} A_{k_1}^{(\varepsilon_1)}(m_1) \times \dots \times A_{k_p}^{(\varepsilon_p)}(m_p) C^{-1} \right)$$

と書ける. 故に.

$$X^{(P_1 \dots P_s)} = \sum_{P_i = \#\{1 \leq i \leq p_i \cap j_i\}, 1 \leq \varepsilon_i \leq s} C A_{k_1}^{(\varepsilon_1)}(m_1) \dots A_{k_p}^{(\varepsilon_p)}(m_p) C^{-1} \quad \text{とおくと.}$$

C, C^{-1} の各成分が高々 c 階以下とすると $X^{(P_1 \cdots P_s)}$ は $(2c + P_1 + 2P_2 + \cdots + sP_s)$ 階以下の巫 D, \mathcal{O}_p . 齊次部分表示して $X^{(P_1 \cdots P_s)} = \sum_{j \leq 2c + P_1 + \cdots + sP_s} X_j^{(P_1 \cdots P_s)}(x, \xi)$

と書く. この時 $X^{(P_1 \cdots P_s)}$ を使おうと.

$$R(C\{A_k^{(i)}\}C^{-1}; tx D_x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{\ell = m_1 + \cdots + m_p \geq 1 \\ k_p = m_p, k_i = m_i - m_{i+1}}} \sum_{\substack{P_1 + \cdots + P_s = P, P_i \geq 0}} X^{(P_1 \cdots P_s)}(x D_x) \cdot t^\ell$$

と書ける.

$R(C\{A_k^{(i)}\}C^{-1}; tx \xi) = \sum_j R_j(tx \xi)$; $R_j(tx \xi)$ は j について j 次齊次式とすると

$$R_j(tx \xi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{\ell = m_1 + \cdots + m_p \geq 1 \\ k_p = m_p, k_i = m_i - m_{i+1}}} \sum_{\substack{P_1 + \cdots + P_s = P \\ j \leq 2c + P_1 + \cdots + sP_s}} X_j^{(P_1 \cdots P_s)}(x, \xi) \cdot t^\ell$$

となる.

まず $X^{(P_1 \cdots P_s)}$ の評価を行なう. $N_c^\omega(C^\pm; \lambda) = N$ とおくと.

$$\begin{aligned} N_{2c+P_1+\cdots+sP_s}^\omega(X^{(P_1 \cdots P_s)}; \lambda) &\leq \sum_{\substack{P = \#\{i \in I, \varepsilon_i \neq 0\} \\ 1 \leq \varepsilon_i \leq s}} N_c^\omega(C; \lambda) N_c^\omega(C^{-1}; \lambda) N_{\varepsilon_1}^\omega(A_{k_1}^{(\varepsilon_1)}; \lambda) \cdots N_{\varepsilon_p}^\omega(A_{k_p}^{(\varepsilon_p)}; \lambda) \\ &\leq \sum N^2 M^P B^{k_1 + \cdots + k_p} \frac{1}{m_1^{\varepsilon_1}} \cdots \frac{1}{m_p^{\varepsilon_p}} \end{aligned}$$

を得る.

ここで $\frac{1}{m_1} < \frac{1}{m_2} < \cdots < \frac{1}{m_p}$, $\frac{1}{m_p} \leq \frac{1}{\nu}$ に注意すると.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_1^{\varepsilon_1}} \cdots \frac{1}{m_p^{\varepsilon_p}} &\leq \frac{1}{(m_1 \cdots m_p)^{\varepsilon_1}} \frac{1}{(m_{P_1+1} \cdots m_{P_1+P_2})^{2 \times \cdots \times \varepsilon_2}} \cdots \frac{1}{(m_{P-P_s+1} \cdots m_p)^{\varepsilon_s}} \\ &\leq \frac{1}{P!} \left(\frac{P!}{(P+P_2)!}\right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{(P-P_s)!}{P!}\right)^s \leq \frac{1}{P!} \left(\frac{1}{P!}\right)^2 \cdots \left(\frac{1}{P!}\right)^s \end{aligned}$$

を得る. \sum の項数 $= \frac{P!}{P_1! \cdots P_s!} \leq s^P$; $k_1 + \cdots + k_p = \ell$ 故結局次を得る.

$$N_{2c+P_1+2P_2+\cdots+sP_s}^\omega(X^{(P_1 \cdots P_s)}; \lambda) \leq N^2 (sM)^P B^\ell \frac{1}{P!} \left(\frac{1}{P!}\right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{1}{P!}\right)^s$$

故に Monvel-Kree の形式 norm の定義にもとると.

$$|X_{2c+P_1+\cdots+sP_s-k}^{(P_1 \cdots P_s)}(x, \xi)|_\omega \leq \frac{k! (2\eta)^k}{2 \cdot \lambda^{2k}} \cdot N^2 (sM)^P B^\ell \frac{1}{P!} \left(\frac{1}{P!}\right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{1}{P!}\right)^s$$

$j = 2c + P_1 + \cdots + sP_s - k$ とおくと

$$|X_j^{(P_1 \cdots P_s)}(x, \xi)|_\omega \leq \frac{(2c + P_1 + \cdots + sP_s - j)!}{P! (P_1!)^2 \cdots (P_s!)^s} \cdot \frac{N^2 (sM)^P B^\ell}{2} \left(\frac{2\eta}{\lambda^2}\right)^{2c + P_1 + \cdots + sP_s - j}$$

故に $|R_j(t, \xi)|$ に関し次の評価を得る.

$$|R_j| \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{\ell=m_i > m_p > 1 \\ k_p=m_p, k_i=m_i-m_{ih}}} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_s=p \\ j \leq 2c+\beta_1+\dots+\beta_s}} \frac{(2c+\beta_1+\dots+\beta_s-j)!}{\beta_1! \dots \beta_s! s} \frac{N^2(SM)^p B^\ell}{2} \left(\frac{2n}{\lambda^2}\right)^{2c+\beta_1+\dots+\beta_s-j} |t|^\ell$$

ここで次の事に注意しよう.

$$(a) \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{\ell=m_i > m_p > 1 \\ k_p=m_p, k_i=m_i-m_{ih}}} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_s=p \\ j \leq 2c+\beta_1+\dots+\beta_s}} 1 \leq C_p \leq 2^\ell \quad (*) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{1 \leq p \leq \ell} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_s=p \\ j \leq 2c+\beta_1+\dots+\beta_s}} \left(\sum_{\substack{\ell=m_i > m_p > 1 \\ k_p=m_p, k_i=m_i-m_{ih}}} 1 \right) (*)$$

$$\sum_{\ell=m_i > m_p > 1} 1 \leq C_p \leq 2^\ell \quad \text{が成立つ.}$$

$$(b) \frac{(2c+\beta_1+\dots+\beta_s-j)!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_s! s} \leq \frac{(2c+\beta_1+\dots+\beta_s-j)!}{(2c+\beta_1+\dots+\beta_s)!} \times (1+1+2+\dots+s)^{2c+s\ell} \times (2c)!$$

故に (a) (b) を使って書き直すと, $((1+1+2+\dots+s)^{2c+s\ell} (2c)! \leq L \cdot V^{s\ell})$

$$|R_j| \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{1 \leq p \leq \ell} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_s=p \\ j \leq 2c+\beta_1+\dots+\beta_s}} \frac{(2c+\beta_1+\dots+\beta_s-j)!}{(2c+\beta_1+\dots+\beta_s)!} \frac{N^2 L \cdot (SM)^p}{2} (2V^s B |t|)^\ell \left(\frac{2n}{\lambda^2}\right)^{2c+\beta_1+\dots+\beta_s-j}$$

と書ける. 右辺で $\nu = 2c + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s$ とおく時次を得る.

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{1 \leq p \leq \ell} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_s=p \\ j \leq \nu = 2c+\beta_1+\dots+\beta_s}} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} \frac{N^2 L (SM)^p}{2} (2V^s B |t|)^\ell \left(\frac{2n}{\lambda^2}\right)^{\nu-j}$$

$SM > 1$ と仮定して良いので $(SM)^p \leq (SM)^\ell$, $(SM) \cdot 2V^s B = C_1$, $(\frac{2n}{\lambda^2}) = C_2$ と

$$\text{おく.} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{1 \leq p \leq \ell} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_s=p \\ j \leq \nu = 2c+\beta_1+\dots+\beta_s}} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} (N^2 L) (C_1 |t|)^\ell C_2^{\nu-j}$$

を得る. ここで ℓ, ν を固定した時の“場合の数” $\leq \sum_{1 \leq p \leq \ell} \sum_{\beta_1+\dots+\beta_s=p} 1 \leq (2s)^\ell$

一方 ν は $2c+1 \leq \nu \leq s\ell+2c$ の範囲内にあるから,

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\substack{1+2c \leq \nu \leq s\ell+2c \\ j \leq \nu}} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} N^2 L (2s C_1 |t|)^\ell C_2^{\nu-j} \\ &= \sum_{\substack{1+2c \leq \nu \\ j \leq \nu}} \sum_{\nu-2c \leq s\ell, \ell \in \mathbb{Z}^+} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} N^2 L (2s C_1 |t|)^{\frac{1}{s}(s\ell-\nu+2c)} \cdot (2s C_1 |t|)^{\frac{1}{s}(\nu-2c)} C_2^{\nu-j} \end{aligned}$$

$$= \sum_{1+2c \leq \nu, j \leq \nu} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} (2sC_1|H|)^{\frac{1}{s}(\nu-2c)} C_2^{\nu-j} \sum_{\nu-2c \leq s\ell, \ell \in \mathbb{Z}_+} N^2 L (2sC_1|H|)^{\frac{1}{s}(s\ell-\nu+2c)}$$

ここで、 $\sum_{\substack{\nu-2c \leq s\ell \\ \ell \in \mathbb{Z}_+}} N^2 (2sC_1|H|)^{\frac{1}{s}(s\ell-\nu+2c)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} N^2 L (2sC_1|H|)^{\frac{1}{s}n} < C_3 \quad (|H| \ll 1)$

故に $(2sC_1)^{\frac{1}{s}} = M_1$ とおき、 $|R_j|_{\omega}$ の評価を書き直すと、次を得る。

$$|R_j|_{\omega} \leq \sum_{\substack{1+2c \leq \nu \\ j \leq \nu}} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} C_3 \cdot (M_1|H|^{\frac{1}{s}})^{\nu-2c} \cdot C_2^{\nu-j}$$

この評価から定理の評価が導びかれる事を示そう。

1) $j \geq 2c$ の場合の評価、 $\nu-j=k$ と置いて書き換えると、

$$\begin{aligned} |R_j|_{\omega} &\leq C_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k+j)!} (M_1|H|^{\frac{1}{s}})^{k+j-2c} C_2^k \\ &\leq C_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!j!} (M_1|H|^{\frac{1}{s}})^k (M_1|H|^{\frac{1}{s}})^{j-2c} C_2^k \\ &= C_3 (M_1|H|^{\frac{1}{s}})^{j-2c} \frac{1}{j!} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (C_2 M_1|H|^{\frac{1}{s}})^n \right\} \end{aligned}$$

$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (C_2 M_1|H|^{\frac{1}{s}})^n \right\}$ は $C_2 M_1|H|^{\frac{1}{s}} < 1$ の時収束する。

2) $j < 0$ の場合の評価、

$$\begin{aligned} |R_j|_{\omega} &\leq C_3 \sum_{\nu=1+2c}^{\infty} \frac{(\nu-j)!}{\nu!} (M_1|H|^{\frac{1}{s}})^{\nu-2c} C_2^{\nu-j} \\ &\leq C_3 \sum_{\nu=1+2c}^{\infty} (-j)! 2^{\nu-j} (M_1|H|^{\frac{1}{s}})^{\nu-2c} C_2^{\nu-j} \\ &\leq C_3 (-j)! (2C_2)^{2c-j} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2C_2 M_1|H|^{\frac{1}{s}})^n \right\} \end{aligned}$$

$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2C_2 M_1|H|^{\frac{1}{s}})^n \right\}$ は $2C_2 M_1|H|^{\frac{1}{s}} < 1$ の時収束する。

以上 1) 2) の評価から $\hat{\rho}(\frac{1}{s})$ の評価が導びかれる事は明らかである。故に証明は完了した。 g.e.d.

注意 (1.2.3) $R(C\{A_k^{(\omega)}\}C'; t \times D_x)$ の評価は、 $N_c^{\omega}(A_k^{(\omega)}; \lambda)$ の評価に

のみ依存している。従って、 $T(m_0)\{A_k^{(j)}(m)\} = \{\tilde{A}_k^{(j)}(m)\}_{1 \leq i \leq s, k, m \geq 0}$, $\tilde{A}_k^{(j)}(m) \equiv A_k^{(j)}(m+m_0)$ とする時、 $R(C \cdot T(m_0)\{A_k^{(j)}(m)\} \cdot C^{-1}; t \times D_k)$ は、 $R(C \{A_k^{(j)}(m)\} C^{-1}; t \times D)$ と同じ値の評価でおさえられる。

以上を準備として §1.1 の基本解の評価を行なう。方法は命題 (1.2.2) に帰着させる事による。 $P = tD_t - A(t \times D_x)$ を Fuchs 系、 $(0, dx_m)$ での $\mathbb{C} \cdot D \cdot \mathbb{C}$, 有次部分表示して $A(t \times \xi) = \sum_j A^{(j)}(t \times \xi)$, $A(t \times D) = (A_{ij})$, $\text{ord } A_{ij} \leq n_i - n_j + 1$ $\circ = P$ の F-order とする。

命題 (1.2.4) $(\lambda - A^{(0)}(0, x, \xi))$ の (i, j) 小行列式を $\Delta_{ij}(\lambda; x, \xi)$, $\deg_\lambda \Delta_{ij}$ を λ についての次数, $l = \text{matrix の size}$ とする。この時

$$l - \deg_\lambda \Delta_{ij} \geq n_i - n_j + 1$$

(証明) \mathbb{S}_l を l 次置換群とする。 $\pi \in \mathbb{S}_l, \pi(i) = j$ なる π に対し

$$P_\pi(\lambda, x, \xi) = \prod_{k \neq i} (\lambda \delta_{k, \pi(k)} - A_{k, \pi(k)}^{(0)}(0, x, \xi)) \quad \text{とおく。} \quad \Delta_{ij} = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_l, \pi(i) = j} \text{sgn } \pi P_\pi(\lambda, x, \xi)$$

故、任意の $\pi \in \mathbb{S}_l, \pi(i) = j$ に対し $l - \deg_\lambda P_\pi(\lambda, x, \xi) \geq n_i - n_j + 1$ を示せば良い。

$P_\pi = 0$ ならば、 $\deg_\lambda P_\pi = -\infty$ 故必ず成立。 $P_\pi \neq 0$ と仮定する。

i) $i = j$ の場合。 $\deg_\lambda P_\pi \leq l - 1$ は常に成立故 $l - \deg_\lambda P_\pi \geq 1 = n_i - n_j + 1$,

ii) $i \neq j$ の場合。 π は巡回置換の積に書ける。 i, j を結ぶ巡回置換の長さを m , $(j = j_1, j_2, \dots, j_m = i)$ $\pi(j_\nu) = j_{\nu+1}$ とする。この時、

$\deg_\lambda P_\pi \leq l - m$ 故から $l - \deg_\lambda P_\pi \geq m$, 一方 $P_\pi \neq 0$ 故かつ P_π は $A_{j_\nu, j_{\nu+1}}^{(0)}(0, x, \xi)$ ($1 \leq \nu \leq m-1$) を因子にもつ。従って $A_{j_\nu, j_{\nu+1}}^{(0)}(0, x, \xi) \neq 0$, 所で Fuchs

系の定義より $\text{ord } A_{ij}(0 \times D_k) \leq \min(n_i - n_j + 1, 0)$ 故にもし $n_{j\nu} - n_{j\nu+1} + 1 \leq -1$

ならば $A_{j\nu, j\nu+1}^{(0)}(0 \times \xi) \equiv 0$ となり矛盾. 従って $n_{j\nu} - n_{j\nu+1} \geq -1$ を得る.

$j_i = j, j_m = i$ であるから. $n_i - n_{j+1} = (n_{j_m} - n_{j_{m-1}}) + \dots + (n_{j_2} - n_{j_1}) + 1 \leq (m-1) + 1 = m$. 故に $l - \text{deg } P_k \geq m \geq n_i - n_{j+1}$ を得る. g.e.d.

$P(m; x D_k) = (P_{ij}(m; x D_k))$ の各成分が次の性質をもつ時 $T(p)$ を満すと言う. ($p \geq 0$). $T(p): P_{ij} = \max(0, \text{ord } P_{ij}), N_{P_{ij}}^\omega(P_{ij}(m), \lambda) \leq \frac{M}{m P_{ij} + p}$

(但し ω, λ, M は m に無関係).

この $T(p)$ について次が成り立つ事は明らかであろう.

1) $P(m)$ が $T(p), Q(m)$ が $T(q)$ を満す $\Rightarrow P(m)Q(m)$ は $T(p+q)$ を満す行列の有限和.

2) $0 \leq k \leq p, P$ の各成分は高々 k 階以下, $Q(m)$ は $T(q)$ を満す. $\Rightarrow PQ(m), Q(m)P$ は $T(q-k)$ を満す行列の有限和.

命題 (1.2.5) $(m - A(0 \times D_k))^{-1}$ は $m \gg 1$ で存在する. $C = \begin{bmatrix} D_n^{n_1} & & & \\ & D_n^{n_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & D_n^{n_l} \end{bmatrix}$

とおく. この時 $C^{-1}(m - A(0 \times D_k))^{-1}C$ は性質 $T(1)$ をもつ.

行列の有限和となる.

(証明). $A(0 \times D_k) = A^{(0)}(0 \times D_k) - \tilde{A}(x D_k), -\tilde{A}(x D_k) = \sum_{j < 0} A^{(j)}(0 \times D_k)$ とおく.

$(m - A^{(0)}(0 \times D_k))^{-1} = B(m, x D_k), \tilde{A}(x D_k)B(m, x D_k) = R(m, x D_k)$ とおく. この時 $(m - A(0 \times D_k))^{-1} = B(m, x D_k) \sum_{k=0}^{\infty} R(m, x D_k)^k$ と書ける. 次の i) ii) iii) を示せば十分

であろう.

i) $C^T B(m \times D) C$ は性質 T(1) をもつ. 実際, $B(m) = (B_{ij}(m))$ とおく. $C^T B(m) C$ の (i, j) 成分 $= D_n^{n_i} B_{ij}(m) D_n^{n_j}$ だから, その order $\leq n_j - n_i$. 故に $P_{ij} = \max(0, n_j - n_i)$ とおく時 $N_{P_{ij}}^\omega(D_n^{n_i} B_{ij} D_n^{n_j}; \lambda) \leq \frac{M}{m^{P_{ij}+1}}$ を示せばよい. 所で左辺 $\leq M_1 N_0^\omega(B_{ij}(m); \lambda) \leq M_1 \frac{M_2}{m^{\ell - \deg \Delta_{ji}}}$ ($\because B_{ij}(m \times \xi) = \Delta_{ji} / \det(m - A^{(0)}(x, \xi))$ 故). 命題(1.24)より $\ell - \deg \Delta_{ji} \geq n_j - n_i + 1$. また $\deg \Delta_{ji} \leq \ell - 1$ だから $\ell - \deg \Delta_{ji} \geq \max(n_j - n_i + 1, 1) = P_{ij} + 1$. 故に $\frac{1}{m^{\ell - \deg \Delta_{ji}}} \leq \frac{1}{m^{P_{ij}+1}}$ とはり (i) が示された.

ii) $C^T R(m) C$ は性質 T(0) をもつ行列の有限和. 実際, $\text{ord } \hat{A}_{ij} \leq n_i - n_j + 1$ だから $C^T \hat{A} C$ の各成分は高々 1 階. $C^T B(m) C$ は T(1) を満す. 従って, $C^T R(m) C = (C^T \hat{A} C)(C^T B(m) C)$ は性質 T(0) をもつ行列の有限和.

iii) 十分大きな k_0 に対し, $C^T (\sum_{k \geq k_0} R(m)^k) C$ は性質 T(0) をもつ. 実際 k_0 を十分大きくすると $C^T (\sum_{k \geq k_0} R(m)^k) C$ の各成分は 0 階以下. 評価が m に一様にとれるのは明らか故 T(0) を満たす.

以上 (i) (ii) (iii) より $C^T (m - A^{(0)}(x, D))^{-1} C$ が T(1) をもつ行列の有限和となる事は PK の D より明らか. g.e.d.

命題(1.2.5)より $C^T (m - A^{(0)}(x, D))^{-1} C$ は次の様に分解できる.

$$i) C^T (m - A^{(0)}(x, D))^{-1} C = S^{(0)}(m \times D) + \cdots + S^{(q-1)}(m \times D).$$

の各成分は高々 i 階以下. (Δ は P の F-order)

$$ii) N_i^\omega(S^{(i)}(m); \lambda) \leq \frac{M}{m^{i+1}}.$$

今, $A(x, D)$ を t について Taylor 展開して $\sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k(x, D)$ と書き.

$X_k^{(\omega)}(m) = S^{(i-1)}(m, x_{D_k}) C^{-1} A_k(x_{D_k}) C \quad |i| \leq l, k \in \mathbb{Z}_+^m \gg 1$ とおく. $C^{-1} A_k C$ の各成分が 1 階以下である事に注意すれば $\{X_k^{(\omega)}(m)\}$ は命題 (1.2.2) の条件 1) 2) を満たす. つまり

1) $X_k^{(\omega)}(m, x_{D_k})$ は高々 i 階以下の $\mathbb{R} D_i \mathbb{Q}_p$.

2) $N_i^{(\omega)}(X_k^{(\omega)}(m); \lambda) \leq \frac{MB^k}{m^i} \quad \text{for } \exists \lambda > 0, M > 0, B > 0,$

これを使って §1.1 の基本解の評価を得る事ができる. 実際

(定理 (1.1.4) の証明). i) $W_j(t, x_{D_k}) \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{2})$ の証明: $W_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} t^{\ell-1} G_{\ell}(x_D)$ とおく時 G_{ℓ} は次の漸化式をみたす. $(n_{otl} - A_0) G_{\ell} = A_{n_{otl-j}} + \sum_{m=1}^{\ell} A_m G_{\ell-m}$. 故に W_j はともかく $W_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} t^{\ell-1} W_{j,\ell}(t, x_{D_k}) (n_{otl} - A_0)^{-1} A_{n_{otl-j}}$ なる形に書ける. $W_{j,\ell}(t, x_{D_k}) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k H_{k,\ell}(x_{D_k})$ とおくと $H_{k,\ell}$ は次の漸化式を満たす. 1) $H_{0,0} = 1$. 2) $(n_{otl+k} - A_0) H_{k,\ell} = \sum_{m=1}^k A_m H_{k-m,\ell} + A_k$,

故に $\tilde{X}_k^{(\omega)}(m) = (n_{otl+m} - A_0)^{-1} A_k$ とおいた時 1) 2) は形式的 FCK 級数の漸化式を示している. p: ここで上で構成した $\{X_k^{(\omega)}(m)\}$ を使うと

$$W_{j,\ell} = 1 + R(C, T(n_{otl})) \{X_k^{(\omega)}(m)\} C^{-1} : t, x_{D_k}$$

と書ける. 命題 (1.2.2) より $W_{j,\ell} \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{2})$ であり. 注意 (1.2.3) よりその評価は ℓ に依存しない. 一方 $(n_{otl} - A_0)^{-1} A_{n_{otl-j}} = C \sum_{i=1}^l X_{n_{otl-j}}^{(\omega)}(n_{otl}) C^{-1}$ であり. $p = \max |n_i - n_j|$ とおく時. $N_{i+2p}(C X_{n_{otl-j}}^{(\omega)}(n_{otl}) C^{-1}; \lambda) \leq \frac{MB^{n_{otl-j}}}{(n_{otl})^i}$ なる評価をもつ. 従って. $\bar{B}^{\ell} (n_{otl} - A_0)^{-1} A_{n_{otl-j}}$ も ℓ に無関係な評価をもつ.

$$W_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} B(Bt)^{\ell-1} [W_{j,\ell} \bar{B}^{\ell} (n_{otl} - A_0)^{-1} A_{n_{otl-j}}]$$

であり. [] 内は ℓ に無関係な評価をもち $\in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{2})$, また $\sum_{\ell=1}^{\infty} (Bt)^{\ell-1}$

は $Bt < 1$ で収束し結局 $W_j(t \times D_k) \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\sigma})$ を得る.

ii) $R_F \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\sigma})$ の証明. $R_F = \sum_{\ell=n_0+1}^{\infty} t^\ell R_\ell F_\ell$ はる形に書け. 更に,
 $R_\ell = R(CT(\ell)\{X_k^{\psi(m)}\}C^{-1}; t \times D_k)(\ell - A_0)^{-1}$ と書ける. 故に $R_\ell \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\sigma})$
 で評価は ℓ に無関係. 一方 $\exists \alpha > 0$ をとると $\alpha^{-\ell} F_\ell$ は ℓ に無関係
 な評価をもつ. 故に $R_F = \sum_{\ell=n_0+1}^{\infty} (\alpha t)^\ell R_\ell \cdot \frac{1}{\alpha^\ell} F_\ell \in \hat{\mathcal{P}}(\frac{1}{\sigma})$ を得る. g.e.d.

§2. Fuchs 双曲系.

前節で Fuchs 系に対する形式的な基本解 $W(t \times D_k)$ を構成した.
 もし形式的に $E(t \times \gamma) = W(t \times D_k) \delta(x - \gamma)$ とおいたものが hyperfunction
 として意味付けできれば, それは hyperfunction 内での Cauchy 問
 題の基本解を与える事になる. その為には双曲型の条件を必
 要とする. 最初に幾つかの定義を述べておこう.

定義 matrix $P = tD_t - A(t \times D_k)$ が次の 1)2)3) を満す時 Fuchs 双曲系という.

- 1) $P = tD_t - A(t \times D_k)$ は t に関し Volterra の意味で Fuchs 系.
- 2) $\hat{A}(t \times \xi) = (\sigma_{n_i - n_j + 1}(A_j)(t \times \xi))$ とおく時, $\det(t\tau - \hat{A}(t \times \xi)) = \lambda^\ell \hat{p}(t, x, \tau, \xi)$ と積の形に書ける. 但し $\ell = \text{matrix の size}$
- 3) $\hat{p}(t \times \tau, \xi) = 0$ の根 τ について, (t, x, ξ) が実数 $\Rightarrow \tau$ も実数.

定義 m 階の微分作用素 $P(t \times D_t, D_k)$ (単独高階) が 次の 1)2)3) を

を満たす時 weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型 (t に関し) という.

- 1) $P(t \times D_x D_x)$ は weight $(m-k)$ の Fuchs 型 (t に関し).
- 2) 主要表象 $\Omega_m(P) = t^k P_m(t \times \tau \xi)$ と積になっている.
- 3) $P_m(t \times \tau \xi) = 0$ の根 τ について $(t \times \xi)$ が実数 $\Rightarrow \tau$ も実数.

もし作用素が $(0, F \text{d}x_{n \infty})$ の近傍での Ω, \mathcal{O}_p の時は 3) の ξ を $(0, F \text{d}x_{n \infty})$ の近傍に限定して考える. この時各々を Fuchs マイクロ双曲系, Fuchs マイクロ双曲型と呼ぶことにする. なお weight m の Fuchs 双曲型は普通の双曲型である事に注意しよう.

本節では実領域の解析を行なうので $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, z = x + F \tilde{X} \in \mathbb{C}^n$ とする. まず §2.1 で $E(t, x, y) = W(t, x, D_x) \delta(x-y)$ に hyperfunction としての意味付けを与え Cauchy 問題の基本解を構成する. §2.2 では, 単独 Fuchs 双曲型の hyperfunction solution の構造を調べる. 具体的には, 局所可解性や斉次解の構造についてである.

§2.1. Fuchs 双曲系の Cauchy 問題の基本解.

最近 柏原-河合 [4] によって展開された方法を我々の場合に適用してゆく. 実変数と複素変数を区別する為, $x, y \in \mathbb{R}^n, z, w \in \mathbb{C}^n, \xi = \tau + F \tilde{\xi} \in \mathbb{C}^n, \xi^0 = (0, \dots, 0, 1)$ とおく. また, $\Phi_j(x, w) = \frac{1}{2\pi F} \frac{j!}{(-x, w)^{j+1}}$ (for $j \geq 0$) $= -\frac{1}{2\pi F} \frac{x, w^{j-1}}{(j-1)!} (\log(-x, w) - \psi(j))$ (for $j < 0$) とおく. 但し $\psi(j) = \text{digamma function}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に対し $\Phi_\alpha(x) = \prod_{j=1}^n \Phi_{\alpha_j}(x, w)$ とおく.

$P=tD_z-A(tzD_z)$ を $(0; dx_n)$ で定義された $\mathbb{A}.D.\mathcal{O}_p$ の Fuchs系, $F(tzD_z)$ を $\mathbb{A}.D.\mathcal{O}_p$, $R(tzD_z)$ を $\frac{1}{s}$ 次形式的 $\mathbb{A}.D.\mathcal{O}_p$ とする. 次の式が成立つとする.

$$t \frac{\partial}{\partial t} R(tzD_z) - A(tzD_z)R(tzD_z) = F(tzD_z)$$

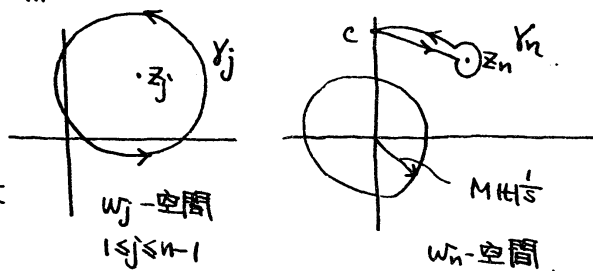
$A(tzD_z) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(tz)D_z^{\alpha}$ とおく時, $A(tzD_z)$ は $L(tz\omega) \equiv \sum_{\alpha} A_{\alpha}(tz)\Phi_{\alpha}(z-\omega)$ を積分核とする積分作用素となる. 一方 $F(tzD_z) = \sum_j F_j(tzD_z)$, $R(tzD_z) = \sum_j R_j(tzD_z)$ とおき, $H(tz\eta) = \sum_j F_j(tz\eta)\Phi_j(\langle z, \eta \rangle)$, $G(tz\eta) = \sum_j R_j(tz\eta)\Phi_j(\langle z, \eta \rangle)$ とおく. $F(tzD_z)$ は $\mathbb{A}.D.\mathcal{O}_p$ 故 $H(tz\eta)$ は $\{(tz\eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n; \exists t \in \mathbb{R}, |z| \in \mathbb{R}, |\eta| < \varepsilon |\eta|, \langle z, \eta \rangle \neq 0\}$ で正則な多価函数. $R(tzD_z)$ は $\frac{1}{s}$ 次形式的 $\mathbb{A}.D.\mathcal{O}_p$ の増大条件を満たすから, $G(tz\eta)$ が $\{(tz\eta); \exists t \in \mathbb{R}, |z| \in \mathbb{R}, |\eta| < \varepsilon |\eta|, |\langle z, \eta \rangle| > M|\eta|^{\frac{1}{s}}|\eta|\}$ で正則な多価函数になることがわかる. この時次の命題が成立つ.

命題 (2.1.1) 次の函数 $J(tz)$ は原点 $(0,0) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)$ の近傍で正則である.

$$J(tz) = t \frac{\partial}{\partial t} G(tz\eta^0) - \oint_{Y_1 \times \dots \times Y_n} L(tz\omega) G(t\omega\eta^0) d\omega - H(tz\eta^0), \quad \eta^0 = (0, \dots, 0)$$

とおく.

但し積分路は右図の様
な路で共通の定義領域に
含まれるものをとる.



更にもし P, F, R が微分 \mathcal{O}_p (or 形式的) ならば $J(tz) \equiv 0$ である.

(証明) 柏原-河合 [4] を参照されたい. そこでは $J(tz) = \frac{\partial}{\partial t} G(tz\eta^0) - \oint L(tz\omega) G(t\omega\eta^0) d\omega$ の場合に計算されているが, まったく同様

の計算が我々の場合も実行できる.

g. e. d.

$P = tD_t - A(t \times D_x)$ が Fuchs マイクロ双曲系の時, 条件 2)3) より "local Bochner's theorem" を使うと, $\exists M > 0$ s.t. $\{(t, z, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n; 0 < t < \delta, |z| < \delta, |\zeta| < \delta |s_n|, -\text{Im}(\zeta/s_n) > M(|y| + \sum_{j=1}^{n-1} |\text{Im}(s_j/s_n)|)\}$ 上で $\det(tI - \hat{A}(t, z, \zeta))$ が非零となる. (但し $z = x + \sqrt{-1}y$, $\zeta = (s_1, \dots, s_{n-1})$). 更にもし $\hat{A}(t, z, \zeta)$ が巾零行列ならば $M=0$ にとれる. この事に注意すると次が成立つ.

命題(2.1.2) P が Fuchs マイクロ双曲系の時, $\exists \delta_1 < \delta, \exists M_1 \gg 1$ が存在して, $G(t, z, \zeta)$ は $\{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n; 0 < t < \delta_1, |z| < \delta_1, \text{Im} z_n > M_1 |\text{Im} z_n| + \sum_{j=1}^{n-1} |\text{Im} z_j|\}$ で解析的となる. もし $\hat{A}(t, z, \zeta)$ が巾零ならば, $M_1=0$ にとることが出来る. (証明). 柏原-河合 [4] §4 の論法を我々の場合に移しかえればよい. $\hat{A}(t, z, \zeta)$ が巾零ならば $\det(tI - \hat{A}(t, z, \zeta)) = t^n$ だから明らかである.

g. e. d.

以上を準備として Fuchs 双曲系の基本解を構成しよう.

定理(2.1.2) $P(t \times D_t, D_x) = tD_t - A(t \times D_x)$ を Fuchs 双曲系とする. その特性固有値 $\{n \in \mathbb{Z}; n > n_0 \gg 0\}$, $\lambda = P$ の F-order, $A(t \times D_x) = \sum_{i=0}^{n_0} t^i A_i(x, D_x)$ とおく. この時次の条件を満たす超関数 $E_0(t, x, y), \dots, E_{n_0}(t, x, y)$ が存在する.

$$(1) P(t \times D_t, D_x) E_j(t, x, y) = \frac{1}{j!} (j! t^j - \sum_{i=0}^{n_0-j} t^{j+i} A_i(x, D_x)) \delta(x-y) \quad 0 \leq j \leq n_0.$$

$$(2) \text{Supp } E_j(txy) \subset \{(txy) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; |x-y| \leq M|t|^{1/2}\}$$

$$(3) S-S(E_j) \subset \{(txy); F_1(\tau dt + \xi dx + \eta dy) \in \infty; |x-y| \leq M|t|^{1/2}, |\xi + \eta| \leq M|t|^{1/2}|\xi|, |\tau| \leq M|\xi|\}$$

$$(4) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} E_j(txy) \Big|_{t=0} = \delta_{j\nu} \delta(x-y) \quad 0 \leq \nu, j \leq n_0.$$

(証明) j を固定し $E_j(txy)$ を構成する. δ で展開した形式的な意味で次の Cauchy 問題を考える.

$$\begin{cases} t \frac{\partial}{\partial t} W(tzD_z) - A(tzD_z) W(tzD_z) = \frac{1}{j!} (jt^j - \sum_{i=0}^{n_0-j} t^{j+i} A_i(zD_z)) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} W(tzD_z) \Big|_{t=0} = \delta_{j\nu} \cdot 1 \quad 0 \leq \nu \leq n_0. \end{cases}$$

data は系(1.1.5)の適合条件を満たす様にとえられているので $\hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{2})$ の中に一意的解をもつ. それを $W(tzD_z) = \sum_{j=0}^{\infty} W_j(tzD_z) \in \hat{\mathcal{D}}(\frac{1}{2})$ とおく. $G(tz\gamma) = \sum_j W_j(tz\gamma) \Phi_{n-1+k}(\langle z, \gamma \rangle)$, $\frac{1}{j!} (jt^j - \sum_{i=0}^{n_0-j} t^{j+i} A_i(zD_z)) = F(tzD_z) = \sum_j F_j(tzD_z)$ と齊次部分にわけて, $H(tz\gamma) = \sum_k F_k(tz\gamma) \Phi_{n-1+k}(\langle z, \gamma \rangle)$ とおく. すると $\gamma^0 = (0, \dots, 0, 1)$ とおくと命題(2.1.1)(2.1.2)が使える.

i) 命題(2.1.2)より $G(tz\gamma^0)$ は $\{(tz) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n; 0 < |t| < \delta, |z| < \delta, \text{Im } z_n > M|t| \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\text{Im } z_i|\right)\} \cup \{(tz) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n; |t| < \delta, |z| < \delta, |z_n| > M|t|^{1/2}\}$ で解析的 z に関し正則である. 従って $G(tz\gamma^0)$ を z に関し複素解析的パラメータとなる超函数とみなす時, 上の領域より $\text{Im } z_n > 0$ から実軸への境界値として超函数を定義できる. それを $u(t, x)$ とおく.

ii) 命題(2.1.1)より, 次が成り立つ.

$$t \frac{\partial}{\partial t} G(tz\gamma^0) - \oint L(tz\omega) G(t\omega\gamma^0) d\omega - H(tz\gamma^0) = 0.$$

これは積分路表示した時の超函数の積分の理論より次を意味

する. $t \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - A(t, x, D_x) u(t, x) = \frac{1}{j!} (j t^j - \sum_{i=0}^{n-j} t^{j+i} A_i(x, D_x)) \Phi_{n-1}(\langle x, \gamma \rangle + i0)$

故に構成した超函数 $u(t, x)$ は, 次の 1)' 2)' 3)' を満たす.

$$1)' P(t, x, D_t, D_x) u(t, x) = \frac{1}{j!} (j t^j - \sum_{i=0}^{n-j} t^{j+i} A_i(x, D_x)) \Phi_{n-1}(\langle x, \gamma \rangle + i0)$$

$$2)' S-S(u(t, x)) \subset \{(t, x; \mathcal{F}(\tau dt + \langle \xi dx \rangle)^\infty) : |x_n| \leq M|t|^{1/2}, |\xi| \leq M|t|^{1/2}, |t| \leq M|\xi|\}$$

$$3)' \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} u(t, x) \Big|_{t=0} = \delta_{j\nu} \Phi_{n-1}(\langle x, \gamma \rangle + i0)$$

所で $u(t, x)$ を構成する際 $\gamma = (0, \dots, 0, 1)$ に固定したが, P は微分作用素なので $|\gamma|=1$ 全体で定義されている. 故に γ を動かせる. また $\Phi_{\nu}(\langle z, \gamma \rangle)$ の z についても動かして $\Phi_{\nu}(\langle z-w, \gamma \rangle)$ としても同様に実行できる. 従って, γ, x を動かして構成した超函数を $u(t, x, \gamma)$ とすると次の 1)'' 2)'' 3)'' を満足する.

$$1)'' P(t, x, D_t, D_x) u(t, x, \gamma) = \frac{1}{j!} (j t^j - \sum_{i=0}^{n-j} t^{j+i} A_i(x, D_x)) \Phi_{n-1}(\langle x-y, \gamma \rangle + i0)$$

$$2)'' S-S(u) \subset \{(t, x, \gamma; \mathcal{F}(\tau dt + \langle \xi dx \rangle + \langle \zeta dy \rangle + \langle \rho d\gamma \rangle)^\infty) : |\langle x-y, \gamma \rangle| \leq M|t|^{1/2}, |t| \leq M|\zeta|, |t| \leq M|\rho|, |\xi| \leq M|t|^{1/2}, |\zeta| \leq M|t|^{1/2}, |\rho| \leq M|t|^{1/2}\} \quad (\text{詳しくは, 柏原・河合図参照}).$$

$$3)'' \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} u(t, x, \gamma) \Big|_{t=0} = \delta_{j\nu} \Phi_{n-1}(\langle x-y, \gamma \rangle + i0) \quad 0 \leq \nu \leq n.$$

そこで今超函数 $E_j(t, x, \gamma)$ を次の様に定義する.

$$E_j(t, x, \gamma) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{|\gamma|=1} u(t, x, \gamma) \omega(\gamma),$$

$$\text{但し } \omega(\gamma) = \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu-1} \gamma_{\nu} d\gamma_1 \wedge \dots \wedge d\gamma_{\nu-1} \wedge d\gamma_{\nu+1} \wedge \dots \wedge d\gamma_n$$

ここで次の Radon 変換の公式を思い出そう.

$$\delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{|\gamma|=1} \Phi_{n-1}(\langle x-y, \gamma \rangle + i0) \omega(\gamma).$$

Radon変換の公式より $E_j(t; x, y)$ は次の 1) 2) 3) をみたす.

$$1) P(t; x, D_x) E_j(t; x, y) = \frac{1}{j!} (jt^j - \sum_{i=0}^{n-j} t^{j+i} A_i(x, D)) \delta(x-y)$$

$$2) S-S(E_j) \subset \{ (t; x, y) : \int_0^t (\|dx\| + \langle \eta, dy \rangle) < \infty : |x-y| \leq M|t|^{1/2}, |x+y| \leq M|t|^{1/2}, |t| \leq M|\xi| \}$$

$$3) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\nu E_j(t; x, y) \Big|_{t=0} = \delta_j^\nu \delta(x-y) \quad 0 \leq \nu \leq n.$$

最後に $\text{Supp } E_j(t; x, y) \subset \{ (t; x, y) : |x-y| \leq M|t|^{1/2} \}$ を示せば証明は完了する. まず $|x-y| \neq 0$ の時次の a) b) が成立つ事に注意しよう.

(a) $|x-y| \neq 0$ の時.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_j(t; x, D_x) \int_{|\eta|=1} \frac{\omega(\eta)}{\langle x-y, \eta \rangle + i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\eta|=1} \frac{W_j(t; x, \eta)}{\langle x-y, \eta \rangle + i\varepsilon} \omega(\eta) = 0.$$

(b) $|x-y| \neq 0$ の時.

$$\left| \int_{|\eta|=1} \frac{W_j(t; x, \eta)}{\langle x-y, \eta \rangle + i\varepsilon} \omega(\eta) \right| \leq C_\delta \frac{(M\delta^{1/2})^j}{\delta!} \frac{A}{(|x-y|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}(n+j)}}.$$

(但し A は定数).

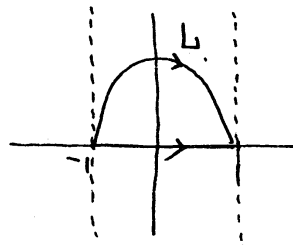
(a) はよく知られている. (b) は積分路変更による. 実際 $|x-y| = r$, $(x-y) = (r, 0, \dots, 0)$ と回転しておく. (b) の積分は次の様に書ける.

$$\int_{|\eta|=1} \frac{W_j(t; x, \eta)}{(r\eta_1 + i\varepsilon)^{n+j}} \omega(\eta) = \int_{-1}^1 \frac{dz_1}{(r z_1 + i\varepsilon)^{n+j}} \int_{|\eta'|=\sqrt{1-z_1^2}} R_j(t; x, \eta, \eta') \omega(\eta')$$

左辺の η_1 に注目すると被積分項は $-1 < \text{Re } \eta_1 < 1$, $\eta_1 \neq -\frac{i\varepsilon}{r}$ で正則となる. 故に $-1 \rightarrow 1$ の積分路を右図の L の

様に変更すると

$$= \int_L \int_{|\eta'|=\sqrt{1-\eta_1'^2}} \frac{R_j(t; x, \eta, \eta')}{(r\eta_1 + i\varepsilon)^{n+j}} d\eta_1 \omega(\eta')$$



この式で絶対値をとれば (b) を得る. (a) (b) を使って, $|x-y| > M|\mathfrak{H}|^{\frac{1}{2}}$ ならば $E_j(t, x, y) = 0$ となる事を導びよう.

$$I_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi\mathfrak{H})^{n-1}} \int_{|\eta|=1} \left\{ \sum_j W_j(t, x, \eta) \Phi_{n-1+j}(\langle x-y, \eta \rangle + i\varepsilon) \right\} \omega(\eta).$$

$$\tilde{I}_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi\mathfrak{H})^{n-1}} \sum_j W_j(t, x, D_x) \int_{|\eta|=1} \Phi_{n-1}(\langle x-y, \eta \rangle + i\varepsilon) \omega(\eta)$$

とおく.

$\varepsilon > M|\mathfrak{H}|^{\frac{1}{2}}$ の時, I_ε の被積分項は絶対収束する. 従って項別積分により $I_\varepsilon = \tilde{I}_\varepsilon$, 解析函数 ($\varepsilon > 0$) の一致の定理より $\varepsilon > 0$ で $I_\varepsilon = \tilde{I}_\varepsilon$. 故に $E_j(t, x, y) = [\tilde{I}_\varepsilon$ の $\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0$ の境界値として定義される超函数] となる. $|x-y| > M|\mathfrak{H}|^{\frac{1}{2}}$ ならば (b) より \tilde{I}_ε は絶対収束して $\varepsilon = 0$ も含めて近傍で収束 ($|x-y|^2 + \varepsilon^2 > M|\mathfrak{H}|^{\frac{1}{2}}$ 故). 故に \tilde{I}_ε の $\varepsilon \rightarrow 0$ の境界値 $= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{I}_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi\mathfrak{H})^{n-1}} \sum_j \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_j(t, x, D_x) \int_{|\eta|=1} \Phi_{n-1}(\langle x-y, \eta \rangle + i\varepsilon) \omega(\eta) = 0$. が (a) より得られる. 故に $|x-y| > M|\mathfrak{H}|^{\frac{1}{2}}$ ならば $E_j(t, x, y) = 0$ となり $\text{Supp } E_j(t, x, y) \subset \{|x-y| \leq M|\mathfrak{H}|^{\frac{1}{2}}\}$ を得る. q. e. d.

系(2.1.4) P を Fuchs 双曲系, 特性固有値 $\{n \in \mathbb{Z} : n > n_0 \geq 0\}$ とし, 次の Cauchy 問題を考える.

$$P(t, x, D_x)U(t, x) = 0, \quad S-S(U) \neq (0, \pm F dt \infty), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\nu U(t, x)|_{t=0} = U_\nu(x), \quad 0 \leq \nu \leq n_0.$$

この Cauchy 問題が, 超函数 $U_0(x), \dots, U_{n_0}(x)$ に対して超函数解 $U(t, x)$, s.t. $S-S(U) \neq (0, \pm F dt \infty)$ を持つ為の必要十分条件は次の (*) を満す事である.

$$(*) \quad \forall 0 \leq l \leq n_0, \quad (l - A_0) U_l / l! = \sum_{i=1}^l A_i U_{l-i} / (l-i)!$$

$$(\text{但し } A(t, x, D_x) = \sum t^\alpha A_\alpha(x, D) \text{ とする})$$

(証明). data $u_\nu(x)$ が (*) を満す時定理の基本解 $E_j(t, x, y)$ を使うと、
 解 $u(t, x)$ が $u(t, x) = \sum_{j=0}^{n_0} \int E_j(t, x, y) u_j(y) dy$ と書ける。次に Cauchy 問題
 の解 $u(t, x)$ が存在する時、 $P \cdot u = 0$ より $(\frac{\partial}{\partial t})^k P u = 0$ 従って $(\frac{\partial}{\partial t})^k (P u)|_{t=0} = 0$
 を得る。具体的に $(\frac{\partial}{\partial t})^k (P u)|_{t=0} = 0$ を表示すると、これは関係式 (*)
 に他ならない。 g. e. d.

以上 matrix の場合について述べて来たが、単独の場合は matrix
 に帰着できる。従って、Fuchs 双曲型についても同様の結果を得
 る。念の爲、定理の形で述べておこう。

定理 (2.1.5) $P(t, x, D_t, D_x)$ を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型。 $\rho(\lambda, 0) \neq 0$ for
 $\lambda \geq m-k, \lambda \in \mathbb{Z}$ とする。 $\Delta = \min(m, k+1)$ 。この時次の条件を満た
 す超函数 $E_0(t, x, y), \dots, E_{m-k-1}(t, x, y)$ が存在する。

- 1) $P(t, x, D_t, D_x) E_\nu(t, x, y) = 0 \quad 0 \leq \nu \leq m-k-1,$
- 2) $\text{Supp } E_\nu(t, x, y) \subset \{(t, x, y) : |x-y| \leq M|t|^{1/\Delta}\}$
- 3) $S-S(E_\nu) \subset \{(t, x, y) : \forall (\tau, \xi, \zeta) \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leq M|t|^{1/\Delta}, |\xi+\zeta| \leq M|t|^{1/\Delta}|\xi|, |\zeta| \leq M|\xi|\}$
- 4) $(\frac{\partial}{\partial t})^j E_\nu(t, x, y)|_{t=0} = \int \delta(\alpha-y) \quad 0 \leq j, \nu \leq m-k-1,$

(証明). 定理 (1.1.7) の様に matrix 表示する。 $t \cdot W(t, x) = 0, S-S(W) \neq (0, \pm \sqrt{t} dt)$
 ならば $W(t, x) = 0$ である事に注意すれば良い。 g. e. d.

系 (2.1.6) (2.1.5) の仮定のもとで次の Cauchy 問題を考える。

$$P(t \times D_t D_x) U(t, x) = 0 \quad S-S(U) \in (0, \pm F dt \infty), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^v U(t, x)|_{t=0} = U_0(x), \quad 0 \leq v \leq m-k-1.$$

Cauchy 問題は. 任意の超函数 $U_0(x), \dots, U_{m-k}(x)$ に対し. 超函数解 $U(t, x)$ が. 大

$S-S(U) \in (0, \pm F dt \infty)$ を必ずもつ.

(証明). 明らか. $U(t, x) = \sum_{j=0}^{m-k-1} E_j(t, x, y) U_j(y) dy.$ g. e. d.

上の議論全体は. P が $(0, dx \infty)$ での \mathbb{D}_p の場合も. "超函数" の所を "microfunction" に変えれば全て成立つ. つまり. microfunction 枠内でも Cauchy 問題は. 基本解を構成できる.

§2.2. Fuchs 双曲型方程式の超函数解の構造.

本節では $P(t \times D_t D_x)$ が Fuchs 双曲型 (for t) の時. 次の完全列の内容を調べてゆきたい. $0 \rightarrow \text{Ker } P \rightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{P} \mathcal{B} \rightarrow \text{Coker } P \rightarrow 0.$

weight 0 の Fuchs 双曲型は普通の双曲型故 $\text{Ker } P \cong \mathcal{B}^m$ (\mathcal{B} は x -変数のみの超函数). $\text{Coker } P = 0$ である事に注意しよう.

$P(t \times D_t D_x)$ を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型, $\tilde{P} = t^{-k} P$ とおく時. \tilde{P} は $\{t=0\}$ に特異点をもつ有理型函数を係数にもつ. ここで一般に. P を有理型函数を係数とする m 階微分作用素とする時.

$D_x P$ が $\{y=0\}$ に関し non-characteristic とは. $\sigma_m(p)(x, d\varphi)$ が正則であって. かつキ0 なる事.

2) P が $d\varphi$ 方向に双曲型とは $\Omega_m(P)$ が正則で、かつ $d\varphi$ 方向に $\Omega_m(P)$ が双曲型なる事、

と呼ぶ事にしよう。この時 Bony-Schapira [6] [7] で展開された議論は上の D2) の形の微分作用素迄。精密化する事ができる。簡単にその辺をスケッチしてみよう。

$x \in \mathbb{R}^n$ もの複素化 $z \in \mathbb{C}^n$ 、 \mathbb{C}^n と \mathbb{R}^{2n} とを内積 $\langle z, \zeta \rangle = \sum z_i \bar{\zeta}_i \mapsto \operatorname{Re} \langle z, \zeta \rangle$ によって同一視する。 Γ を開凸錐、 $B(0, \varepsilon)$ を原点中心、半径 ε の開球体、 $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap B(0, \varepsilon)$ と書く。 I を $(2n-1)$ 次元球面上の凸 proper 閉部分集合、 U を \mathbb{C}^n の開集合、 ∂U をその境界とする。 U の境界の点 $z_0 \in \partial U$ で性質 $C(z_0, I)$ をもつとは次の条件を満す事をいう。

$C(z_0, I)$: 任意の近傍 $I' \supset I$ に対し或る近傍 $V \ni z_0$ 、 $\varepsilon > 0$ が存在して $V \cap U + \Gamma'_\varepsilon \subset U$ となる。(Γ' は I' の polar の内部)

命題 (2.2.1) $P(z, D_z)$ を ∂U 及び U の外部にのみ特異点を許す m 階微分作用素とし、次の D2) を満たすとする。

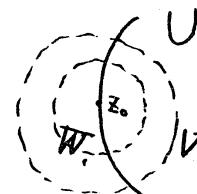
1) 開集合 U は $z_0 \in \partial U$ で性質 $C(z_0, I)$ をもつ。

2) P は z_0 で I 方向に non-characteristic

この時任意の z_0 の近傍 V に対し、或る近傍 W :

$V \supset W \ni z_0$ が存在して次の性質をもつ。つまり

* $\forall f(z) \in \mathcal{O}(U \cap V)$, $\exists u(z) \in \mathcal{O}(U \cap W)$ s.t. $Pu = f$ on $U \cap W$.



系(2.2.2) $P(z, D_z)$ を m 階微分作用素とし次の 1) 2) 3) を満たす.

- 1) $\sigma_m(P) = \varphi(x) p_m(x, \xi)$ は積の形に書ける.
- 2) $p_m(x, \xi)$ は $\xi^0 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ 方向に non-characteristic (i.e. $p_m(0, \xi^0) \neq 0$)
- 3) φ の複素化を $\tilde{\varphi}$ とする時, $\tilde{\varphi}(z) \neq 0$ on $\{z = x + iy \in \mathbb{C}^n; |x| < \varepsilon, y = t\xi^0, 0 < t < \varepsilon\}$.

この時, $P(x, D_x): C_{(0, \infty)}^{\infty} \rightarrow C_{(0, \infty)}^{\infty}$ は全射である.

(系の証明) $\xi^0 = (0, \dots, 0, 1)$ とする. 任意の $\mu \in C_{(0, \infty)}^{\infty}$ をとる. C の flabbiness より $\exists f \in \mathcal{B}$ s.t. $\text{sp}(f) = \mu$ とする. ここで f は $U_\varepsilon = \{z = x + iy, |x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon, |x_1| + \dots + |x_n| < M|y|, 0 < M < 1\}$ 上の正則函数 $\tilde{f}(z)$ の境界値として実現できる. M を十分小さくとり I を ξ^0 に十分近い方向の集合をとると, U_ε は原点 $0 \in \partial U_\varepsilon$ で性質 $C(0, I)$ をもつ. 一方 $\tilde{P} = \frac{1}{\tilde{\varphi}} P$ は U_ε 上に singularity をもたない. (local Bochner's theorem による) 故に命題(2.2.2)より領域を縮めれば $\tilde{P}(z, D_z) \tilde{u}(z) = \frac{1}{\tilde{\varphi}(z)} \tilde{f}(z)$ は U_ε' ($\varepsilon' < \varepsilon$) で解 $\tilde{u}(z)$ をもつ. $\tilde{u}(z)$ の境界値の決める超函数を $u(x)$ とすると $Pu = f$ とする. 故に $P \cdot \text{sp}(u) = \text{sp}(f) = \mu$ とはり全射がいえた. *g.e.d.*

特異点をもつ作用素 P の双曲型についても次の形にまとめられる. $\mathbb{C}^n \ni z = x + iy, \xi^0 \in \mathbb{R}^n - \{0\}, B(x, r) \subset \mathbb{R}^n, B(x, r) = B(x, r) \cap \{\langle x, \xi^0 \rangle = 0\}$ と書く. $K(a, \delta)$ を $B(0, a)$ と $a\delta\xi^0$ との \mathbb{R}^n の中の開凸包, $\Gamma' = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle y, \xi^0 \rangle = 0 \text{ 平面内の開凸錐}\}$ Γ を \mathbb{R}^n 内の開凸錐とする.

命題(2.2.3) $P(\alpha, D)$ を原点での微分作用素 (特異点を許す).

1) $\overline{B(0, r)}$ の各点で ξ° 方向に双曲型.

2) $P(z, D)$ の低階の特異点は $\{z \in \mathbb{C}^n; \langle z, \xi^\circ \rangle = 0\}$ に含まれる.

この時次の性質をみたす $\delta > 0$ が存在する.

* $0 < a < r$. $f(z) \in \mathcal{O}(B(0, a) + \sqrt{r} \Gamma'_\varepsilon)$ か Γ' を含む Γ に対し $P(z, D)f$

$(z) \in \mathcal{O}(\{K(a, \delta) + \sqrt{r} \Gamma_{\varepsilon}\} \setminus \{\langle z, \xi^\circ \rangle = 0\})$ ならば, Γ を適当に Γ_2 と

$\Gamma_2 \supset \Gamma'$ にとりかえて $f(z) \in \mathcal{O}(K(a, \delta) + \sqrt{r} \Gamma_{\varepsilon})$ とできる.

命題(2.2.1) (2.2.3) の証明は Boney-Schapira [6], [7] と同じなので省略する. 両命題に定理(1.1.7)を合わせると再び Cauchy 問題の解の存在を得る.

定理(2.2.4) P を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型, $\varrho(u) \neq 0$ for $\lambda \in \mathbb{Z}$,

$\lambda \geq m-k$. とする. この時次の Cauchy 問題

$$\begin{cases} P \cdot u(t, x) = f(t, x), & S-S(f) \neq (0, \pm \sqrt{r} dt \otimes \infty), \\ S-S(u) \neq (0, \pm \sqrt{r} dt \otimes \infty), & \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^v u(t, x) \Big|_{t=0} = u_v(x) \quad 0 \leq v \leq m-k-1 \end{cases}$$

は, 任意の data $f(t, x), u_0(x), \dots, u_{m-k-1}(x)$ に対し解 $u(t, x)$ を必ずもつ.

(証明). Boney-Schapira [7] とまったく同様にできる g.e.d.

定理(2.2.5) (2.2.4) の仮定のもとでは, $P: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ は全射である.

つまり局所可解性が成り立つ.

(証明) 系(2.2.2)より $P: C_{(0, \pm \infty)} \rightarrow C_{(0, \pm \infty)}$ は全射である. 故に $\forall f \in B$ に対し適当な $v \in B$ をとって $f - Pv$ について $S-S(f-Pv) \neq (0; \pm \infty)$ とできる. (2.2.4)より $\exists u \in B$ s.t. $Pu = f - Pv$. 故に $P(u+v) = f$ とはり局所可解がいえる. g. e. d.

以上によって $\text{Coker } P = 0$ が示された. 次に $\text{ker } P$ の構造をしるべたい. その指針となるのは次の3つの完全列である.

$$\alpha^{\pm} B = \{u \in B, S-S(u) \neq (0, \pm \infty)\}, \quad \alpha B = \alpha^+ B \cap \alpha^- B$$

$$B(\pm)^P = \{t > 0 \text{ (} t < 0 \text{) なる領域での解}\} \quad \text{とおく.}$$

命題(2.2.6). P を weight $(m-k)$ の Fuchs 双曲型 (for t). $C(\lambda, 0) \neq 0$ for $\lambda > m-k, \lambda \in \mathbb{Z}$ とする. この時次の2つは完全列となる.

$$1) \quad 0 \rightarrow \alpha B^P \xrightarrow{\alpha} \alpha^+ B^P \oplus \alpha^- B^P \xrightarrow{\beta} B^P \rightarrow 0,$$

$$2) \quad 0 \rightarrow \alpha B^P \xrightarrow{\alpha} B^P \xrightarrow{\beta} C_{(0, +\infty)}^P \oplus C_{(0, -\infty)}^P \rightarrow 0.$$

更に $\lambda \in \mathbb{Z}, \lambda \leq -1$ に対しても $C(\lambda, 0) \neq 0$ ならば, 次の完全列を得る.

$$3) \quad 0 \rightarrow B^P \xrightarrow{\alpha} B^{(+)} P \oplus B^{(-)} P \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow 0.$$

(証明). 1) の証明. β が全射なる事のみいえばよい. C の flabbiness より, $u \in B^P$ は $u = u_+ - u_-$, $u_{\pm} \in \alpha^{\pm} B$ と表わせる. $Pu = 0$ 故 $Pu_+ = Pu_- = f \in \alpha B$. 定理(2.2.4)より $\exists w \in \alpha B, Pw = f$ となる. 故に, $P(u_{\pm} - w) = 0$, $u_{\pm} - w \in \alpha^{\pm} B$, $u = (u_+ - w) - (u_- - w)$ $\therefore \beta$ は全射.
2) の証明も 1) と同様に C の flabbiness と (2.2.4) より得られる.

3) の証明. P の形式的共役を P^* と書く時 $(-1)^m P^*$ も weight $(m-k)$ の Fuchs 型. その特性多項式を $E^*(x, \lambda)$ とおく時, 次を得る.

$$(-1)^k E^*(\lambda, x) = \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-m+k+1) \{(-\lambda-1)(-\lambda-2) \cdots (-\lambda-k) + a_1(\omega)(-\lambda-1) \cdots (-\lambda-k+1) + \cdots + a_k(\omega)\}.$$

従って, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \leq -1$, $E(\lambda, 0) \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \geq m-k$, $E^*(\lambda, 0) \neq 0$ となる. 定理 (1.1.7) より $0 \rightarrow {}'a^{m-k} \rightarrow a|_S \xrightarrow{P^*} a|_S \rightarrow 0$, ($S = \{t=0\}$) を得る. 小松河合 [8] の論法で双対をとると $0 \rightarrow \mathcal{H}_S^0(\mathcal{B}) \xrightarrow{P} \mathcal{H}_S^0(\mathcal{B}) \rightarrow {}'B^{m-k} \rightarrow 0$ を得る. これより $\alpha =$ 単射なる事が示された. 更に小松河合 [8] と P の局所可解性より次を得ることは易しい.

$$b: (B^{(+)} P \oplus B^{(-)} P) / B^P \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_S^0(\mathcal{B}) / P \mathcal{H}_S^0(\mathcal{B}) \cong {}'B^{m-k}.$$

よって 3) が証明された.

g. r. d.

命題 (2.2.6) より, $\text{Ker } P$ の研究は, $a^\pm B^P$, $a B^P$, $C_{(0, \pm i\pi)}^P$, $B^{(\pm)} P$ の研究に帰着される. 現在次の予想のもとに研究を進めているが, まだ詳しくは解明されていない. 詳細については今後の研究を待たきたい.

予想 1 \mathcal{B} を x -変数超函数の芽とする時, $a^\pm B^P \cong {}'B^m$,

$$a B^P \cong {}'B^{m-k}, \quad C_{(0, \pm i\pi)}^P \cong {}'B^k, \quad B^{(\pm)} P \cong {}'B^m,$$

予想 2 上の 3 つの完全列は分解している.

予想 3 $Pu(x) = 0$, $S = S(\omega) \neq (0, \pm i\pi)$, $(\frac{\partial}{\partial t})^\nu u|_{t=0} = 0$ $0 \leq \nu \leq m-k-1$

ならば $u(x) \equiv 0$ である. (予想 3 と Cauchy 解の存在とから

$aB^P \cong 'B^{m-k}$ が出る事に注意しよう)

$\sigma_m(P) = t^k D_t^m$ の場合は上の予想は証明できる。その詳細を次節で述べてゆきたい。

§3. 巾零 Fuchs 系

佐藤・河合・柏原 [9] は、 $\sigma_m(P) = D_t^m$ の m 階 (擬) 微分作用素について、方程式 $Pu = 0$ と $D_t^m u = 0$ とが同値である事を証明している。これに対応する結果を我々の Fuchs 型の場合に導びよう。 $\sigma_m(P) = t^k D_t^m$ なる Fuchs 型に相当する matrix 表示は次の通りである。

1) $P = tD_t - A(t \times D_x)$ は Volwiel の意味の Fuchs 系

2) $\hat{A}(t \times \tau \xi) = (\sigma_{n_i - n_j + 1}(A_{ij}))$ が巾零行列。

今後 1) 2) を満たす作用素を巾零 Fuchs 系と呼び、その標準形を求めてゆく。§31 では、方程式 $(tD_t - A(t \times D_x))u = 0$ と $(tD_t - A(0 \times D_x))u = 0$ とが同値である事を示す。§32 ではその応用として、Cauchy 解の一意性、 $aB^P \cong 'B^{m-k}$, $a^+B^P \cong 'B^m$ を $\sigma_m(P) = t^k D_t^m$ の場合に証明する。

§31. 巾零 Fuchs 系の標準形

$(t, x) \in C \times C^n$, $P = tD_t - A(t \times D_x)$ を $(0, dx_{n+1}) \in C \times P^* C^n$ での $\mathfrak{D} \cdot \mathcal{O}_p$ からなる巾零 Fuchs 系とする。 $(t, x, x_n) \rightarrow (e^{i\theta_1 t}, x', e^{i\theta_2 x_n})$ と変換しても。

P はやはり巾零 Fuchs 系である事と命題(2.12)の後半に注意すれば次の命題を得る.

命題(3.1.1) $P=tD_t-A(txD_t)$ を巾零 Fuchs 系. $F(txD_t)$ を $\mathbb{C}D_t \otimes \mathbb{C}_p$. $R(txD_t)$ を 1 次形式的 $\mathbb{C}D_t \otimes \mathbb{C}_p$ とし次関係式を満たしているとする.

$$t \frac{\partial}{\partial t} R(txD_t) - A(txD_t)R(txD_t) = F(txD_t)$$

この時 $R(txD_t)$ は無限階の $\mathbb{C}D_t \otimes \mathbb{C}_p$ となる.

(証明) $G(t,x,\eta) = \sum_j R_j(t,x,\eta) \Phi_j(x,\eta)$ とおく. (但し $R(txD_t) = \sum_j R_j(txD_t)$).

$\eta^0 = (0, \dots, 0, 1)$ とおき上の注意と命題(2.12)より. $G(t,x,\eta^0)$ は $\bigcup_{\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}} \{ (e^{i\theta_1}t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n; 0 < e^{i\theta_1}t < \delta, |x| < \delta, \text{Im}(e^{i\theta_2}x_n) > 0 \} \cup \{ (tx) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n; |t| < \delta, |x| < \delta, |x_n| > M|t|^{1/2} \}$

で正則多価函数となる. 故に結局. $G(t,x,\eta^0)$ は $\{ (tx) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n; |t| < \delta, |x| < \delta, x_n \neq 0 \}$ で正則. 所で定理(2.13)の証明で注意した様に η^0 を動かしてもよい. 更に $\Phi_j(x,\eta)$ の x も動かして $x-y$ とできる. 従って. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} R_j(t,x,\eta) \Phi_j(x-y,\eta)$ は $\{ (tx, y, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m; |t| < \delta, |x| < \delta, |y| < \delta, |x-y| < 1, |\eta - \eta^0| < 1, \langle x-y, \eta \rangle \neq 0 \}$ で正則となる. 今 $p = \langle y, \eta \rangle$ とおくと $\sum_{j=-\infty}^{\infty} R_j(x, y, \eta) \Phi_j(x, y, \eta) - p$ が $p \neq \langle x, \eta \rangle$ の領域で収束する事を意味する. この式は $\mathbb{C}D_t \otimes \mathbb{C}_p$ の定義そのものに他ならない.

g. e. d.

今 $(tx_1, \dots, tx_\ell) = (tx') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\ell = \tilde{X}$, $(tx_1, \dots, tx_\ell, x_{\ell+1}, \dots, x_n, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m = \tilde{Y}$. $X = \{t=0\} \subset \tilde{X}$, $Y = \{t=0\} \subset \tilde{Y}$ とおく. (tx') に正則は holomorphic microfunction (又は

holomorphic hyperfunction) を $C_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$ ($B_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$) とおく. この時 $\mathfrak{D}, \mathcal{O}_p$ (diff.op) は $C_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$ ($B_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$) に作用し, $u(txy) \in C_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$ ($B_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$) に対し $u|_{t=0} \in C_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$ ($B_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$) となる. 従って, $C_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}, B_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$ の中で, Cauchy 問題を考える事ができる. ($C_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}, B_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$ 等の定義性質については, 佐藤河合, 相原 [9] を参照されたい. 大雑把に言えば, $C_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}, B_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$ は, $\mathfrak{D}, \mathcal{O}_p$ により diff.op を積分作用素として表わした時, その積分核となる函数のつくる層である.)

定理(3.1.2) $P=tD_t-A(t \times D_x)$ 巾零 Fuchs 系. 特性固有値 $\in \{n \in \mathbb{Z}, n > n_0 \geq 0\}$ とし, 次の Cauchy 問題を考える.

$$\begin{cases} Pu(txy) = f(txy), & u(txy), f(txy) \in C_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1} \text{ (又は } B_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1} \text{)}. \\ (\frac{\partial}{\partial t})^{\nu} u(txy)|_{t=0} = u_{\nu}(xy), & 0 \leq \nu \leq n_0, \quad u_{\nu}(xy) \in C_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1} \text{ (又は } B_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1} \text{)}. \end{cases}$$

この Cauchy 問題が $f(txy), u_0(xy), \dots, u_{n_0}(xy)$ に対して解をもつ為の必要十分条件は次の (*) を満たす事であり, その時解は一意的である. $A(t \times D_x) = \sum t^{\alpha} A_{\alpha}(x \times D_x)$ とする $f(txy) = \sum t^{\alpha} f_{\alpha}(xy)$,

$$(*) \quad 0 \leq l \leq n_0, \quad (l - A_0) u_l / l! = \sum_{i=1}^l A_i u_{l-i} / (l-i)! + f_l.$$

(証明). $C_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1} \otimes U_{x,y}$ は $P(t \times D_x \times D_y)$ なる形の $\mathfrak{D}, \mathcal{O}_p$ 全体と一致し, $f(txy) \in C_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$ は $f(txy) = P(t \times D_x \times D_y) \delta(x) \delta(y)$ なる形に一意的に書ける. 従って, 上の Cauchy 問題は, $\mathfrak{D}, \mathcal{O}_p$ の Cauchy 問題 (81 の形) に書き直す事ができる. 81 の定理 (1.1.5) と命題 (3.1.1) より定理を得る. $B_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}$ についても同様.

g.e.d.

$P = tD_t - A(t \times D_x)$ を巾零 Fuchs 系とし. その特性固有値を $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ とする. $(00; dx_n - dy_n)$ で定義された $l^2 \times l^2$ matrix 巫 $D. \mathcal{O}_p$ を次の様に書く. $\otimes P(t \times y D_x D_y) = tD_t - I_\ell \otimes A(t \times D_x) + A^*(t \times y D_y) \otimes I_\ell$.

$$P_\otimes(t \times y D_x D_y) = tD_t - I_\ell \otimes A(t \times D_x) + A^*(t \times y D_y) \otimes I_\ell.$$

この時 $\otimes P, P_\otimes$ も巾零 Fuchs 系となり. その特性固有値は $\alpha_i - \alpha_j$ $1 \leq i, j \leq \ell$ となる. (但し $A^*(t \times y) = (A_y)^* = t(A_y^*)$ とおく.)

従って. 定理(3.1.2)と巫 $D. \mathcal{O}_p$ (diff op) が holomorphic microfunction (hyperfunction) を積分核とする積分作用素に他ならない事に注意すれば. 次の巾零 Fuchs 系の標準形を得る.

定理(3.1.3) $P = tD_t - A(t \times D_x)$ を $(0, dx_n, \infty)$ での巾零 Fuchs 系. 特性固有値の差を $\mathbb{Z} - \{0\}$ であるとする. この時. 可逆な巫 $D. \mathcal{O}_p$ の行列 $U(t \times D_x)$ が存在して. $(tD_t - A(t \times D_x))U(t \times D_x) = U(t \times D_x)(tD_t - A(t \times D_x))$ が成立つ. 更に P が微分作用素なら $U(t \times D_x)$ も微分作用素となる. (証明). 最初に次の Cauchy 問題を考えよう.

$$(E_1) (tD_t - A(t \times D_x))U(t \times D_x) = U(t \times D_x)(tD_t - A(t \times D_x)), \quad U(t \times D_x)|_{t=0} = 1_x.$$

ここで $tD_t U(t \times D_x) = t \frac{\partial}{\partial t} U(t \times D_x) - U(t \times D_x) \cdot tD_t$ であるから (E_1) とは

$$(E_2) t \frac{\partial}{\partial t} U(t \times D_x) - A(t \times D_x)U(t \times D_x) + U(t \times D_x)A(t \times D_x) = 0, \quad U(t \times D_x)|_{t=0} = 1_x.$$

所で巫 $D. \mathcal{O}_p U(t \times D_x)$ とは. $K(t \times y) dy = (K_{ij}(t \times y) dy)$ はる積分作用素に他ならないから. Cauchy 問題 (E_2) は holomorphic microfunction $K_{ij}(t \times y)$ に関する Cauchy 問題に書き直すことができる. (E_2) の (i, j)

成分を $K_{\mu\nu}(txy)dy$ を使って書き表わすと

$$t \frac{\partial}{\partial t} K_{ij}(txy)dy - \sum_{\nu} A_{i\nu}(txD_x) K_{\nu j}(txy)dy + \sum_{\mu} K_{i\mu}(txy)dy \cdot A_{\mu j}(0xD_x) = 0.$$

ここで $A_{\mu j}(0xD_x) = A_{\mu j}(0xD_x) \delta(x-y) dy = A_{\mu j}^*(0yD_x) \delta(x-y) dy$ であるから

$$K_{i\mu}(txy)dy \cdot A_{\mu j}(0xD_x) = A_{\mu j}^*(0yD_x) K_{i\mu}(txy) dy$$

を得る. 今 $U(txY) = t(K_{11}, K_{12}, \dots, K_{1e}, K_{21}, \dots, K_{ee})$ とおき (\hat{C}_1) を $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^e$

$U(txY)$ に関する方程式で表わすと上の成分表示より

$$t \frac{\partial}{\partial t} U(txY) - (I_e \otimes A(txD_x) - A^*(0yD_x) \otimes I_e) U(txY) = 0$$

となる. 故に $U_0(xY) = t(K_{11}^0, \dots, K_{ee}^0)$, $K_{ij}^0 = \delta_{ij} \delta(x-y)$ とおくと (\hat{C}_1) は

$$(\hat{C}_1) \otimes P(txY D_x D_y) U(txY) = 0 \quad U(txY)|_{t=0} = U_0(xY).$$

と書ける. 定理(3.1.2)より (\hat{C}_1) は $U(txY)$: holomorphic microfunction として一意的に解をもつ. 故に Cauchy 問題 (\hat{C}_1) は $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^e$ 上に一意的に解として解をもつ.

同様に次の Cauchy 問題が解を $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^e$ にもつ事も P_0 を使って得られる.

$$(C_2) : V(txD_x) (tD_t - A(txD_x)) = (tD_t - A(0xD_x)) V(txD_x), \quad V(txD_x)|_{t=0} = 1_x.$$

最後に $U(txD_x) V(txD_x) = V(txD_x) U(txD_x) = 1$ を示せば証明は完了する.

9. C_2 より UV は次の方程式をみたす.

$$(9) : t \frac{\partial}{\partial t} (UV) - A \cdot (UV) + (UV)A = 0 \quad UV|_{t=0} = 1.$$

従って再び積分核の核函数についての方程式に書きかえると,

$$(\hat{C}_2) : t \frac{\partial}{\partial t} w(txY) - (I_e \otimes A(txD_x) - A^*(txD_x) \otimes I_e) w(txY) = 0 \quad w|_{t=0} = w_0(xY).$$

故に Cauchy 問題 (\hat{C}_2) の解が一意的である事を示せば $UV=1$ を得る.

$w(txY)$ は t に関し正則故 $w(txY) = \sum t^m w_m(xY)$ と展開できる.

$\hat{A} = I_r \otimes A - A^* \otimes I_r = \sum t^m \hat{A}_m(x) D_x D_x$ とする時 $m \geq 1$ では $(m - \hat{A}_0)$ は可逆だから (E) の Cauchy 解の一意性は t の中に展開して係数を比較すれば、ただちに得る。結局 $UV=1$ が示された。 $VU=1$ も同様である。 P の成分が微分作用素の時は holomorphic hyperfunction についての Cauchy 問題に帰着させればよい。

注意(3.1.4) 巾零 Fuchs 系の時は $(tD_x - A(txD_x))U(txD_x) = U(txD_x)(tD_x - A(0 \times D_x))$ 、 $U(txD_x)|_{t=0} = 1$ が一意解をもつ事により標準形を求めた Fuchs 系の条件が崩れると、もはや一意解の存在は保証されない。次の例は興味深い例である。

$$\text{例} \quad \left\{ \begin{array}{l} (tD_x - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ D_x + t f(x) & 0 \end{bmatrix}) U(txD_x) = U(txD_x) (tD_x - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ D_x & 0 \end{bmatrix}) \\ U(txD_x)|_{t=0} = 1. \quad (tx) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, (0, dx \infty) \text{ で考える} \end{array} \right.$$

1) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ とおくと時有限階 \mathbb{D}_p では $U(txD_x)$ は解なし。

2) 無限階を許すと任意の $f(x)$ に対し、微分作用素の範囲で無数に多くの解が存在する。

定理(3.1.5) $P(txD_x D_x)$ を $\mathcal{O}_m(p) = t^m D_x^m$ なる Fuchs 型作用素 $\mathcal{O}(\lambda) = \prod_{i=1}^m (1 - \lambda_i(x))$ とおくと、 $\lambda_i(x)$ が正則かつ $\lambda_i(0) - \lambda_j(0) \notin \mathbb{Z} - \{0\}$ とするこの時 $Pu=0$ と $(tD_x - \lambda_j(x))v_j=0$ ($1 \leq j \leq m$) とは left \mathcal{D} -module として同型である。(但し \mathcal{D} は微分作用素のなす層。)

$P\tilde{u} = 0$. $u = \tilde{u}$ on $\{t < 0\}$. $S-S(u) \neq (0, \pm \infty)$ 故に Holmgren の定理より $u = \tilde{u} = e^{\log(t-i0)A(x)} f(x)$ と書ける. $u \mapsto f(x)$ は 1 対 1 onto に対応するので $a^+B^P \cong \mathbb{B}^l$ を得る. a^-B^P も同様である.

2) の証明. 1) の論法より $u \in aB$. $Pu = 0$ の時. $u(t,x) = e^{\log(t-i0)A(x)} f(x) = e^{[\log(t-i0) + 2\pi i]A(x)} f(x)$ と書ける. 従って $t > 0$ で R^1 を掛けると $f(x) = e^{2\pi i A(x)} f(x)$. $\text{ce. } \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} (2\pi i A(x))^{m-1} \right] 2\pi i A(x) f(x) = 0$. $\alpha_i \notin \mathbb{Z} - \{0\}$ より $[\]$ 内は可逆行列故 $A(x) f(x) = 0$ を得る. もとにもどって $u = e^{\log(t-i0)A(x)} f(x) = f(x) + \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \{ \log(t-i0) A(x) \}^{m-1} \right] \log(t-i0) A(x) f(x) = f(x)$. 故に $u = f(x)$ を得る. $u|_{t=0} = f(x) = 0$ より $u = 0$ を得る. g. e. d.

系 (3.2.2) P を $\sigma_m(P) = t^k D_t^m$ の Fuchs 型. $\tilde{e}(u, 0) = 0$ の根 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ について.

$\lambda_i, \lambda_j - \lambda_k \notin \mathbb{Z} - \{0\}$. ($\tilde{e}(u, x)$ の定義は (3.1.6)). この時.

1) $a^\pm B^P \cong \mathbb{B}^m$

2) $Pu = 0$. $S-S(u) \neq (0, \pm \infty)$. $(\frac{\partial}{\partial t})^j u|_{t=0} = 0$ $0 \leq j \leq m-k-1$ ならば $u = 0$.

3) $aB^P \cong \mathbb{B}^{m-k}$.

(証明) 定理 (3.1.6) の方法で matrix 表示して (3.2.1) を使う. g. e. d.

注意 (3.2.3) 一般に $\sigma_m(P) = t^l D_t^m$ なる作用素についても $a^\pm B^P \cong \mathbb{B}^m$ が成立つ. (証明は $R = e^{\log t A(x)}$ の所を一般のモッド Ω として置きかえて議論すればよい.)

参考文献

- [1]. Baouendi-Goulaouic : Cauchy Problems with characteristic initial hypersurfaces, *Comm. Pure. Appl. Math.* 26. 1973.
- [2]. Hasegawa ; On the initial-value problems with data on a double characteristic, *J. Math. Kyoto Univ* 11. 1971.
- [3]. Hasegawa ; On the initial-value problems with data on a characteristic hypersurface, *J. Math. Kyoto Univ* 13. 1973.
- [4]. 柏原·河合 ; On microhyperbolic pseudo-differential operators. 近刊.
- [5]. Monvel-Kree ; Pseudo-differential operators and Gevrey classes, *Ann. Inst. Fourier* 17. 1967.
- [6]. Bony-Schapira ; Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles ; *Inventiones Math.* 17. 1972.
- [7]. Bony-Schapira ; Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, *Springer Lecture note*. No.287. 1973.
- [8]. 小松·河合 ; Boundary values of hyperfunctions solutions of linear partial differential equations, *Publ. R.I.M.S.* 7. 1971.
- [9]. 佐藤·河合·柏原 ; Microfunctions and pseudo-differential equations *Springer Lecture note* No.287. 1973.
- [10]. Tsuno ; On the prolongation of local holomorphic solutions of partial differential equations, III, equations of the Fuchsian type, 近刊.