数理解析研究所講究録
249 巻 1975 年 46-53

非コンパクト型対称空間上のLaplacianの複素巾について

名大 理学部　　浦川 肇

Gを非コンパクト、連結半単純Lie群（center $< \infty$）、KをGの極大コンパクト群として、非コンパクト型の対称空間G/Kを考える。この時、Eguchi = Okamoto [1] により、G/K上の急減少関数に対するFourier変換について、そのPlancherelの定理、逆Fourier変換公式及びそのFourier像の特徴づけが得られた。

我々はこの結果を用いることにより、G/K上のlaplacian Dの複素巾D^s ($s \in \mathbb{C}$) を定義し、そのkernelを調べることを試みる。

まずEguchi-Okamotoの結果を述べる:

$\mathcal{C}(G/K)$; G/K上の急減少関数の作る空間 とする。$f \in \mathcal{C}(G/K)$に対して、Fourier変換 $\tilde{f}(\lambda, kM)$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $k \in K$ を、

$$\tilde{f}(\lambda, kM) := \int_{AN} f(kan)\, e^{(-i\lambda+\rho)(\log a)}\, da\, dn$$

$$= \int_{G/K} f(g)\, e^{-(-i\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\, dg_K$$

と定義する。ここで，$\mathfrak{a}^*$, A, N は G の Iwasawa 分解を $G=KAN$ とし，$\mathfrak{a}$ は A の Lie 環，$\mathfrak{a}^*$ は $\mathfrak{a}$ の dual space である。M は $\mathfrak{a}$ の K における centralizer である。

この時，

(i) $$\int_G |f(g)|^2 dg = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^*\times K/M} |\tilde{f}(\lambda, kM)|^2 |c(\lambda)|^{-2} dk_M\, d\lambda$$

(ii) $$f(g) = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^*\times K/M} \tilde{f}(\lambda, kM)\, e^{-(i\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda\, dk_M$$

が成り立つ。ここで，$g\in G$ に対して $G=KAN$ に従って $g=K(g)\exp H(g)\, n(g)$ と分解し，$c(\lambda)$ は Harish-Chandra による c-function である。w は $W=M'/M$ の元の個数（M' は $\mathfrak{a}$ の K での正規化群）

更に，$\mathfrak{a}^*\times K/M$ 上の急減少関数の作る空間を $\mathcal{C}(\mathfrak{a}^*\times K/M)$ とし，$\mathcal{C}(\mathfrak{a}^*\times K/M)$ の元 ϕ で，任意の $g\in G$, $s\in W$, $\lambda\in\mathfrak{a}^*$ に対し

$$\int_{K/M} e^{-(is\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\phi(s\lambda, kM)\, dk_M = \int_{K/M} e^{-(i\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\phi(\lambda, kM)\, dk_M$$

を満すもの全体を $\mathcal{C}(\mathfrak{a}^*\times K/M)_W$ とする。

この時，

(iii) $f\longmapsto\tilde{f}$ は $\mathcal{C}(G/K)$ から $\mathcal{C}(\mathfrak{a}^*\times K/M)_W$ の上への isomorphism となっている。

さて，我々は $\mathbb{D}(G/K)$：G/K 上の G-不変微分作用素とした時，$\mathbb{D}(G/K)$ の元 D で次のような条件を満すものを考える：

一般に，$D \in \mathbb{D}(G/K)$ に対して，

$$D_g\left(e^{-(i\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\right) = \Gamma(D)(i\lambda)\ e^{-(i\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}$$

$$\lambda \in \mathfrak{a}^*,\quad k \in K$$

ここで，$\Gamma(D)(i\lambda)$ は，W-不変な $\mathfrak{a}^*$ 上の複素係数の多項式の $i\lambda$ での値をとらせたものであるが，この $\Gamma(D)$ に次の仮定をおく。

仮定

(I) $\forall \lambda \in \mathfrak{a}^*$; $\Gamma(D)(i\lambda) \in \mathbb{R}$.

更に，$\Gamma(D)$ を，$2m$ 次の多項式とし，

$$\Gamma(D) = \sum_{k=0}^{2m} a_k \qquad a_k : k \text{ 次の多項式（実係数）}$$

と書いた時，

(II) $\exists d > 0$; $-a_{2m}(i\lambda) > d|\lambda|^{2m}$ $(\lambda \in \mathfrak{a}^*)$

(III) $\exists c > 0$; $-\Gamma(D)(i\lambda) \geqq c$ $(\ \text{〃}\ )$

を満すものとする。例えば，Laplace-Beltrami 作用素 Δ の時は，$\Gamma(\Delta)(i\lambda) = -(|\lambda|^2 + |\rho|^2)$，$\lambda \in \mathfrak{a}^*$

（ここで ρ は，正の restricted root の和の半分）となっており，上の仮定 (I)〜(III) を満している。

以下は，このような D についてのみ考えることにする。

補題 任意の $t>0$ に対して

$e^{tP(D)(i\lambda)}$ は W-不変な $\mathfrak{a}^*$ 上の急減少関数である。

従って Gangolli [2] のように

$$G^t(g) = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^*} e^{tP(D)(i\lambda)}\,\phi_{-\lambda}(g)\,|c(\lambda)|^{-2}\,d\lambda$$

によって両側 K-不変な G 上の急減少関数を考えることができる。ここで $\phi_{-\lambda}(g) = \int_K e^{-(i\lambda+\rho)(H(gk))}dk$ である。この時

命題 1

G^t は方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = Du$ の基本解である：

(i) $\frac{\partial}{\partial t} G^t = D_g G^t$

(ii) $G^t * G^s = G^{t+s}$

(iii) $\lim_{t\to 0+}\int_G G^t(x^{-1}y)f(y)\,dy = f(x)$, $x\in G$, $f\in C_c^\infty(G/K)$

(iv) $\lim_{t\to 0+}\int_G \left|f(x) - \int_G G^t(x^{-1}y)f(y)\,dy\right|^2 dx = 0$, $f\in L^2(G/K)$

が成り立つ。

そこで我々は $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して

$$K^\alpha(g) := \int_0^\infty t^{-\alpha-1}\,G^t(g)\,dt \qquad g\in G$$

を、右辺の積分が存在するならば、考えることにする。この時次のことが言える。

命題2　$n := \dim G/K$ とおる。この時、
$\mathrm{Re}\,\alpha < -\frac{n}{2m}$ ならば、$K^\alpha(g)$ を定義する積分は絶対収束し、かつ $K^\alpha \in L^2(G/K) \cap C^\infty(G/K)$ が成立つ。

これは、$|\varphi_{-\lambda}(g)| \leq \int_K |e^{-(i\lambda+\rho)H(gk)}|dk = \int_K e^{-\rho(H(gk))}dk \,(=: \Xi(g))$ より、
$$|G^t(g)| \leq \frac{1}{w}\Xi(g)\int_{\mathfrak{a}^*} e^{tP(D)(i\lambda)}|c(\lambda)|^{-2}d\lambda \qquad (*)$$
Helgason [4] によれば、$\exists m_0 > 0$ 整数；
$$|c(\lambda)|^{-2} \leq M(1+|\lambda|^2)^{m_0} \quad (\lambda \in \mathfrak{a}^*) \quad \text{for some } M > 0$$
が言えているので、$\mathrm{Re}\,\alpha < -\frac{m_0+l}{2m}$ $(l = \dim \mathfrak{a})$ ならば、$K^\alpha(g)$ の積分の絶対収束性が言える。更に命題のように言うには、Gindikin [3] で得られた、$c(\lambda)$ の精密な形を用いて、計算を実行しなければならない。$K^\alpha \in L^2(G/K)$ については、Plancherel の定理より、
$$\|G^t\|^2_{L^2(G)} = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^*} e^{2tP(D)(i\lambda)}|c(\lambda)|^{-2}d\lambda$$
を用いて、上と同様に、$\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\|G^t\|_{L^2(G)}dt < \infty$。このことと、Schwarz の不等式 $\int_G G^t(g)\overline{G^s(g)}dg \leq \|G^t\|_{L^2(G)}\|G^s\|_{L^2(G)}$ を用いることにより、$K^\alpha \in L^2(G/K)$ も言える。

この命題2 を用いて、Riesz potential を、

定義　$\mathrm{Re}\,\alpha < -\frac{n}{2m}$ の時、
$$I^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_G K^\alpha(x^{-1}y)f(y)dy = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}(f * \check{K}^\alpha)(x), \quad \check{K}^\alpha(x) := K^\alpha(x^{-1})$$

と定義する。命題２ より． $f \in L^1(G)$ に対して． $I^\alpha f$ は定義できるが．後で述べることを用いて． I^α なる作用素は． $L^2(G/K)$ 上の有界作用素となることがわかる。

命題３ $\mathcal{R}e\,\alpha < -\frac{n}{2m}$ の時． $f, \varphi \in \mathcal{C}(G/K)$ に対して．

$$(i)\ \int_G \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} K^\alpha(g)\overline{\varphi(g)}\,dg = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^* \times K/M} (-\Gamma(D)(i\lambda))^\alpha\, \overline{\tilde{\varphi}(\lambda, kM)}\, |c(\lambda)|^{-2} d\lambda\, dk_M$$

$$(ii)\ \int_G I^\alpha f(g)\,\overline{\varphi(g)}\,dg = \frac{1}{w}\int_{\mathfrak{a}^* \times K/M} (-\Gamma(D)(i\lambda))^\alpha \tilde{f}(\lambda, kM)\overline{\tilde{\varphi}(\lambda, kM)}\, |c(\lambda)|^{-2} d\lambda\, dk_M$$

が成り立つ。

この結果と．Eguchi - Okamotoの結果を用いて．次のことが言える。

定理１ $\mathcal{R}e\,\alpha < -\frac{n}{2m}$ の時．

$$f \in \mathcal{C}(G/K) \Rightarrow I^\alpha f \in \mathcal{C}(G/K) \quad \text{かつ．}$$

$$(I^\alpha f)^\sim(\lambda, kM) = (-\Gamma(D)(i\lambda))^\alpha \tilde{f}(\lambda, kM)$$

が成り立つ。

定理２ $\mathcal{R}e\,\alpha,\ \mathcal{R}e\,\beta,\ \mathcal{R}e(\alpha+\beta) < -\frac{n}{2m}$ の時．

$$I^\alpha(I^\beta f) = I^\beta(I^\alpha f) = I^{\alpha+\beta} f,$$

$$D(I^\alpha f) = I^\alpha(Df) \qquad \text{for } f \in \mathcal{C}(G/K)$$

が成り立ち. 特に. $\mathrm{Re}(\alpha+1) < -\frac{n}{2m}$ ならば.

$$D(I^\alpha f) = I^\alpha(Df) = -I^{\alpha+1}f \ , \quad f \in \mathcal{C}(G/K)$$

となる。

そこで改めて $(-D)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ を次のように定義する.

<u>定義</u> $f \in \mathcal{C}(G/K)$ に対して.

(i) $(-D)^\alpha f := I^\alpha f \qquad \left(\mathrm{Re}\,\alpha < -\frac{n}{2m}\right)$

(ii) $(-D)^\alpha f := (-D)^k I^{\alpha-k} f$ （そうでない時）

ただし. $k > 0$ integer, $-\frac{n}{2m} - 1 < \mathrm{Re}\,\alpha - k < -\frac{n}{2m}$ とする。

この時. 定理 1.2 より. 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して.

$f \in \mathcal{C}(G/K) \Rightarrow (-D)^\alpha f \in \mathcal{C}(G/K)$ かつ.

$$((-D)^\alpha f)^\sim(\lambda, kM) = (-\Gamma(D)(i\lambda))^\alpha \tilde{f}(\lambda, kM)$$

となり. 従って.

$$(-D)^\alpha(-D)^\beta = (-D)^{\alpha+\beta}, \quad (-D)^1 = -D, \quad (-D)^0 = I$$

が. $\mathcal{C}(G/K)$ 上で成り立ち. （ここで. I : identity operator）

任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して.

$$(-D)^\alpha : \mathcal{C}(G/K) \longrightarrow \mathcal{C}(G/K) \quad \text{isomorphism}$$

が成り立つことがわかる。

References

[1] Eguchi-Okamoto; The Fourier transform of the Schwartz space of a symmetric space

[2] Gangolli; Asymptotic behavior of spectra of compact quotients of certain symmetric space, Acta Math. 121 (1968) 151~192

[3] Gindikin-Karpelevič; Plancherel measure of Riemannian symmetric space of non-positive curvature, Sov. Math 3 (1962) 962~965

[4] Helgason; Fundamental solutions of invariant diff. op. on symmetric spaces, Amer. J. Math. 86 (1964) 565~601

[5] ——; The surjectivity of invariant diff. op. on symmetric spaces I, Ann of Math. (1973) 451~479

[6] 牟田洋一; 一般 Lorentz 群の調和解析, 数理研講究録 82, 119~140

[7] Seeley; Complex powers of an elliptic operator, "Singular integral", Amer. Math. Soc. (1967)

[8] E.M. Stein; Singular integrals and Differentiability properties of functions, Princeton, (1970)

[9] Kotake-Narasimhan; Regularity theorems for fractional powers of a linear operator, Bull. S.M. France, 90 (1962) 449~491