数理解析研究所講究録
251巻 1975年 1-35

葉層構造と計量構造とに関連する特性類

東工大 理 大学院 安部 直人

§0. 序

微分可能多様体に葉層構造（foliation）が与えられた時、葉層構造に固有な map や vector bundle を定義できる。これ等の概念は、複素構造に関する、holomorphic map や holomorphic vector bundle に対応するものである。ここでの固有な vector bundle とは、foliation の各 leaf 上で flat になるような bundle を指すものとする。Smooth foliation の normal bundle はこの典型的な例である。固有な map とは、一方の foliation の各 leaf を、他方の foliation のただ一つの leaf に写像している様なものとする。

この報告では、上記の bundles に対し foliation に固有な普通より細かい分類を[1]に沿って定義し、これを使って若干の事を統一的に調べる。特に、これ等の vector bundles の構造群の maximal compact subgroup $U(k)$ または $O(k)$ へ

の reducibility につき、細かい分類の意味で foliation に compatible な reduction の存在の obstructions として、exotic 特性類と云う base space の cohomology の元が定義される。例えば、余次元 q の foliation の normal bundle を考える時、構造群 $GL(q, \mathbb{R})$ が $O(q)$ へ foliation に compatible に reducible である事と、bundle-like metric [11] が存在する事とは同値であり、その obstructions として Godbillon-Vey の不変量 [6] や exotic characteristic classes [2] が定義されると見てよい。なお、Heitsch [7] は normal bundle において、この Bott の classes のあるものが一般には bundle invariant ではないことを注意しているが、細かい分類の観点から見れば、この事は明確に認識される。Complex analytic な場合も扱うので、exotic 特性類は complex vector bundle に対して定義する。普通の特性類の性質と、exotic 特性類の性質との比較も、主たる目的の一つである。

§1. 基本的定義

n 次元多様体 M が余次元 q の葉層構造 (foliation) を持つとは、M の座標系 $\mathcal{F} = \{(U_\lambda, (x^a_\lambda, y^i_\lambda))\}$ ($1 \leqq a \leqq n-q$, $1 \leqq i \leqq q$) で.

$\oslash_1$　各 $U_\lambda \cap U_\mu \ (\neq \phi)$ において　$y_\lambda^i = f_{\lambda\mu}^i((y_\mu^j))$

という性質を持つものが存在する事である。　この様な座標系を flat と呼ぶ。　Mの局所座標 $(U, (x^a, y^i))$ は、これを $\mathcal{F}$ に加えても $\oslash_1$ が成立する時、$\mathcal{F}$ に関して flat と呼ばれる。　他の flat な座標系 $\mathcal{F}'$ は、$\mathcal{F}$ と合わせても $\oslash_1$ の性質を持つ時、$\mathcal{F}$ と同じ foliation を定めるとする。　Mの2つの trivial な foliation、即ち余次元 0 と n のものをそれぞれ $\mathcal{T}$ と $\mathcal{O}$ で表わす。（ただし、$q = 0, n$ においては、それぞれの座標は (x^a) のみ, (y^i) のみと約束する。）　Mの開集合U上に自然に induce される foliation を $\mathcal{F}|U$ で書く。

Mが微分可能多様体の時、微分可能な座標系によって定義される smooth foliation を与えると、Mの tangent bundle $T = TM$ の integrable な subbundle F が $(\partial/\partial x^a)$ により決まる。　この時、T/F を $\mathcal{F}$ の normal bundle と呼ぶ。

Flat な座標系 $\mathcal{F}_c = \{(U_\lambda, (x_\lambda^a, y_\lambda^i))\}$ において、(y_λ^i) は複素座標で $\oslash_1$ における $f_{\lambda\mu}^j$ は holomorphic である時、$\mathcal{F}_c$ を complex analytic foliation と呼ぶ。（複素余次元は q である。）　$\mathcal{F}_c$ は余次元 $2q$ の smooth foliation を決め、この underlying な smooth foliation は $\mathcal{F}$ と書かれる。

多様体 M' は foliation $\mathcal{F}'$ を持つとする。　この時、連続写

像 $f : M \to M'$ が $\mathcal{F}$ の各 leaf を $\mathcal{F}'$ のただ1つの leaf に map しているならば、f を $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ に compatible な map、または簡単に $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-map と呼ぶことにする。$\mathcal{F}$ に関して flat な局所座標 (x^a, y^i)、$\mathcal{F}'$ に関して flat な局所座標 (x'^b, y'^j) につき、$(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-map f は

⊘2 $$y'^{j'} \circ f = f^{j'}((y^i))$$

を満たす。$(\mathcal{F}, \mathcal{O}')$-map を特に $\mathcal{F}$-basic であると云う事もある。Complex analytic foliations $\mathcal{F}_c$, $\mathcal{F}'_c$ に対しても、⊘2 で $f^{j'}$ が holomorphic である事を要求して、$(\mathcal{F}_c, \mathcal{F}'_c)$-map を定義する。

$M \times \mathbb{R}$ 上には余次元 $q+1$ の自然な foliation $\tilde{\mathcal{F}}$ が $\mathcal{F}$ から induce される。写像 $j_s : M \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ を、$p \in M$, $s \in \mathbb{R}$ に対し、$j_s(p) := (p, s)$ と定義すれば、これは $(\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}})$-map である。二つの $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-maps $f_0, f_1 : M \to M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-homotopic であるとは、$(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{F}')$-map $H : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M'$ で $f_0 = H \circ j_0$, $f_1 = H \circ j_1$ を満たすものが存在することと定義する。なお、smooth foliations を考える時には、map などはすべて smooth なものを使う。

注意 Foliations を考えない時の map は $(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$-map または $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-map と見られる。

§2. $\mathcal{F}$-cocycles

以下の議論で、多様体 M には foliation $\mathcal{F}$ が与えられているとする。Lie 群 G と M の開集合 U に対し、G に値を持つ $\mathcal{F}|U$-basic functions の全体を $A^0_{\mathcal{F}}(U, G)$ で表わす。更に、これから定義される M 上の presheaf を $\mathfrak{G}_{\mathcal{F}}$ と記す。$\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を M の開被覆とする。

<u>定義</u> $\eta = \{g_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \longrightarrow G\}_{\lambda, \mu \in \Lambda}$ は次の条件を満足する時、係数 $\mathfrak{G}_{\mathcal{F}}$ の cocycle、または簡単に $\mathcal{F}$-cocycle と呼ばれる。$\mathcal{F}$-cocycles 全体の集合を $Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}_{\mathcal{F}})$ と書く。

i) $g_{\lambda\mu} \cdot g_{\mu\nu} = g_{\lambda\nu}$ on $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu$ (cocycle)、

ii) $g_{\lambda\mu} \in A^0_{\mathcal{F}}(U_\lambda \cap U_\mu, G)$。

M が complex analytic foliation $\mathcal{F}_c$ を持つ時には、上の定義で $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_c$ に換えて $\mathcal{F}_c$-cocycle という概念を定義できる。この時 G は complex Lie 群を考える。

例えば、普通の G-bundle の transition functions はいつでも $\mathcal{O}$-cocycle であり、$\mathcal{J}$-cocycle は flat G-bundle の transition functions になる。このように自明なものでない典型例としては、smooth foliation $\mathcal{F}$ の normal bundle T/F の、$\mathcal{F}$ に関して flat な座標系によって定義される $\nu = \{(\partial y^i_\mu / \partial y^j_\lambda) : U_\lambda \cap U_\mu \longrightarrow GL(q, \mathbb{R})\}$ がある。

$\mathfrak{F}_c$-vector bundle の典型例としては、$\mathfrak{F}_c$ に関し flat な座標系において $\nu_c = \{(\partial y^i_\mu/\partial y^j_\lambda) : U_\lambda \cap U_\mu \to GL(q, \mathbb{C})\}$ で定義されるものは、y^i_μ が y のみの函数で holomorphic であるから確かに条件をみたす。

<u>定義</u>　二つの $\mathfrak{F}$-cocycles $\eta^0 = \{g^0_{\lambda\mu}\}$, $\eta^1 = \{g^1_{\lambda\mu}\}$ が $\mathfrak{F}$-equivalent とは、次の条件をみたす $\{h_\lambda : U_\lambda \to G\}$ が存在することである。この時、$\eta^0 \underset{\mathfrak{F}}{\cong} \eta^1$ と書く。

i) $g^1_{\lambda\mu} = h_\lambda^{-1} g^0_{\lambda\mu} h_\mu$ on $U_\lambda \cap U_\mu$, (cohomologous)

ii) $h_\lambda \in A^0_{\mathfrak{F}}(U_\lambda, G)$.

特に $\mathcal{O}$ に関しては、$\underline{G}_{\mathcal{O}}$, $\underset{\mathcal{O}}{\cong}$ を $\underline{G}$, $\cong$ と書く事にする。

$\mathfrak{F}$-cocycles η に $\mathfrak{F}$-equivalent なものの成す類を、$[\eta]_{\mathfrak{F}}$ または同じ文字 η で表わし、$H^1(\mathcal{U}, \underline{G}_{\mathfrak{F}}) := Z^1(\mathcal{U}, \underline{G}_{\mathfrak{F}})/\underset{\mathfrak{F}}{\cong}$ で cohomology set を表わす。異なる開被覆で定義されている $\mathfrak{F}$-cocycles に対しては、その共通細分を考える事により、$\mathfrak{F}$-equivalent の概念は拡張される。M 上のすべての $\mathfrak{F}$-cocycles の $\mathfrak{F}$-equivalence classes の全体は、proper な開被覆による direct limit $H^1(M, \underline{G}_{\mathfrak{F}}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, \underline{G}_{\mathfrak{F}})$ によって表わされる。特に、M 上恒等的に G の単位元に値をとる函数によって定義される $H^1(M, \underline{G}_{\mathfrak{F}})$ の元を $\varepsilon_{\mathfrak{F}}$ で表わすことにする。

特に、$\mathcal{F}$ が complex analytic foliation $\mathcal{F}_c$ の underlying な foliation の時、$Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}_{\mathcal{F}_c}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}_{\mathcal{F}})$ であるが、$\mathcal{F}_c$-cocycles には、上の定義の $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_c$ に換えて $\mathcal{F}$-equivalent より細かい $\mathcal{F}_c$-equivalent なる概念を定義できる。

写像 $f: M \to M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-map ならば、$\eta' \in Z^1(\mathfrak{U}', \mathfrak{G}_{\mathcal{F}'})$ から induce される cocycle $f^*\eta' = \{g'_{\lambda\mu} \circ f\}$ は明らかに $Z^1(f^{-1}\mathfrak{U}', \mathfrak{G}_{\mathcal{F}})$ の元となるので、次の事が分かる。

命題 2.1 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-map $f: M \to M'$ は、induced cocycle を対応させる事によって、cohomology set の間の map $f^*: H^1(M', \mathfrak{G}_{\mathcal{F}'}) \to H^1(M, \mathfrak{G}_{\mathcal{F}})$ を induce する。

例 2.1 $f: M \to M'$ が submersion の時、M 上に自然に foliation $\mathcal{F}$ が決まり、f は $(\mathcal{F}, \mathcal{O}')$-map と見なされて、$f^*: H^1(M', \mathfrak{G}_{\mathcal{O}'}) \to H^1(M, \mathfrak{G}_{\mathcal{F}})$ が induce される。この f^* の image に入る元は、$\mathcal{F}$ の leaf 上 global に一定なものでなければならないから、f^* は一般には全射でない。

特に M の恒等写像を $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$-map と見なして $\iota_{\mathcal{F}}$ と書くとすると、$\iota_{\mathcal{F}}^*: H^1(M, \mathfrak{G}_{\mathcal{F}}) \to H^1(M, \mathfrak{G})$ が induce されるが、これは injective でも surjective でもない。この事は後の sections の結果からも解る。ここに、$H^1(M, \mathfrak{G})$ は M 上のすべての G-bundles の普通の意味での同型類の全

体とみなせる[8]。 なお、$i_{\mathfrak{F}}^*$ が injective でないと云う事は、M上の $\mathfrak{F}$-cocycles の $\underset{\mathfrak{F}}{\simeq}$ による分類が $\simeq$ による分類より細かいと云う事である。

$\mathfrak{F}$-cocycles に、$\underset{\mathfrak{F}}{\simeq}$ と $\simeq$ との間にある同値関係を次のように定義する。

<u>定義</u> M上の二つの $\mathfrak{F}$-cocycles η^0, η^1 が $\mathfrak{F}$-homotopic であるとは、$M \times \mathbb{R}$ 上の $\mathfrak{F}$-cocycle $\bar{\eta}$ が存在して $j_0^*\bar{\eta} \underset{\mathfrak{F}}{\simeq} \eta^0$ かつ $j_1^*\bar{\eta} \underset{\mathfrak{F}}{\simeq} \eta^1$ と成る事を云う。更に、η^0 と η^1 が有限コの $\mathfrak{F}$-homotopic な $\mathfrak{F}$-cocycles で結ばれる時 $\eta^0 \underset{\mathfrak{F}}{\approx} \eta^1$ と表わす。

普通の G-bundles と普通の同値 $\simeq$ に関しては次の事実が知られている。(例えば Hirzebruch [8]。)

■ $\eta^0 \underset{G}{\approx} \eta^1$ ならば $\eta^0 \cong \eta^1$。つまり、$f_0, f_1 : M \to M'$ が普通の意味で homotopic な maps とすれば、

$f_0^* = f_1^* : H^1(M', \underline{G}) \longrightarrow H^1(M, \underline{G})$ が成立する。

この事実は、G を $\mathfrak{F}$ にすると一般には成立しない。後に定義する exotic 特性類によっても、相違は解る。

<u>命題</u> 2.2 二つの $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$-maps $f_0, f_1 : M \to M'$ が $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$-homotopic ならば、$M'$ 上の $\mathfrak{F}'$-cocycle η' に対しては $f_0^*\eta' \underset{\mathfrak{F}}{\approx} f_1^*\eta'$ が成立する。

<u>注意</u>　M上の forms から定義される cohomology に関しては、状況は☒に似て来る。 $\mathcal{F}$ が smooth foliation の時

$$A^*_{\mathcal{F}} := \{\varphi \in A^* \mid i_X\varphi = \mathcal{L}_X\varphi = 0,\ \forall X \in \Gamma F\}$$

は、M の global forms 全体の作る de Rham complex (A^*, d) の subcomplex $(A^*_{\mathcal{F}}, d)$ を与える。 この complex の cohomology を $H^*_{\mathcal{F}}(M)$ と書き、base-like cohomology または $\mathcal{F}$-basic cohomology と呼ぶ [12]。 M' が smooth foliation $\mathcal{F}'$ を持ち、$f: M \to M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-map であれば、homomorphism $f^*: H^*_{\mathcal{F}'}(M') \longrightarrow H^*_{\mathcal{F}}(M)$ が induce される。 次の事が証明できる [1]。

☒　$(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-maps $f_0, f_1: M \longrightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-homotopic であれば、$f_0^* = f_1^*: H^*_{\mathcal{F}'}(M') \longrightarrow H^*_{\mathcal{F}}(M)$ が成立する。

§3. $\mathcal{F}$-fibre bundles と構造群の $\mathcal{F}$-reduction

Lie 群 G が多様体 N に左から効果的に作用しているとする。 W を全空間 W，底空間 M，射影 π，構造群 G，fibre N であるような fibre bundle とする。

<u>定義</u>　Fibre bundle W は次の性質をみたす座標系 $\{(U_\lambda, \Phi_\lambda)\}$ が存在する時、$\mathcal{F}$-fibre bundle と呼ばれる。 すなわち、

i)　$\Phi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times N$: bundle isomorphism、

ii)　$\exists \{g_{\lambda\mu}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}_{\mathcal{F}})$,　$\forall p \in U_\lambda \cap U_\mu,\ n \in N$

$$\Phi_\lambda \Phi_\mu^{-1}(p, n) = (p, g_{\lambda\mu}(p) n)\text{。}$$

このような W に対し、M の開集合 U と $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times N$: bundle isomorphism の組 (U, Φ) を上記の座標系に加えても i), ii) を満たすならば、(U, Φ) を $\mathfrak{F}$-admissible chart と云う。

<u>定義</u> W の二つの座標系がすべての $\mathfrak{F}$-admissible charts を共有するならば、これ等は同じ $\mathfrak{F}$-fibre bundle を定めるとする。

この事は2つの座標系の決める $\mathfrak{F}$-cocycles が $\mathfrak{F}$-同値になっている事と同じである。

<u>定義</u> W と W′ は M 上の $\mathfrak{F}$-fibre bundle で、同じ構造群と fibre を持つとする。 M の identity を cover する bundle isomorphism $f : W \to W'$ が $\mathfrak{F}$-isomorphism であるとは、W′ のいかなる $\mathfrak{F}$-admissible chart (U, Φ') に対しても、$(U, \Phi' \circ f)$ が W の $\mathfrak{F}$-admissible chart になっている事とする。 [8] と同様にして次を得る。

命題 3.1 M 上の構造群 G、fibre N の $\mathfrak{F}$-fibre bundle の $\mathfrak{F}$-isomorphism による同型類全体は $H^1(M, \mathfrak{G}_{\mathfrak{F}})$ と一対一に対応する。

$\eta \in H^1(M, \mathfrak{G}_{\mathfrak{F}})$ に対応する $\mathfrak{F}$-isomorphism class の中の $\mathfrak{F}$-fibre bundle を η に associate する $\mathfrak{F}$-fibre bundle

と云う事にする。 特に $\mathcal{F}$-vector bundle においては、$\mathcal{F}$-admissible chart に対応する local frame field を $\mathcal{F}$-admissible frame field と呼ぶ。

M が complex analytic foliation $\mathcal{F}_c$ を持つ時には、G を complex Lie 群，N を complex analytic な多様体として、定義の $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_c$ に換えれば、$\mathcal{F}_c$-fibre bundle が定義できる。 命題 3.1 は $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_c$ に換えても成立する。

以後は特に断りのない限り、少なくとも微分可能な場合を考えることにする。

$\mathcal{F}$-vector bundle の例としては、

<u>例</u> 3.1 すべての vector bundle は $\mathcal{O}$-vector bundle。

<u>例</u> 3.2 Flat vector bundle は $\mathcal{J}$-vector bundle の構造をもつ。

<u>例</u> 3.3 Foliation $\mathcal{F}$ の normal bundle T/F は $\mathcal{F}$-vector bundle である。 更に $F \subset E \subset T$ なる subbundle E が $[\Gamma F, \Gamma E] \subset \Gamma E$ を満たす時、T/E は canonical な $\mathcal{F}$-vector bundle の構造を持つ。

<u>証明</u>. $\mathcal{F}$ に関して flat な座標系 $\{(U_\lambda, (x_\lambda^i, y_\lambda^j))\}$ を一つとる。 T/E の fibre の次元を p とする。($q \geq p$) Index の範囲を $1 \leq s, t \leq p$, $p < r \leq q$ に取る。 $\pi' : T \to T/E$ を projection とする。 各 $x \in U_\lambda \cap U_\mu$ に対して、x の近傍

$U_{\lambda,x} \subset U_\lambda$ が存在して、この上で

$$\pi'\left(\frac{\partial}{\partial y^1_\lambda}\right) \wedge \cdots \wedge \pi'\left(\frac{\partial}{\partial y^p_\lambda}\right) \neq 0$$

と仮定してよい。この時、$U_{\lambda,x}$ 上の函数 $(A^t_{\lambda r})$ が存在して

$$⊘ \quad \pi'\left(\frac{\partial}{\partial y^r_\lambda}\right) = A^t_{\lambda r}\, \pi'\left(\frac{\partial}{\partial y^t_\lambda}\right) \quad \text{on} \quad U_{\lambda,x}$$

が成立する。$U_{\lambda,x} \cap U_{\mu,x}$ において ⊘ を使って

$$\pi'\left(\frac{\partial}{\partial y^s_\mu}\right) = \frac{\partial y^t_\lambda}{\partial y^s_\mu}\, \pi'\left(\frac{\partial}{\partial y^t_\lambda}\right) + \frac{\partial y^r_\lambda}{\partial y^s_\mu}\left(A^t_{\lambda r}\, \pi'\left(\frac{\partial}{\partial y^t_\lambda}\right)\right)$$
$$= \left(\frac{\partial y^t_\lambda}{\partial y^s_\mu} + \frac{\partial y^r_\lambda}{\partial y^s_\mu} A^t_{\lambda r}\right) \pi'\left(\frac{\partial}{\partial y^t_\lambda}\right) .$$

よって $A^t_{\lambda r}$ が (y^i_λ) のみの函数である事を証明すればよい。

⊘ より $\left(\frac{\partial}{\partial x^j_\lambda}, \frac{\partial}{\partial y^r_\lambda} - A^t_{\lambda r}\frac{\partial}{\partial y^t_\lambda}\right)$ は $E|U_{\lambda,x}$ の frame field になる。$[\Gamma F, \Gamma E] \subset \Gamma E$ より次式の右辺は $\in \Gamma(E|U_{\lambda,x})$ となり $\frac{\partial}{\partial x^j_\lambda} A^t_{\lambda r} = 0$ が成立。

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^j_\lambda}, \frac{\partial}{\partial y^r_\lambda} - A^t_{\lambda r}\frac{\partial}{\partial y^t_\lambda}\right] = -\left(\frac{\partial}{\partial x^j_\lambda} A^t_{\lambda r}\right)\frac{\partial}{\partial y^t_\lambda} . \qquad //$$

<u>例</u> 3.4 V と V' が $\mathcal{F}$-vector bundle ならば、V^*, $V \oplus V'$, $V \otimes V'$ は $\mathcal{F}$-vector bundle である。例えば、Lie 群 G が M に almost freely に作用している時、G の orbits を leaves とする foliation を $\mathcal{F}_G$ とすれば、T は $\mathcal{F}_G$-vector bundle の構造を持つ。

この事から complex analytic vector bundle の場合と同様に、$\mathcal{F}$-vector bundles の Grothendieck 群 $K_{\mathcal{F}}(M)$ が定義でき

る。（Grothendieck 群については例えば[8]。）

$\mathcal{F}_c$ - vector bundle の例.

<u>例</u> 3.5　$\mathcal{F}_c$ に関して flat な座標系 $\{(U_\lambda, (x_\lambda^i, y_\lambda^j))\}$ を考える。この複素座標が $y_\lambda^j = u_\lambda^j + \sqrt{-1}\, v_\lambda^j$ と表わされている時、$\left(\pi\left(\frac{\partial}{\partial u_\lambda^j}\right) - \sqrt{-1}\,\pi\left(\frac{\partial}{\partial v_\lambda^j}\right)\right)/2$ で定義される $(T/F)\otimes\mathbb{C}$ の complex subbundle を Q とする。この Q は $\mathcal{F}_c$-cocycle $\nu_c = \left\{\left(\frac{\partial y_\mu^j}{\partial y_\lambda^i}\right) ; U_\lambda \cap U_\mu \to GL(q, \mathbb{C})\right\}$ に associate する $\mathcal{F}$ - vector bundle となる。

<u>定義</u>　$\mathcal{F}$ - fibre bundle W に対応する $H^1(M, \underline{G}_{\mathcal{F}})$ の元が G の Lie 部分群 H の inclusion map $\iota_G^H : H \hookrightarrow G$ により induce された写像 $\iota_{G*}^H : H^1(M, \underline{H}_{\mathcal{F}}) \to H^1(M, \underline{G}_{\mathcal{F}})$ の image に含まれる時、W の構造群は H へ $\mathcal{F}$ - reducible であるという。

普通の bundle に対しては、次の事が知られている[8]。

☒　H を G/H が cell になるような G の closed Lie 部分群とすれば、$\iota_{G*}^H : H^1(M, \underline{H}) \to H^1(M, \underline{G})$ は bijective。

この事は $\mathcal{O}$ を $\mathcal{F}$ にすると、一般には成立しない。例えば、

<u>命題</u> 3.2　Smooth foliation $\mathcal{F}$ の normal bundle T/F の構造群 $GL(q, \mathbb{R})$ は、M が $\mathcal{F}$ に関する bundle-like metric [11] を持つ時に限り、$O(q)$ へ $\mathcal{F}$ - reducible である。

この命題は、より一般な次の事より出る。

命題 3.3 M上の real (resp. complex) $\mathcal{F}$-vector bundle Vの metric g が、Vの構造群 $GL(k,\mathbb{R})$ (resp. $GL(k,\mathbb{C})$) の $O(k)$ (resp. $U(k)$) への $\mathcal{F}$-reduction を与えるのは、g の $\mathcal{F}$-admissible frame fields に関する成分が local に $\mathcal{F}$-basic になっている時に限る。

証明. $\mathcal{F}$-admissible frame field s_λ に対して Gram-Schmidt の直交化を行なう時、s_λ に関する g の成分が y_λ のみに depend しているなら、出てくる係数はすべて y_λ のみの函数にとれる。よって、得られた frame field は $\mathcal{F}$-admissible である。逆は明らか。 //

この事は、Vの構造群の reduction が V の tensor field によって与えられている時、それが $\mathcal{F}$-reduction であるかどうか判断する具体的方法を与えている。

定義 Foliation $\mathcal{F}$ の余次元 q が偶数で、T/F の構造群が $GL(q/2,\mathbb{C})$ へ $\mathcal{F}$-reducible である時、$\mathcal{F}$ は almost complex foliation と云う。

例えば、$\mathcal{F}$ が複素余次元 $q/2$ の complex analytic な foliation の underlying な smooth foliation とすれば、T/F は Q の complex structure から induce される almost complex structure をもつが、これが $\mathcal{F}$-reduction を与えて

れる。 この例や命題3.2のように、$\mathcal{F}$ の normal bundle T/F の構造群の $\mathcal{F}$-reduction を考える事は有用である。

T/F の構造群 $GL(q, \mathbb{R})$ が、その部分群 H へ $\mathcal{F}$-reducible である事と、Conlon [5] の transverse H-structure が存在する事とは同値である。

構造群が $O(k)$ ($U(k)$) へ $\mathcal{F}$-reducible な $\mathcal{F}$-vector bundle の例としては次の様なものがある。

例 3.6　例 2.1 において $\mathrm{Im} f^*$ の元に associate する $\mathcal{F}$-vector bundle の構造群は、M' における $O(k)$ ($U(k)$) への reduction により、$\mathcal{F}$-reducible to $O(k)$ ($U(k)$) である。 より一般に、$\mathcal{F}$-vector bundle V の $\mathcal{F}$-admissible な開被覆が $\mathcal{F}$-basic partition of unity を許すならば、V の構造群は $O(k)$ (or $U(k)$) へ $\mathcal{F}$-reducible である。 ここで、$\mathcal{F}$-basic partition of unity とは、$\mathcal{F}$-basic な M 上の函数による 1 の分解の事である。

§4. Connections on $\mathcal{F}$-vector bundles

V を $\eta \in H^1(M, \underline{GL(k, \mathbb{F})}_{\mathcal{F}})$ に associate する $\mathcal{F}$-vector bundle とする。 ここで $\mathbb{F}$ は $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ を表わすとする。

<u>定義</u>　Connection $D: \Gamma V \longrightarrow \Gamma(T^* \otimes V)$ が、V の いかなる $\mathcal{F}$-admissible frame field s に対しても、

⊘ $\quad D_X s = 0$, for $\forall X \in \Gamma(F|U)$ 、

である時、η に compatible な $\mathcal{F}$-flat connection と呼ばれる。

次の命題は ⊘ より容易に解る。

<u>命題</u> 4.1 $\quad K_D(X,Y) := [D_X, D_Y] - D_{[X,Y]} = 0$ 、$\forall X, Y \in \Gamma F$。

$\mathcal{F}$-flat connection の例としては、

<u>例</u> 4.1 例 3.3 の T/E には、次に定義する標準的な $\mathcal{F}$-flat connection が存在する。これは、$E = F$ の時には、Bott [2] により定義された basic connection と一致する。

T/E に一つの connection D を取り、$T = F \oplus F^{\perp}$ と分解しておく。$s \in \Gamma(T/E)$ に対し、$\tilde{s} \in \Gamma T$ で $\pi'(\tilde{s}) = s$ なるものを取り、$\forall X \in \Gamma T$ に

$$\nabla_X s := \pi'([\pi_F X, \tilde{s}]) + D_{\pi_{F^\perp} X} s$$

と定義すれば、$[\Gamma F, \Gamma E] \subset \Gamma E$ より $\tilde{s}$ の取り方によらず、T/E の connection となる。$\mathcal{F}$ に関して flat な座標 $(U, (x^a, y^i))$ において、$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \pi'\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \pi'\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right]\right) = 0$ となって ∇ は $\mathcal{F}$-flat connection となる。$F = C(E)$ の時、[9] では generalized Bott connection と呼ばれているものである。

<u>例</u> 4.2 例 3.2 において、V の $\mathcal{J}$-flat connection とは、即ち V の $\mathcal{J}$-admissible frame fields を parallel frame fields として持つ flat connection の事である。

実は、次の定理が成立する。

<u>定理</u> 4.2 $\mathcal{F}$-vector bundle V 上には η に compatible な $\mathcal{F}$-flat connection が存在する。

<u>証明</u> $\{s_\lambda\}$ を open covering $\{U_\lambda\}$ 上の η に関して、$\mathcal{F}$-admissible な frame fields の族とする。ここで $\{U_\lambda\}$ は locally finite で 1 の分解 $\{f_\lambda\}$ を持つとしてよい。先ず $V|U_\lambda$ 上に connection D^λ を $D^\lambda s_\lambda = 0$ によって定義し、$D := \sum_\mu f_\mu D^\mu$ とおけば、D は connection で

$$\theta_\lambda s_\lambda = D s_\lambda = \sum_\mu f_\mu D^\mu (g_{\lambda\mu} s_\mu) = \Big(\sum_\mu f_\mu (dg_{\lambda\mu}) g_{\lambda\mu}^{-1}\Big) s_\lambda$$

が成立する。ところで $g_{\lambda\mu}$ は (y^i) のみの函数だから θ_λ の成分は dy^i_λ の一次結合である。よって $D_X s_\lambda = 0$, for $\forall X \in \Gamma(F|U_\lambda)$ となる。//

二つの $\mathcal{F}$-flat connections の間には、次の様な関係がある。

<u>命題</u> 4.3 Vector bundle V が、$H^1(M, \underline{GL(k, F)}_{\mathcal{F}})$ の元 η, η' の各々に associate する二通りの $\mathcal{F}$-vector bundle の構造を持っている時、各々に compatible な $\mathcal{F}$-flat connections を D, D' とする。この時、$\forall X \in \Gamma F$ につき $D_X = D'_X$ である事と、η と η' とが $\mathcal{F}$-equivalent である事とは同値である。

<u>証明</u> η, η' に関する V の $\mathcal{F}$-admissible frame fields

をそれぞれ s, s' とする。これらの frame fields の定義域 U, U' が共通部分を持つとすれば $g : U \cap U' \to GL(k, F)$ で $s' = gs$ となるものが存在する。$Ds' = (dg)s + g(Ds)$ で、$\forall X \in \Gamma(F|U \cap U')$, $D_X s' = (Xg)s + g(D_X s) = (Xg)s$。ところで、仮定より $D_X s' = D_X s = 0$ for $X \in \Gamma(F|U \cap U')$ であるから $\forall X \in \Gamma(F|U \cap U')$, $Xg = 0$。よって g は (y^i) のみの函数で、η と η' の決める $\mathfrak{F}$-admissible frame fields は同じになる。逆は明らかである。//

M' は foliation $\mathfrak{F}'$ を持つとする。V' は M' 上の $\mathfrak{F}'$-vector bundle で η' に associate するもの、D' は V' 上の $\mathfrak{F}'$-flat connection で η' に compatible なものとする。次の事が容易に解る。

<u>命題</u> 4.4　$f : M \to M'$ が $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}')$-map で f^*V' は f により induce された $\mathfrak{F}$-flat bundle とすれば、induced connection f^*D' は f^*V' 上の、$f^*\eta'$ に compatible な $\mathfrak{F}$-flat connection である。

$\mathfrak{F}$-vector bundle V の構造群 $GL(k, F)$ の、Lie 部分群 G への $\mathfrak{F}$-reducibility と V 上の $\mathfrak{F}$-flat connection の holonomy 群に関しては、

<u>命題</u>4.5　V上に、holonomy群がGに含まれる $\mathcal{F}$-flat connectionが存在すれば、Vの構造群は G へ $\mathcal{F}$-reducible である。

<u>証明</u>　V の linear frame bundle を B、その projection を $\pi : B \longrightarrow M$ とする。V の $\mathcal{F}$-admissible charts における開被覆 $\{U_\lambda\}$ を、$\mathcal{F}$ に関する flat な座標系 $(x_\lambda^a, y_\lambda^i)$ で $(x_\lambda^a, y_\lambda^i) : U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$: diffeo. であるようなものとしてよい。この時、p_λ を $(0,0)$ に対応する点、D_λ を $0 \times \mathbb{R}^q$ に対応する U_λ の subset とする。$\pi_\lambda : U_\lambda \to D_\lambda$ を natural projection とすれば、$\mathcal{F}|U_\lambda$ の leaves は $\pi_\lambda^{-1}(p)$, $p \in D_\lambda$ によって与えられる。$p_0 \in M$, $u_0 \in \pi^{-1}(p_0)$, p_0 から p_λ への curve c_λ を固定しておく。

V に $\mathcal{F}$-flat connection D が与えられたとすれば、curve c に沿っての平行移動 $\tilde{c}$ が決まる。D は $\mathcal{F}$ の leaf 上で flat（命題4.1）になるから、$\pi_\lambda : U_\lambda \to D_\lambda$ を cover する bundle map $\tilde{\pi}_\lambda : P|U_\lambda \to P|D_\lambda$ で $u \in P|D_\lambda$ に対し

i)　$\tilde{\pi}_\lambda^{-1}(u)$ は D に関して horizontal で、

ii)　$\tilde{\pi}_\lambda^{-1}(R_g u) = R_g(\tilde{\pi}_\lambda^{-1}(u))$, $\forall g \in GL(k, \mathbb{F})$

を満たすものが存在する。なお、$\pi^{-1}(p_\lambda)$ 上に $u_\lambda := \tilde{c}_\lambda u_0$ を決める。D_λ において原点 p_λ から発する ray を r_λ とすると、$u \in P|U_\lambda$ に対して $u_\lambda a = \tilde{r}_\lambda^{-1}(\tilde{\pi}_\lambda(u))$ なる $a \in GL(k, \mathbb{F})$

が決まる。この写像を $\varphi_\lambda : P|U_\lambda \to GL(k,\mathbb{F})$ とすれば、transition function $g_{\lambda\mu}(\pi(u)) = \varphi_\lambda(u)(\varphi_\mu(u))^{-1}$ は ii) により $\mathcal{F}|U_\lambda \cap U_\mu$ の leaf 上 constant である。$g_{\lambda\mu}$ が G-valued である事は、i) より、普通の holonomy 定理と同様に証明できる。 //

この命題の逆に関しては、

<u>命題</u> 4.6 G が $GL(k,\mathbb{F})$ の reductive な subgroup である時、$\mathcal{F}$-vector bundle V の構造群が G へ $\mathcal{F}$-reducible ならば、V に holonomy 群が G であるような $\mathcal{F}$-flat connection が存在する。

<u>証明</u> 定理4.2 により与えられる V 上の $\mathcal{F}$-flat connection D に対応する linear frame bundle B 上の connection form を $\omega : TB \to \mathfrak{gl}(k,\mathbb{F})$ とする。G が reductive だから $\mathfrak{gl}(k,\mathbb{F}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$, $ad(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ なる linear subspace $\mathfrak{m}$ が存在する。ω の $\mathfrak{g}$-成分を $\omega_{\mathfrak{g}}$ で表わす。構造群 G への $\mathcal{F}$-reduction を $\iota : B' \to B$ とすると、$\iota^*\omega_{\mathfrak{g}} : TB' \to \mathfrak{g}$ は B' 上の connection form となる。この $\iota^*\omega_{\mathfrak{g}}$ に対応する connection D' が求めるもの。 //

V の構造群の reduction が V の tensor field によって与えられている時には、

<u>命題</u> 4.7　DをV上の$\mathfrak{F}$-flat connectionとする。Vの metric tensor field g は、$\forall X \in \Gamma F$ に対して

$$D_X g = 0,$$

を満たす時に限り、Vの構造群の$O(k)$ (or $U(k)$) への$\mathfrak{F}$-reduction を与える。

<u>証明</u>　$s = (s_\alpha)$ $(1 \leqq \alpha, \beta \leqq k)$ を$V|U$の$\mathfrak{F}$-admissible frame field とすると、$\forall X \in \Gamma(F|U)$に対して

$$0 = (D_X g)(s_\alpha, s_\beta) = X g(s_\alpha, s_\beta) - g(D_X s_\alpha, s_\beta) - g(s_\alpha, D_X s_\beta)$$

であるが $D_X s_\alpha = D_X s_\beta = 0$ なので、$X g(s_\alpha, s_\beta) = 0$。つまり $g(s_\alpha, s_\beta)$ は local に$\mathfrak{F}$-basic function なので、命題3.3より$\mathfrak{F}$-reductionを与える。逆は明らか。//

この時Dは metric connection ではないが、実は命題4.3により、Dと"$\mathfrak{F}$-equivalent"なD'を適当に取って、

$$D'_X g = 0 \quad \text{for} \quad \forall X \in \Gamma T,$$

とする事ができる。

上の命題4.7は、g以外の一般なVのtensor fieldに対しても成立する。例えば、Vがreal $\mathfrak{F}$-vector bundleで、tensor field J が、Vの構造群$GL(k, \mathbb{R})$の$GL(k/2, \mathbb{C})$への$\mathfrak{F}$-reductionを与えていれば、$\mathfrak{F}$-flat connection D につき、$D_X J = 0$, $\forall X \in \Gamma F$ が成立する。この時も、D'を適当に取って $D'_X J = 0$, $\forall X \in \Gamma T$ とできる。

M は complex analytic foliation $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ を持つとし、$\mathcal{F}$ で $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ の underlying な smooth foliation を表わすとする。V は M 上の $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$-vector bundle で、$H^1(M, \underline{GL(k,\mathbb{C})}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}})$ の元 η に associate しているとする。

<u>定義</u> V の $\mathcal{F}$-flat connection $D: \Gamma V \to \Gamma(T^* \otimes V)$ が、いかなる $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$-admissible frame field s に対しても、

$$D_X s = 0, \quad \text{for } \forall X \in \Gamma(\overline{Q}|U),$$

である時、D は η に compatible な $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$-flat connection と呼ばれる。

前記の定理 4.2 と同様にして、次の事が証明される。

<u>定理</u> 4.8 $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$-vector bundle V には、η に compatible な $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$-flat connection が存在する。

$\mathcal{F}$-flat connection に関する命題 4.3, 4.4 は、$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$-flat connection に関しても同じ形式で成立する。

§5. Connections と特性類

M 上の complex vector bundle V に connection D が与えられた時、V の local frame field に関する connection (resp. curvature) matrix を θ (resp. Θ) と書く。Lie 環 $gl(k, \mathbb{C})$ 上の adjoint invariant polynomials 全体の作る

graded algebra を$I(GL(k,\mathbb{C}))$で表わす。D^0とD^1をV上の二つの connections、$A^s(M) := \Gamma(\Lambda^s T^*)$とする。ただし、$T^*$は$TM \otimes \mathbb{C}$の dual である。

<u>定義</u>. $\mathbb{C}$-module homomorphisms

$$\lambda(D^1) : I^r(GL(k,\mathbb{C})) \longrightarrow A^{2r}(M)\text{、}$$
$$\lambda(D^0, D^1) : I^r(GL(k,\mathbb{C})) \longrightarrow A^{2r-1}(M)$$

を次の様に定義する。各$\varphi \in I^r(GL(k,\mathbb{C}))$に対して

$$\lambda(D^1)\varphi := \varphi(\Theta^1, \cdots, \Theta^1)$$
$$\lambda(D^0, D^1)\varphi := r\int_0^1 \varphi(\theta^1 - \theta^0, \Theta^t, \cdots, \Theta^t)\,dt\text{、}$$

ここでΘ^tは connection $tD^1 + (1-t)D^0$の curvature matrix とする。

この定義は local であるが、φが invariant polynomial より、M上の global forms を確かに決めている。これ等の homomorphisms に対して、Chern-Weil の理論は次の事を保障してくれる。（例えば [4]。）

☒$_1$ $d(\lambda(D^1)\varphi) = 0$ 。

☒$_2$ $d(\lambda(D^0, D^1)\varphi) = \lambda(D^1)\varphi - \lambda(D^0)\varphi$ 。

つまり、graded algebra 間の induced homomorphism

$$\lambda(D^1)^* : I(GL(k,\mathbb{C})) \longrightarrow H^*(M)$$

は V の connections の取り方によらず、V の同型類によって決まる。$\lambda(D^1)^*$の image は V の特性類と呼ばれる。

Mは余次元qのfoliation $\mathfrak{F}$を持ち、VはM上のcomplex $\mathfrak{F}$-vector bundleとする。

<u>命題</u> 5.1　D'がVの$\mathfrak{F}$-flat connectionならば、

$$\lambda(D')\varphi = 0 \quad \text{for } \deg\varphi > q\ 。$$

<u>証明</u>　s_λを$V|U_\lambda$の$\mathfrak{F}$-admissible frame fieldとすれば、命題4.1よりD'のcurvature matrix Θ'_λに対して

$$\Theta'_\lambda(X, Y) = 0 \quad \text{for } \forall X, Y \in \Gamma(F|U_\lambda)$$

が成立する。よってΘ'_λの成分はdy^i_λによって生成される$A^*(U_\lambda)$のidealに含まれる。$\deg\varphi > q$ならば、$\varphi(\Theta'_\lambda, \cdots, \Theta'_\lambda)$の各単項は$dy^i_\lambda$を$q$コより多く含んでいることになって$0$である。//

$\mathrm{Chern}^r(V) := \mathrm{Im}\lambda(D')^* \cap H^r(M)$とおくと、定理4.2より

<u>系</u>　Vが$\mathfrak{F}$-vector bundleの構造を持つならば、

$$\mathrm{Chern}^r(V) = 0 \quad \text{for } r > 2q\ 。$$

更にqが偶数で、$\mathfrak{F}_c$はM上の複素余次元$q/2$のcomplex analytic foliation、VはM上の$\mathfrak{F}_c$-vector bundleとすれば、命題5.1と同じ形式の証明で次の結果を得る。

<u>命題</u> 5.2　D'がVの$\mathfrak{F}_c$-flat connectionならば、

$$\lambda(D')\varphi = 0 \quad \text{for } \deg\varphi > q/2\ 。$$

前記の定理4.8により

<u>系</u>　Vが $\mathfrak{F}_c$-vector bundle の構造を持つならば、

$$\mathrm{Chern}^r(V)=0 \quad \text{for } r>q \text{。}$$

この系のように特性類が丁度余次元より大な所でvanishする場合を少し考えてみる。

Pasternack [10] の結果を云い換えると、

☒ Foliation の normal bundle T/F に、$\mathfrak{F}$-reduction を与える metric が存在するならば、

$$\mathrm{Chern}^r(T/F\otimes\mathbb{C})=0 \quad \text{for } r>q \text{。}$$

この結果は、命題5.1 で $V=T/F\otimes\mathbb{C}$ とおいた時の Bott [2] の結果を特別の場合に詳しくしたものである。一般の $\mathfrak{F}$-vector bundle に対して、☒ を拡張しようとすると無理がある。少し条件を強くすれば、次の定理を証明することができる。（Abe [1]）

☒ 例3.6 における条件をみたす $\mathfrak{F}$-vector bundle V に対しては、

$$\mathrm{Chern}^r(V)=0 \quad \text{for } r>q \text{。}$$

<u>証明</u>　$\mathfrak{F}$-basic partition of unity を使って、定理4.2 の connection を作ると $\theta_\lambda=\sum_\mu f_\mu(dg_{\lambda\mu})g_{\lambda\mu}^{-1}$ は (y^i) のみに depend する form となるからである。　//

§6. Complex $\mathcal{F}$-vector bundle の exotic 特性類

この section では [2] に定義されている cochain complex WO_q に類似な $WU(k)'_q$ を構成する。この complex を使って、complex $\mathcal{F}$-vector bundle に対して exotic 特性類を定義し、その性質を調べる。特に、foliation $\mathcal{F}$ の normal bundle の複素化 $T/F \otimes \mathbb{C}$ に対しては [2] に定義されている exotic characteristic classes に一致する。

<u>定義</u> $\mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \cdots, c_k, \bar{c}_k]$ を $\dim c_i = \dim \bar{c}_i = 2i$ なる $2k$ コの variables $c_1, \bar{c}_1, \cdots, c_k, \bar{c}_k$ の生成する polynomial ring, $\mathbb{C}_q[c_1, \cdots, \bar{c}_k] := \mathbb{C}[c_1, \cdots, \bar{c}_k] / I_{2q}$、ここに I_{2q} は $\dim > 2q$ なる monomials により生成される ideal とする。$E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \cdots, h_k)$ を $\dim h_i = 2i-1$ なる k コの元により生成される $\mathbb{C}$ 上の exterior algebra とする。この時 graded algebra

$$WU(k)'_q := E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \cdots, h_k) \otimes \mathbb{C}_q[c_1, \bar{c}_1, \cdots, c_k, \bar{c}_k]$$

に differential d_W を $d_W c_i = d_W \bar{c}_i = 0$, $d_W h_i = (c_i - \bar{c}_i)/2\sqrt{-1}$ により定義して cochain complex とする。

M 上に smooth foliation $\mathcal{F}$ が与えられているとする。V を M 上の complex $\mathcal{F}$-vector bundle で $\eta \in H^1(M, \underline{GL(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}}})$ に associate するものとし、D^1 を η に compatible な V 上の $\mathcal{F}$-flat connection、D^0 を V のある (Hermitian) metric

を preserve する metric connection とする。

<u>定義</u> $\lambda'_\eta : WU(k)'_q \longrightarrow A^*(M)$ なる homomorphism を

$$\lambda'_\eta c_i := \lambda(D')\tilde{c}_i ,\quad \lambda'_\eta \bar{c}_i := \overline{\lambda(D')\tilde{c}_i} ,$$

$$\lambda'_\eta h_i := (\lambda(D^0, D')\tilde{c}_i - \overline{\lambda(D^0, D')\tilde{c}_i})/2\sqrt{-1}$$ で定義する。

ここに、invariant polynomial $\tilde{c}_i$ は $A \in gl(k, \mathbb{C})$ に対して $\det(I - \frac{t}{2\pi\sqrt{-1}}A) = 1 + \sum_{i=1}^{k} t^i \tilde{c}_i(A)$ で定義される。

<u>補題</u> 6.1 $d\lambda'_\eta = \lambda'_\eta d_W$ 。

<u>証明</u> $c_i, \bar{c}_i$ に対しては明らかである。(§5. ▨1)

A が $\bar{A} = -{}^tA$ なる時、$\overline{\tilde{c}_i(A)} = \tilde{c}_i(A)$ となるから、§5 の ▨2 を考え合わせ、h_i に関しては次の様になる。

$$\begin{aligned}
d(\lambda'_\eta h_i) &= (d(\lambda(D^0, D')\tilde{c}_i) - d(\overline{\lambda(D^0, D')\tilde{c}_i}))/2\sqrt{-1} \\
&= (\lambda(D')\tilde{c}_i - \overline{\lambda(D')\tilde{c}_i})/2\sqrt{-1} - (\lambda(D^0)\tilde{c}_i - \overline{\lambda(D^0)\tilde{c}_i})/2\sqrt{-1} \\
&= (\lambda'_\eta c_i - \lambda'_\eta \bar{c}_i)/2\sqrt{-1} - 0 \\
&= \lambda'_\eta((c_i - \bar{c}_i)/2\sqrt{-1}) = \lambda'_\eta(d_W h_i) \quad。 //
\end{aligned}$$

即ち、λ'_η は $WU(k)'_q$ の cohomology から complex de Rham cohomology への homomorphism を induce する。

<u>命題</u> 6.2 $\lambda'^*_\eta : H^*(WU(k)'_q) \longrightarrow H^*(M)$ は η の $\mathcal{F}$-equivalence class のみに depend する。

<u>証明</u> g_0, g_1 を V 上の metrics、D'_0, D'_1 を η に対して compatible な V 上の $\mathcal{F}$-flat connections とする。次に、$p : M\times\mathbb{R} \longrightarrow M$ を projection、$\tilde{\mathcal{F}}$ を $M\times\mathbb{R}$ 上の余次元 q の

canonical foliation とすると、次のものが存在する。

$\tilde{D}^1$: $\tilde{\mathcal{F}}$-vector bundle p^*V 上の $\tilde{\mathcal{F}}$-flat connection で $j_s^*\tilde{D}^1 = sD_1^1 + (1-s)D_0^1$ となるもの、

$\tilde{g}$: p^*V 上の metric で $j_0^*\tilde{g} = g_0$, $j_1^*\tilde{g} = g_1$ となる、

$\tilde{D}^0$; $\tilde{g}$ を preserve する metric connection on p^*V。

生成元のうち c_i, $\tilde{c}_i$ に対しては §5 の 補2 より成立するが、h_i に対しても、$s=0, 1$ として

$$
\begin{aligned}
j_s^*(\lambda(\tilde{D}^0, \tilde{D}^1)\tilde{c}_i) &= i\int_0^1 \tilde{c}_i(j_s^*\tilde{\theta}^1 - j_s^*\tilde{\theta}^0, j_s^*\Theta^t)\,dt \\
&= i\int_0^1 \tilde{c}_i(\theta_s^1 - \theta_s^0, \Theta_s^t)\,dt \\
&= \lambda(D_s^1, D_s^0)\tilde{c}_i \quad 。
\end{aligned}
$$

ところで $j_0^* = j_1^* : H^*(M\times\mathbb{R}) \to H^*(M)$ であるから主張は成立することになる。 //

定義　λ_η^* の image から特性類を除いたものを η (または $\mathcal{F}$-vector bundle V) の $\mathcal{F}$ に関する exotic 特性類と呼ぶことにする。

命題 4.6 または 4.7 より次の事が解る。

命題 6.3　Complex $\mathcal{F}$-vector bundle V の構造群が $U(k)$ へ $\mathcal{F}$-reducible であれば V の exotic 特性類はすべて 0 になる。（つまり、構造群の $U(k)$ への $\mathcal{F}$-reduction の存在に対する obstructions となっている。）

〔7〕に出ているVeyの方法で

命題 6.4　$WU(k)'_q$ において $u_i^- := (c_i - \bar{c}_i)/2\sqrt{-1}$, $u_i^+ := (c_i + \bar{c}_i)/2$ とおけば、$WU(k)'_q = E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \cdots, h_k) \otimes \mathbb{C}_q[u_1^-, u_1^+, \cdots, u_k^-, u_k^+]$

$d_W u_i^- = d_W u_i^+ = 0$ で $d_W h_i = u_i^-$ となる。$WU(k)'_q$ の cocycles の base として次の様なものがとれる。

$$\otimes \quad h_{i_1} \wedge \cdots \wedge h_{i_\ell} \otimes u_{j_1}^- \cdots u_{j_m}^- u_{s_1}^+ \cdots u_{s_t}^+$$

$$1 \leqq i_1 < \cdots < i_\ell \leqq k, \quad 1 \leqq j_1 \leqq \cdots \leqq j_m \leqq \min(q, k),$$
$$1 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_t \leqq \min(q, k),$$

i) $i_1 + j_1 + \cdots + j_m + s_1 + \cdots + s_t > q$,

ii) $i_1 \leqq j_1$ 。

$q' \geqq q$ とすれば、canonical projection

$$p_q^{q'} : WU(k)'_{q'} \longrightarrow WU(k)'_q$$

が定義でき、これは cochain homomorphism である。

M' が余次元 q' の foliation $\mathcal{F}'$ を持ち、$\eta' \in H^1(M', \underline{GL(k, \mathbb{C})}_{\mathcal{F}'})$ とすれば、命題 4.4 より次の事が解る。

命題 6.5　$f : M \longrightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-map ならば、次の diagram は可換である。

$$\begin{array}{ccc} H^*(WU(k)'_q) & \xleftarrow{(p_q^{q'})^*} & H^*(WU(k)'_{q'}) \\ \downarrow{\scriptstyle (\lambda'_{f^*\eta'})^*} & & \downarrow{\scriptstyle (\lambda'_{\eta'})^*} \\ H^*(M) & \xleftarrow[f^*]{} & H^*(M') \end{array}$$

。

前記の命題6.2の証明の方法を使って次の事を知る。

命題 6.6　$\eta_0, \eta_1 \in H^1(M, \underline{GL(k,\mathbb{C})}_{\mathcal{F}})$ が $\eta_0 \underset{\mathcal{F}}{\simeq} \eta_1$ を満たすならば、

$$(\lambda'_{\eta_0})^* u = (\lambda'_{\eta_1})^* u \quad \text{for } u \in \mathrm{Im}(\rho_q^{q+1})^* 。$$

この命題と命題2.2より、

系　二つの $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-maps $f_0, f_1 : M \longrightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-homotopic で、$\eta' \in H^1(M', \underline{GL(k,\mathbb{C})}_{\mathcal{F}'})$ とすれば、

$$(\lambda'_{f_0^*\eta'})^* u = (\lambda'_{f_1^*\eta'})^* u \quad \text{for } u \in \mathrm{Im}(\rho_q^{q+1})^* 。$$

注意　η が特に ν の時、$(\lambda'_{\nu\otimes\mathbb{C}})^* \mathrm{Im}(\rho_q^{q+1})^*$ の元は [7] では rigid と呼ばれている。

$\eta \in H^1(M, \underline{GL(k,\mathbb{C})}_{\mathcal{F}})$ に対して、cohomology の中で

$$\mathrm{Chern}^*(\eta) \subset \lambda'^*_{\eta}\, \mathrm{Im}(\rho_q^{q+1})^* \subset \lambda'^*_{\eta}\, H^*(WU(k)_q')$$

は順に、$\cong$, $\underset{\mathcal{F}}{\sim}$, $\underset{\mathcal{F}}{\simeq}$ に対する不変量となっている。

V が real $\mathcal{F}$-vector bundle の時には、V の複素化である $V\otimes\mathbb{C}$ に対して $(\lambda'_{\eta\otimes\mathbb{C}})^*$ が定義できる。この時、次の事が解る。

命題 6.7　D^1, D^0 を V 上の connections から定義された $V\otimes\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{F}$-flat connection, metric connection とすれば、$\det(I - \frac{1}{2\pi i}A) = 1 + \sum_{i=1}^{k} t^i c_i(A)$ for $A \in gl(k,\mathbb{C})$ で定義される c_i を使って、$\lambda_{\eta\otimes\mathbb{C}}$ は次の様に表わされる。

$$\lambda'_{\eta\otimes\mathbb{C}} u_i^- = (-1)^{\frac{i+1}{2}} \lambda(D^1)\, \tilde{c}_i^R \quad \text{for } i = \text{odd, otherwise} = 0,$$
$$\lambda'_{\eta\otimes\mathbb{C}} u_i^+ = (-1)^{\frac{i}{2}} \lambda(D^1)\, \tilde{c}_i^R \quad \text{for } i = \text{even, otherwise} = 0,$$
$$\lambda'_{\eta\otimes\mathbb{C}} h_i = (-1)^{\frac{i+1}{2}} \lambda(D^0, D^1)\, \tilde{c}_i^R \quad \text{for } i = \text{odd, otherwise} = 0.$$

即ち、real $\mathfrak{F}$-vector bundle の時には、次の cochain complex を考えれば十分である。

<u>定義</u>　l を k 以下の最大の奇数とし、

$$WO(k)_q := E_{\mathbb{C}}(h_1, h_3, \cdots, h_l) \otimes \mathbb{C}_q[u_1^-, u_2^+, \cdots, u_l^-, (u_{l+1}^+)]$$

で differential は $d_W h_j = u_j^-$, $d_W u_i^+ = d_W u_i^- = 0$ で決まるものとする。

この complex は $k = q$ の時、[Z] の WO_q の複素化である $WO_q \otimes \mathbb{C}$ と一致する。

<u>例</u> 6.1　$WO(k)_q$ で $q \geq 1$ かつ $k \geq 1$ の時を考えると、

$$d_W(h_1 (u_1^-)^q) = (u_1^-)^{q+1} = 0 \quad \text{in } WO(k)_q.$$

よって $\eta \in H^1(M, \underline{GL(k, \mathbb{R})_{\mathfrak{F}}})$ に対して $\lambda'^*_{\eta\otimes\mathbb{C}}[h_1(u_1^-)^q]$ は $H^{2q+1}(M)$ の元である。特に $\mathfrak{F}$ が余次元 1 の foliation であれば $\lambda'^*_{\nu\otimes\mathbb{C}}[h_1 u_1^-]$ は Godbillon-Vey の不変量である。

また例 3.3 における $\mathfrak{F}$-vector bundle T/E に対応する $H^1(M, \underline{GL(p, \mathbb{R})_{\mathfrak{F}}})$ の元を ν_E とすれば、$F = C(E)$ の時には、$\lambda'^*_{\nu_E\otimes\mathbb{C}}[h_1(u_1^-)^q]$ は [9] で generalized Godbillon-Vey invariant と呼ばれているものと一致する。

例 6.2 M上の vector bundle V が flat connection D を持つ時、V には $\mathcal{F}$- vector bundle の構造が決まる。更に命題4.3より この構造と flat connection とは一対一に対応する。この $\mathcal{F}$- vector bundle の構造に対応するような $H^1(M, \underline{GL(k,\mathbb{C})}_{\mathcal{F}})$ の元を η_D とおく。

⊘ $\mathcal{F}$ においては $q=0$ であるから

$$WU(k)_0' = E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \cdots, h_k) \quad , \; d_W h_i = 0 \quad .$$

よって $H^*(WU(k)_0') \cong WU(k)_0'$ 。

前記の命題 6.6 により、

⊘ D と D' が V 上の flat connection で $\eta_D \underset{\mathcal{F}}{\cong} \eta_{D'}$ の時、

$$\lambda_{\eta_D}'^*[h_i] = \lambda_{\eta_{D'}}'^*[h_i] \quad \text{for } i \geqq 2 \quad .$$

§7. $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$-vector bundles の exotic 特性類

M に複素余次元 $q/2$ の complex analytic foliation $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ が与えられているとする。V は $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$-vector bundle で $\eta \in H^1(M, \underline{GL(k,\mathbb{C})}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}})$ に associate しているとする。この時、V は $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ の underlying な smooth foliation $\mathcal{F}$ (余次元は q) に関する $\mathcal{F}$- vector bundle と見なせる。

§6 の homomorphism $\lambda_\eta'^* : H^*(WU(k)_q') \longrightarrow H^*(M)$ が定義できる。V が更に $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$-vector bundle であることにより、$\mathrm{Im}(\lambda_\eta'^*)$ のあるものが 0 になる事を示す。

先ず次のような cochain complex を定義する。

定義　$\mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k]$ を§6と同じ polynomial ring とし、$I_{q,q}$ を c_i のみの monomials で $\dim > q$ のものと、$\bar{c}_i$ のみの monomials で $\dim > q$ のもので生成される ideal とする。この時、graded algebra

$$WU(k)_{q/2} := E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \dots, h_k) \otimes \mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k] / I_{q,q}$$

に differential を $d_W c_i = d_W \bar{c}_i = 0$, $d_W h_i = (c_i - \bar{c}_i)/2\sqrt{-1}$ で定義して cochain complex とする。

更に homomorphism $\lambda_\eta : WU(k)_{q/2} \longrightarrow A^*(M)$ を、λ'_η の定義の D' を $\mathcal{F}_c$-flat connection におきかえて定義する。これは cochain homomorphism となり、命題6.2と同様の証明で次の事を得る。

命題 7.1　$\lambda^*_\eta : H^*(WU(k)_{q/2}) \longrightarrow H^*(M)$ は η の $\mathcal{F}_c$-equivalence class のみに depend する。

$\mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k]$ の中で、ideal I_{2q} は $I_{q,q}$ に含まれているから、次の様な canonical projection が存在する。

$$p : WU(k)'_q \longrightarrow WU(k)_{q/2} 。$$

定理 7.2

$$\begin{tikzcd} H^*(WU(k)'_q) \arrow[r, "\lambda'^*_\eta"] \arrow[d, "p^*"'] & H^*(M) \\ H^*(WU(k)_{q/2}) \arrow[ur, "\lambda^*_\eta"'] & \end{tikzcd}$$

左の diagram は可換。

$\mathcal{F}_c$-bundle を $\mathcal{F}$-bundle とみなす写像から induce される $(\mathcal{F}^{c}_{\mathcal{F}})_* : H^1(M, \underline{GL(k,\mathbb{C})}_{\mathcal{F}_c}) \longrightarrow H^1(M, \underline{GL(k,\mathbb{C})}_{\mathcal{F}})$ につき、

系. $\eta \in \mathrm{Im}((\mathcal{F}^{c}_{\mathcal{F}})_*)$ とすれば、

$$\lambda_\eta^* u = 0 \quad \text{for} \quad u \in \mathrm{Ker}(p^*)\text{。}$$

（$\eta \in \mathrm{Im}((\mathcal{F}^{c}_{\mathcal{F}})_*)$ とは η がある $\mathcal{F}_c$-cocycle と $\mathcal{F}$-equivalent である事である。）

特に、$\mathcal{F}$ を余次元 q の almost complex foliation、$\mathcal{F}$ の normal bundle は $\nu \in H^1(M, \underline{GL(q/2,\mathbb{C})}_{\mathcal{F}})$ と associate する事とする。この時、M の cohomology の subring $\lambda_\nu^*(\mathrm{Ker}\,p^*)$ の元は $\mathcal{F}$ が complex analytic foliation であるための obstructions となっている。なお、

$$\lambda_\nu^*(\mathrm{Ker}\,p^*) \supset \bigcup_{2q \geq r > q} \mathrm{Chern}^r(T/F)$$

である。

特に、$WU(q)_q$ は [3] の WU_q と同じものである。

参考文献

[1] N. Abe, On cohomology and characteristic classes of a foliated manifold, 修士論文 (1975)

[2] R. Bott, Lecture Notes in Math., 279, Springer (1972).

[3] R. Bott and A. Haefliger, On characteristic classes of Γ-foliations, Bull. of A.M.S. 78 (1972) 1039-1044.

[4] S.S. Chern, Complex manifolds without potential theory, van Nostrand (1967).

[5] L. Conlon, Transversally parallelizable foliations of codimension two, Trans. of A.M.S. 194 (1974) 79-102.

[6] C. Godbillon et J. Vey, Un invariant des feuilletages de codimension 1, C. R. Acad. Sci. 273 (1971) 92.

[7] J.L. Heitsch, Deformations of secondary characteristic classes, Topology 12 (1973) 381-388.

[8] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer (1966).

[9] H. Kitahara and S. Yorozu, A generalized Godbillon-Vey invariand for a subbundle which is not integrable.

[10] J. Pasternack, Topological obstuctions to integrability and the Riemannian geometry of smooth foliations, Thesis, Princeton Univ. (1970).

[11] B.L. Reinhart, Foliated manifolds with bundle-like metrics, Ann. of Math., 69 (1959) 119-132.

[12] ——————, Harmonic integrals on foliated manifolds, Amer. J. Math. 81 (1959) 529-536.