数理解析研究所講究録
251巻 1975年 85-98

リー群上の左不変リーマン計量の運動群について

東教大 理　高橋恒郎

§1. 序文

連結リー群 G の左移動の全体を $L(G)$, 右移動の全体を $R(G)$ と書く. $L(G)$ および $R(G)$ は G のリー変換群で, リー群としては G と同型である.

ds^2 を G 上の左不変なリーマン計量とするとき, その運動群（等長変換群）$I(G, ds^2)$ の構造については一般によくわかっていない。ds^2 が左不変であるから, 当然

$$L(G) \subset I(G, ds^2)$$

である. さらに $I(G, ds^2)$ が $R(G)$ を含むならば, ds^2 は両側不変なリーマン計量である.

G がコンパクト, 半単純で, ds^2 が両側不変ならば, $I(G, ds^2)$ の単位元を含む連結成分 $I_0(G, ds^2)$ は

$$I_0(G, ds^2) = L(G)R(G),$$

すなわち, $I_0(G, ds^2)$ の元は G の左移動と右移動の積で表わ

される．

ここではGがコンパクト，単純な場合に，つぎの定理を証明する．これは，T. Ochiaiとの共同研究の結果である．

定理1．Gをコンパクト，連結，単純リー群，ds^2をG上の左不変なリーマン計量，$I_0(G, ds^2)$をその運動群の単位元を含む連結成分とするとき，

$$(1) \qquad L(G) \subset I_0(G, ds^2) \subset L(G)R(G)$$

が成り立つ．

上の定理で$I_0(G, ds^2) = L(G)R(G)$となるのは，ds^2が両側不変な場合であって，その他の場合には$I_0(G, ds^2) \neq L(G)R(G)$である．

また，上ではGを単純と仮定したが，Gが半単純の場合，もっと一般にGがコンパクトの場合にも，この定理の結果が成り立つのではないかと思われる．

§2．考察

定理1を証明するために，先ずここでは，定理1と同値な命題を導くことにする．

Gをコンパクト，連結リー群，ds^2をG上の左不変なリー

マン計量とする．

Gがコンパクトであるから，$I_0(G, ds^2)$ もコンパクトである．Gの単位元eにおける $I_0(G, ds^2)$ の固定部分群をHとする．すなわち

(2) $$H = \{\varphi \mid \varphi \in I_0(G, ds^2),\ \varphi(e) = e\}.$$

Hは $I_0(G, ds^2)$ のコンパクト部分群で，容易にわかるように

$$I_0(G, ds^2) = L(G)\cdot H \quad , \quad L(G) \cap H = \{\text{恒等写像}\}$$

が成り立つ．したがって，$I_0(G, ds^2)$ は $L(G) \times H$ に同相であり，とくにHは連結である．

もし

(1) $$L(G) \subset I_0(G, ds^2) \subset L(G)R(G)$$

が成り立つならば，L(G)の元とR(G)の元が可換であることから，L(G)は $I_0(G, ds^2)$ の正規部分群である．

逆に，L(G)が $I_0(G, ds^2)$ の正規部分群であったとしよう．Gの任意の元 x によるGの左移動を L_x とすると，$I_0(G, ds^2)$ の任意の元 φ に対して，$\varphi \circ L_x \circ \varphi^{-1}$ はまたL(G)に含まれるから，Gの元 y で，$\varphi \circ L_x \circ \varphi^{-1} = L_y$，あるいは $\varphi \circ L_x = L_y \circ \varphi$ となるものが存在する．Gの任意の元 z に対して

$$\varphi(xz) = y\cdot\varphi(z)$$

が成り立つ．とくに $\varphi \in H$ とすると，上の式で $z = e$ とすることにより，$y = \varphi(x)$ を得るから，

$$\varphi(xz) = \varphi(x)\varphi(z)$$

がGの任意の元 x, z に対して成り立つ。これはHの元がGの自己同型であることを意味する。すなわちHはGの自己同型群 $Aut(G)$ に含まれ，かつHは連結であるから，もしGが半単純ならばHはGの内部自己同型群 $Int(G)$ に含まれることになる。よってGが半単純ならば，Hの任意の元 φ はGの内部自己同型でGの元 a によって $\varphi = L_a \cdot R_a^{-1}$ と書くことが出来る。$I_0(G, ds^2) = L(G) \cdot H$ より，$I_0(G, ds^2)$ の任意の元は，Gの元 a b によって，$L_a \circ L_b \circ R_b^{-1} = L_{ab} \circ R_b^{-1}$ と表わすことが出来る。よって $I_0(G, ds^2) \subset L(G)R(G)$ となる。

以上によって，Gが半単純ならば，(1)が成り立つことと，$L(G)$ が $I_0(G, ds^2)$ の正規部分群であることは同値であることがわかった。

したがって，定理1はつぎの定理と同値である。

定理2. G, ds^2 は定理1と同じとするとき，$L(G)$ は $I_0(G, ds^2)$ の正規部分群である。

また上の考察から容易にわかるように，定理1は，つぎの定理とも同値である。

定理3．G, ds^2 は定理1と同じとするとき，$I_0(G, ds^2)$ の元 φ が G の単位元を不変にするならば，φ は G の内部自己同型である。

われわれは，定理1のかわりに，定理2を証明することにする。このとき，$I_0(G, ds^2)$ はコンパクト連結リー群で，$L(G)$ は G と同型であるから，$I_0(G, ds^2)$ はコンパクト，連結，単純リー群 $L(G)$ をリー部分群にもつ。また，G の単位元 e における $I_0(G, ds^2)$ の固定部分群 H もコンパクト，連結であって，(2) が成り立つ。さらに $I_0(G, ds^2)$ は G に効果的に働くから，H は $I_0(G, ds^2)$ の正規部分群を含まない。これらのことから，定理2を証明するためには，つぎの定理4を証明すれば十分である。

定理4．K をコンパクト，連結リー群，G および H をコンパクト，連結な K のリー部分群で，つぎ条件をみたしているとする．

(A) G は単純である．

(B) $K = GH$, $G \cap H = \{$単位元$\}$.

(C) H は K の正規部分群を含まない。

このとき，G は K の正規部分群である．

§3. 準備

定理4の証明に入る前に，それに必要な補題の証明と，記号の説明をしておく．

一般に，リー環$\mathfrak{a}$が半単純ならば，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n$$

と単純イデアルの直和になる．この単純イデアルの数を$s(\mathfrak{a})$と書くことにする．$\mathfrak{a}$をリー環とする半単純リー群Aに対しては$s(A) = s(\mathfrak{a})$とする．

コンパクト，連結リー群Aが半単純であるためには，Aの基本群$\pi_1(A)$の位数が有限であることが必要十分である．

またAがコンパクト，連結，半単純リー群であるならば，$\pi_3(A) \cong \mathbb{Z}^n$であって，$n = s(A)$である．

実リー環$\mathfrak{a}$が，あるコンパクトリー群のリー環になっているとき，$\mathfrak{a}$はコンパクトであるという．コンパクト，半単純リー環をリー環とする連結リー群はコンパクトである．またコンパクト半単純リー環のイデアルはコンパクト半単純である．

補題1．Aをコンパクト，連結リー群，BおよびCをAのコンパクト，連結リー部分群で

$$A = BC \quad , \quad B \cap C = \{単位元\}$$

をみたすものとする．このとき，

1) Aが半単純ならば，BおよびCも半単純であり，逆にBおよびCが半単純ならば，Aも半単純である．

2) A，B，Cが半単純であるとき，

$$s(A) = s(B) + s(C).$$

証明．仮定より，Aは$B \times C$に同相である．したがって

$$\pi_1(A) \cong \pi_1(B) + \pi_1(C)$$

となる．よってAが半単純ならば$\pi_1(A)$の位数は有限であり，したがって$\pi_1(B)$と$\pi_1(C)$の位数も有限となるからB，Cは半単純である．この逆も容易にわかる．

また

$$\pi_3(A) \cong \pi_3(B) + \pi_3(C)$$

である．~~一方~~，A，B，Cが半単純ならば，$\pi_3(A) \cong \mathbb{Z}^l$，$\pi_3(B) \cong \mathbb{Z}^m$，$\pi_3(C) \cong \mathbb{Z}^n$であって$l = s(A)$，$m = s(B)$，$n = s(C)$で上の式より，$l = m + n$が云えるから，$s(A) = s(B) + s(C)$が成り立つ．

系．実リー環$\mathfrak{a}$が，2つのコンパクト，半単純部分リー環$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$によって

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} = (0)$$

と直和（ベクトル空間として）に分かれるならば，$\mathfrak{a}$もコン

パクト，半単純で，$s(\mathfrak{a}) = s(\mathfrak{b}) + s(\mathfrak{c})$ である．

証明，$\mathfrak{a}$をリー環にもつ，単連結リー群をAとし，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$に対応する，Aの連結リー部分群をB，Cとすると，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$がコンパクト，半単純であることより，B，Cはコンパクト，半単純で，$A = BC$，$B \cap C = \{単位元\}$が成り立つ．したがってAもコンパクトで，補題1より半単純となり，$s(A) = s(B) + s(C)$が成り立つ．

§4．定理の証明．

この節では定理4の証明を与えることにする．

K，G，Hのリー環をそれぞれ$\mathfrak{k}$，$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$とする．条件(B)より，$\mathfrak{k} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$，$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = (0)$である．

GがKの正規部分群であることをいうには，$\mathfrak{g}$が$\mathfrak{k}$のイデアルであることを示せばよい．そのためには，$\mathfrak{k}$の単純イデアルで$\mathfrak{g}$を含むものが存在することがわかれば十分であることを示そう．

実際，$\mathfrak{k}$の単純イデアル$\mathfrak{a}$があって，$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{g}$となったとする．$\mathfrak{a}$をリー環とするKの連結リー部分群をAとすると，Aはコンパクト，単純である．GおよびA∩HはAのコンパクト部分群で，条件(B)より，

$$A = G\cdot(A \cap H),\quad G \cap (A \cap H) = \{単位元\}$$

が成り立つ．よってAは$G\times(A\cap H)$に同相となり，$A\cap H$は連結である．したがって補題1より，$A\cap H$は半単純で，

$$s(A)=s(G)+s(A\cap H)$$

が成り立つが，$s(A)=s(G)=1$より$s(A\cap H)=0$となるから$A\cap H=\{$単位元$\}$である．よって$A=G$となって，すなわち$\mathfrak{a}=\mathfrak{g}$で，$\mathfrak{g}$は$\mathfrak{k}$のイデアルである．

以上のことから，$\mathfrak{g}$を含む$\mathfrak{k}$の単純イデアルは存在しないと仮定して矛盾を導けばよいことがわかる．

以下においては，$\mathfrak{g}$を含む$\mathfrak{k}$の単純イデアルは存在しないと仮定しよう．

Kがコンパクトであるから，リー環$\mathfrak{k}$は，

$$\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{k}_1+\cdots+\mathfrak{k}_n$$

と$\mathfrak{k}$の中心$\mathfrak{k}_0$と$\mathfrak{k}$の単純イデアル$\mathfrak{k}_1,\cdots,\mathfrak{k}_n$の直和になっている．この直和における$\mathfrak{k}$から$\mathfrak{k}_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$への射影をπ_iとする．

$\mathfrak{g}\cap(\mathrm{Ker}\,\pi_i)$は$\mathfrak{g}$のイデアルであるから，

$$\mathfrak{g}\cap(\mathrm{Ker}\,\pi_i)=(0)\quad\text{または，}\quad\mathfrak{g}\cap(\mathrm{Ker}\,\pi_i)=\mathfrak{g}$$

である．$\mathfrak{g}\neq(0)$であるから，少くとも1つのiに対して，$\mathfrak{g}\cap(\mathrm{Ker}\,\pi_i)=(0)$でなければならない．そのとき，$\pi_i(\mathfrak{g})\cong\mathfrak{g}$であるから，$i\neq0$である．（$\pi_0(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{k}_0$で$\mathfrak{k}_0$は$\mathfrak{k}$の中心であるから，可換環．したがって$\mathfrak{g}$も可換となり矛盾）．

適当に番号を入れかえることにより

$$\mathfrak{g} \cap (\operatorname{Ker} \pi_1) = (0)$$

とする．このとき，

$$\mathfrak{g} \cong \pi_1(\mathfrak{g})$$

$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}_1$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであるから，(0) または $\mathfrak{g}$ で，もし $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{g}$ とすると $\mathfrak{k}_1 \supset \mathfrak{g}$ となって，仮定（$\mathfrak{g}$ を含む $\mathfrak{k}$ の単純イデアルは存在しない）に矛盾する．よって

$$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}_1 = (0)$$

である．$\pi_1(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{k}_1$ より

(3) $$\mathfrak{g} \cap \pi_1(\mathfrak{g}) = (0).$$

つぎに $[\mathfrak{g}, \pi_1(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_1] \subset \mathfrak{k}_1$ であるから，

$$[\mathfrak{g}, \pi_1(\mathfrak{g})] = \pi_1([\mathfrak{g}, \pi_1(\mathfrak{g})]) = [\pi_1(\mathfrak{g}), \pi_1(\mathfrak{g})] \subset \pi_1(\mathfrak{g}).$$

したがって

(4) $$\mathfrak{k}' = \mathfrak{g} + \pi_1(\mathfrak{g}) \quad \text{（ベクトル空間としての直和）}$$

とおくと，$\mathfrak{k}'$ は $\mathfrak{k}$ の部分環であって，$\pi_1(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{k}'$ の単純イデアルである．もし $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{k}'$ のイデアルとすると $[\mathfrak{g}, \pi_1(\mathfrak{g})] = (0)$ となる．しかるに，$[\mathfrak{g}, \pi_1(\mathfrak{g})] = [\pi_1(\mathfrak{g}), \pi_1(\mathfrak{g})]$ より，$\pi_1(\mathfrak{g})$ が可換となり矛盾．よって $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{k}'$ のイデアルではない．

§3 の系によって $\mathfrak{k}'$ はコンパクト，半単純で，

$$s(\mathfrak{k}') = s(\mathfrak{g}) + s(\pi_1(\mathfrak{g})) = 2.$$

したがって，$\pi_1(\mathfrak{g})$ が $\mathfrak{k}'$ の単純イデアルであるから，$\pi_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{k}'_1$

とおくと，他の単純イデアル $\mathfrak{k}_2'$ が存在して，

(5) $$\mathfrak{k}' = \mathfrak{k}_1' + \mathfrak{k}_2'$$

と単純イデアルの直和になる．(4) と (5) を比較すれば，

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{k}_1' = \dim \mathfrak{k}_2'$$

となることがわかる．

$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}_2'$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであるから，$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}_2' = (0)$ または $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}_2' = \mathfrak{g}$ である．もし $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}_2' = \mathfrak{g}$ とすると，$\mathfrak{k}_2' \supset \mathfrak{g}$ で次元の関係より $\mathfrak{k}_2' = \mathfrak{g}$ となり，$\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{k}'$ のイデアルでないことと反する．よって

(6) $$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}_2' = (0)$$

さて $\mathfrak{h}' = \mathfrak{k}' \cap \mathfrak{h}$ とおくと，

(7) $$\mathfrak{k}' = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}' \quad (\text{直和})$$

となり，(4) と比較すると，

$$\dim \mathfrak{h}' = \dim \mathfrak{g}.$$

である．

$\mathfrak{k}'$ に対応する K の連結リー部分群を K' とし，$H' = K' \cap H$ とする．K' はコンパクト半単純であるから H' もコンパクトで，

$$K' = G H', \qquad G \cap H' = \{単位元\}$$

となる．よって H' は連結で，補題1より半単純となるが，

$$s(H') = s(K') - s(G) = 2 - 1 = 1$$

であるから，H' は単純である．H が K の正規部分群を含まな

いから，H'はK'の正規部分群を含まない．よって$\mathfrak{f}'$は$\mathfrak{k}'$のイデアルを含まない．

$\mathfrak{k}'$から$\mathfrak{k}_1'$, $\mathfrak{k}_2'$への射影をσ_1, σ_2とし，σ_iを$\mathfrak{g}$および$\mathfrak{f}'$へ制限したものをσ_i', σ_i'' $(i=1,2)$とする．(3)と(6)より

$$\mathrm{Ker}\,\sigma_1' = \mathfrak{g}\cap\mathfrak{k}_2' = (0)$$

$$\mathrm{Ker}\,\sigma_2' = \mathfrak{g}\cap\mathfrak{k}_1' = (0)$$

であるから，σ_i'は$\mathfrak{g}$から$\mathfrak{k}_i'$の上への同型写像である．また，$\mathfrak{f}'$が単純であることから，

$$\mathrm{Ker}\,\sigma_1'' = \mathfrak{f}'\cap\mathfrak{k}_2' = (0) \text{ または } \mathfrak{f}'$$

で，もし$\mathfrak{f}'\cap\mathfrak{k}_2' = \mathfrak{f}'$とすると$\mathfrak{k}_2' = \mathfrak{f}'$となり，$\mathfrak{f}'$が$\mathfrak{k}'$のイデアルを含まないことに矛盾する。よって

$$\mathrm{Ker}\,\sigma_1'' = (0)$$

同様にして

$$\mathrm{Ker}\,\sigma_2'' = (0)$$

となるから，σ_i''は$\mathfrak{f}'$から$\mathfrak{k}_i'$の上への同型写像である．そこで

$$\varphi = \sigma_2'^{-1}\circ\sigma_2''\circ\sigma_1''^{-1}\circ\sigma_1'$$

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{g} \arrow[dl, "\sigma_1'"'] \arrow[dr, "\sigma_2'"] & \\ \mathfrak{k}_1' & & \mathfrak{k}_2' \\ & \mathfrak{f}' \arrow[ul, "\sigma_1''"] \arrow[ur, "\sigma_2''"'] & \end{tikzcd}$$

とおくと，φは$\mathfrak{g}$の自己同型である．$\mathfrak{g}$はコンパクト単純であるから，$\mathfrak{g}$の0でない元Xで$\varphi(X)=X$となるものが存在する．

$$Y = \sigma_1''^{-1}\circ\sigma_1'(X)$$

とおくと，$Y\in\mathfrak{f}'$で，$\sigma_1''(Y)=\sigma_1'(X)$，すなわち

$$\sigma_1(Y) = \sigma_1(X)$$

また一方，

$$\sigma_2'^{-1}\circ\sigma_2''(Y) = \varphi(X) = X$$

より　$\sigma_2''(Y) = \sigma_2'(X)$，すなわち．

$$\sigma_2(Y) = \sigma_2(X)$$

となる。よって

$$X = \sigma_1(X) + \sigma_2(X) = \sigma_1(Y) + \sigma_2(Y) = Y.$$

となって，$X=Y\in\mathfrak{g}\cap\mathfrak{f}'$ である．しかるに $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{f}'=(0)$ であるから，$X\neq 0$ に矛盾．

以上によって，$\mathfrak{g}$を含む$\mathfrak{L}$の単純イデアルが存在しないという仮定より矛盾を導くことが出来た．したがって定理4が証明されたことになる．

§5．Killing ベクトル場について．

ds^2 を連結リー群G上の左不変なリーマン計量とするとき，$I(G,ds^2)$ のリー環はG上の ds^2 に関する Killing ベクトル場合の全体と考えることが出来る．このとき，$L(G)$ に対応する部分環は．G上の右不変なベクトル場の全体である．すなわち $I(G,ds^2)$のリー環を $\mathfrak{I}(G,ds^2)$ とすると，

$$\mathcal{I}(G, ds^2) = \{X \mid X \in \mathfrak{X}(G),\ L_X ds^2 = 0\}.$$

ただし $\mathfrak{X}(G)$ は G 上のベクトル場の全体である。

また左（または右）不変なベクトル場の全体を $\mathcal{L}(G)$（または $\mathcal{R}(G)$）とするとき，

$$\mathcal{R}(G) \subset \mathcal{I}(G, ds^2)$$

となっている。

定理1，定理2はつぎのようにいいかえてよい。

定理5．G，ds^2 は定理1と同じとするとき，

1) $\mathcal{R}(G) \subset \mathcal{I}(G, ds^2) \subset \mathcal{R}(G) + \mathcal{L}(G)$

2) $\mathcal{R}(G)$ は $\mathcal{I}(G, ds^2)$ のイデアルである。