

Real rank 1 の半単純リー群に関する ある系列の既約表現について

津田 勉大 三島川 寿一

§1. 序 V. Bargmann による $G_0 = SU(1,1)$ の既約表現 $D_{\frac{1}{2}}^+$, $D_{\frac{1}{2}}^-$ は次の様にして構成される。($D_{\frac{1}{2}}^+$, $D_{\frac{1}{2}}^-$ は離散系列に属し $D_{\frac{1}{2}}^+ \oplus D_{\frac{1}{2}}^-$ は主系列に属する)

$$G_0 \text{ の元 } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1) \text{ を } \begin{matrix} \text{10} \\ \rightarrow \\ x-y \end{matrix}$$

$g = (z, \theta)$ ($|z| < 1, z \in \mathbb{C}, 0 \leq \theta < 4\pi$) を用いて表わすことができる。但し $z = \frac{\beta}{\alpha}, e^{\frac{i\theta}{2}} = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ 。このとき G_0 の不変測度 dg は $dg = (1 - |z|^2)^{-2} dx dy d\theta, z = x + iy$ で与えられる。

さて G_0 上の関数空間 $\mathcal{H}_0^+, \mathcal{H}_0^-$ を

$$\mathcal{H}_0^\pm = \left\{ f^\pm \in C^\infty(G_0) \mid f^\pm(gk_\varphi) = e^{\mp \frac{i\theta}{2}} f^\pm(g), \int f = -\frac{1}{4} f \right.$$

$$\left. , \sup | (1 - |z|^2)^{-\frac{1}{2}} f(z, \theta) | < +\infty \right\}$$

とする。但し Ω は G_0 上のカシミール作用素とし、

$$R_\Omega = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & e^{+\frac{i}{2}\Omega} & 0 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

よって \mathcal{H}_0^\pm のセミノルム $\|\cdot\|_\pm$ を

$$\|f\|_\pm^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \int |f^\pm(z, 0)|^2 (1-|z|^2)^{-2+\varepsilon} dx dy d\theta$$

により定義すると \mathcal{H}_0^\pm は pre-Hilbert 空間となることかわかる。即ち $\|f^\pm\|_\pm = 0 \Rightarrow f^\pm = 0$ on G 。

$\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-$ を各々 $\mathcal{H}_0^+, \mathcal{H}_0^-$ の完備化として $D_{\frac{1}{2}}^+, D_{\frac{1}{2}}^-$ は次の様にして与えられる。

$$(D_{\frac{1}{2}}^\pm(g) f^\pm)(x) = f^\pm(g^{-1}x) \quad g, x \in G_0, f^+ \in \mathcal{H}^+, f^- \in \mathcal{H}^-.$$

おまかかにいえば $D_{\frac{1}{2}}^+$ は単位円盤内で複素解析的な空間に作られた表現であり、 $D_{\frac{1}{2}}^-$ は反解析的な表現である。一方単位円上で構成されたある 主系列表現 $C_{\frac{1}{2}}$ は又

$D_{\frac{1}{2}}^+ \oplus D_{\frac{1}{2}}^-$ と同型となる。 よって一般の G に対して同様な議論が成りたつか という問題は次の節で考える。

§2.

G_c を複素単純リー群とし、 G を G_c の一つの実型とする。このとき G を real rank 1 と仮定する。¹⁾ G が real rank

1で、コンパクトなカルタン部分群をもたぬ時、主系列表現は総て可約なので、我々の問題を考えるには、 G がコンパクトなカルタン部分群を持つ場合のみが適当である。以下
 2) G はコンパクトなカルタン部分群をもつと仮定しておく。

$\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ を各々 G_c, G, K (K は G の極大コンパクト部分群) のリー環とし $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をカルタン分解とする。 \mathfrak{g}_c を \mathfrak{g} のカルタン部分環として $\mathfrak{g}_c \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ とする様にとる。2)の仮定から $\dim \mathfrak{g}_c \cap \mathfrak{p} = 1$ 。そこで $\mathfrak{g}_R = \mathfrak{g}_c \cap \mathfrak{p}$ $\mathfrak{g}_I = \mathfrak{g}_c \cap \mathfrak{k}$ とおく。 Σ を $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}_c)$ に関する root 系とすれば、リカウ $\alpha_0 = 0$ on \mathfrak{g}_I となる様子の Σ の元 α_0 をとれる。 α_0 を以後固定して議論を進める。 Σ の順序として $(\alpha, \alpha_0) > 0$ であらば常に $\alpha > 0$ となるものを選んでおく。

\mathcal{U} を \mathfrak{g}_c の展開環, \mathfrak{z} を \mathcal{U} の中心とする。そこで \mathcal{U} の元は次の様にして G_c の左不変微分作用素と考えられる。

W を有限次元ベクトル空間, $C^\infty(G, W) = \{f: G \rightarrow W \mid f \text{ は } G \text{ 上 } C^\infty\text{-級}\}$ とし

$$(Xf)(x) = \left. \frac{d}{dt} f(x \exp tX) \right|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(G, W)$$

$$X \in \mathfrak{g}_c \subset \mathcal{U}.$$

$I(\mathfrak{g}_c)$ を $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}_c)$ のワイル群に関する \mathfrak{g}_c 上の不変多項式全体とし $\mu: \mathfrak{z} \rightarrow I(\mathfrak{g}_c)$ を ヴェルバレイ同型とする。

λ を \mathcal{O}_c 上の線型形式とすれば次の様にして無限小指標 $\chi_\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ が定義される。

$$\chi_\lambda(z) = \lambda(\mu(z)) \quad z \in \mathfrak{g}.$$

ここで前節での H_0^\pm にあたる空間を定義する。これを K の既約表現とし、 W をその表現空間とする。ここで $C^\infty(W, \mathfrak{G})$ のセミノルム達 $\{\nu_b\}_{b \in \mathcal{U}}$ を次の様に定義する。

$$\nu_b(f) = \sup_{x \in G} |(bf)(x)| e^{d(x_0, 0)}, \quad f \in C^\infty(W, \mathfrak{G}).$$

但し d は対称空間 G/K 上の G -不変リーマンメトリックで

$$e^{d(\exp H, 0)} = e^{P_+(H)} \quad H \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \quad \left(P_+ = \frac{1}{2} \sum_{(\alpha, \alpha_0) > 0} \alpha \right)$$

となるものとする。

$H_0(\lambda, \tau)$ (λ を \mathcal{O}_c 上の整型式) を次の様に定義する。

$$H_0(\lambda, \tau) = \left\{ f \in C^\infty(W, \mathfrak{G}) \mid \nu_b(f) < +\infty \quad \forall b \in \mathcal{U}, \right. \\ \left. \begin{array}{l} \hookrightarrow z f = \chi_\lambda(z) f, \quad f(\pi k) = \pi(k) f(x) \quad \forall x \in G \quad \forall k \in K \end{array} \right\}$$

又 $H_0(\lambda, \tau)$ のセミノルムを

$$\|f\|^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \int_G |f(x)|^2 e^{-\varepsilon d(x_0, 0)} dx$$

(dx は G 上のハール測度) により与えておく。

λ は \mathcal{O}_c 上の整型式であつたが必ずしも $H_0(\lambda, \tau)$ の元 f

に対し $\|f\| = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ on G は成り立たない。

$\lambda = \tau$ として次の様なものに制限する。

$$\star I \quad (\lambda, \alpha_0) = 0, \quad \pi(\lambda, \alpha) \neq 0, \quad (\lambda, \beta) > 0$$

$\alpha \neq \pm \alpha_0$

$$(\beta; \beta > 0 \text{ かつ } (\beta, \alpha_0) = 0)。$$

Lemma

λ を上の条件 $\star I$ を満たす整型式 とすれば $H_0(\lambda, \tau)$ は pre-Hilbert 空間。

$H_0(\lambda, \tau) \neq \{0\}$ は一般の τ に対しては必ずしも成り立たない。 $\lambda = \tau$ を次の様に制限をする。

$M \in K$ に於ける \mathfrak{g}_R の中心 とすれば

$$\dim \mathfrak{g} = 3 \Rightarrow M = \{\pm 1\} \quad (1 \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の単位元})$$

$$\dim \mathfrak{g} > 3 \Rightarrow M \text{ は連結}$$

$$\rho_- = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha > 0 \\ (\alpha, \alpha_0) = 0}} \alpha, \quad \lambda_- = \lambda - \rho_- \quad \text{とおき } \sigma \lambda_- \text{ を } \lambda_- \text{ と}$$

最高ウェイトとする M の既約表現 Γ を λ の表現空間とする。

$$(M = \{\pm 1\} \text{ のとき } \sigma \lambda_-(-1) = -1 \text{ とする})$$

この時次の補題が成り立つ。

Lemma

$$(\star 2) \quad |\tau|_M : \sigma_{\lambda-1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad H_0(\lambda, \tau) \neq 0$$

但し $|\tau|_M$ は τ の M への制限であり、

$|\tau|_M : \sigma_{\lambda-1}$ は $\tau|_M$ の中に τ の重複度

(λ, τ) を $\star 1, \star 2$ を満たすとしよう。 $\frac{1}{2} = \tau$

$$[U(\lambda, \tau; g)f](x) = f(gx) \quad f \in H(\lambda, \tau)$$

により G の表現 $U(\lambda, \tau)$ を定義する。但し $H(\lambda, \tau)$ は $H_0(\lambda, \tau)$ の完備化。

定理

(λ, τ) が $\star 1, \star 2$ を満たすとき、

$U(\lambda, \tau)$ はユニタリ表現であり、特に $|\tau|_M : \sigma_{\lambda-1} = 1$

とすれば $U(\lambda, \tau)$ は既約。

注. \star を満たす λ に対して $|\tau|_M : \sigma_{\lambda-1} = 1$ を満たす

τ は必ず存在する。

次に主系列表現と上に得られた $U(\lambda, \tau)$ との関係を示す。

$G = K A_{\mathbb{R}} N$ を岩沢分解、 dk を K の不変測度

とす。又

$$\mathcal{H}(\lambda, \tau) = \left\{ f: K \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_K |f(k)|^2 dk < \infty, f(km) = \sigma_{\lambda-1}^{-1}(m) f(k) \right\}$$

$\forall k \in K \quad \forall m \in M^2$ とおく。

$s \in \mathbb{R}$ を固定し

$$[V(\lambda-, is; x)f](k) = e^{-(1+si)\rho_+(H(x^{-1}, k))} f(kx^{-1})$$

$$f \in \mathcal{B}(\lambda-), \quad k \in K, \quad x \in G, \quad x^{-1}k = kx^{-1} \rho_p^{H(x^{-1}, k)} \eta(x^{-1}, k)$$

により G の表現 $V(\lambda-; is)$ を定義する。

$V(\lambda-; is)$ は主系列表現と呼ばれる。 $V(\lambda-; is)$

($s \neq 0$) は既約ユニタリ表現で $V(\lambda-; 0)$ は可約

であること知られている。

定理. λ, τ を満たしかつ $|\tau|_M = |\lambda| = 1$ とすると

$U(\lambda, \tau)$ は $V(\lambda-, 0)$ の既約成分。