数理解析研究所講究録
254巻 1975年 153-162

Diffeomorphism と Topological entropy

中央大 理工　　松江 広文

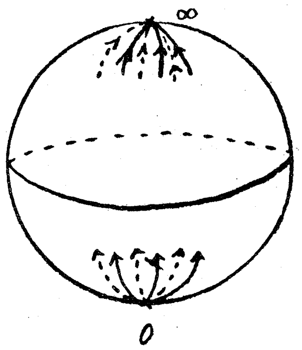
§1 で. Axiom A を満たす diffeomorphism の例をあげ次に §2 で. topological entropy の定義といくつかの定理を述べる. 最後に §3 で. §1 であげた例の topological entropy の計算をする。

§1. Axiom A を満たす diffeomorphism の例

<u>Morse-Smale diffeo.</u>

例 1. S^2 上の例.

S^2 を Riemann sphere とみなし. $f(z) = 2z$ により. S^2 上の diffeo. を定義する。



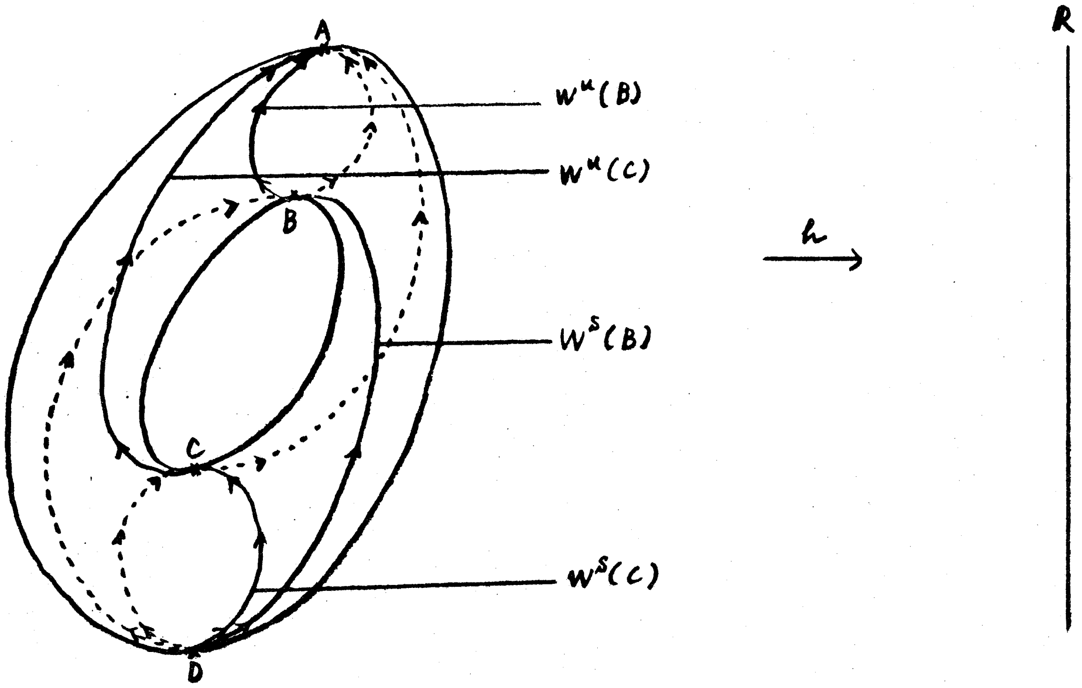
0: source, $W^u(0) = S^2 - \{\infty\}$

$W^s(0) = \{0\}$

∞: sink, $W^u(\infty) = \{\infty\}$

$W^s(\infty) = S^2 - \{0\}$

例2．T^2上の例．



height function h に対し．vector field $X = \text{grad}\, h$ を考え．Xによるflowのtime-one mapをとる。

以上の例は、gradient-like diffeomorphism。次に、non-gradient-likeな例を上げる。

例3．

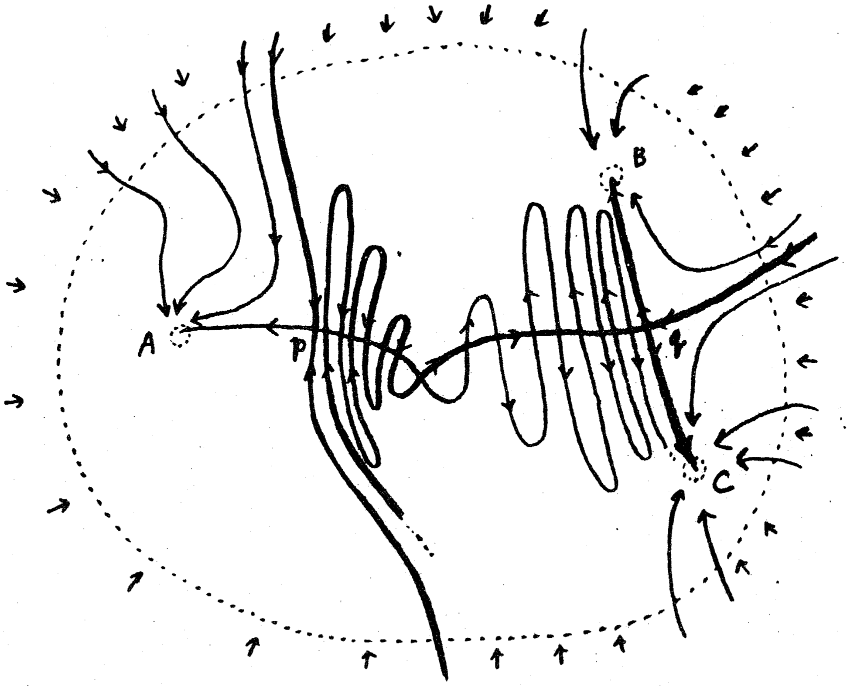
$$f : \text{grad-like} \Longleftrightarrow (p \leq q \Rightarrow \dim W^s(p) \geqq \dim W^s(q))$$

ただし、

p, q periodic pt.
$p \leq q \overset{def}{\Longleftrightarrow} W^u(q) \cap W^s(p) \neq \phi$

ということが知られている。

下図はS^2上の diffeo. である。ここでは $p \geq q$ にもかかわらず. $\dim W^s(p) = \dim W^s(q)$ となっていて，しかも non-gradient-like.

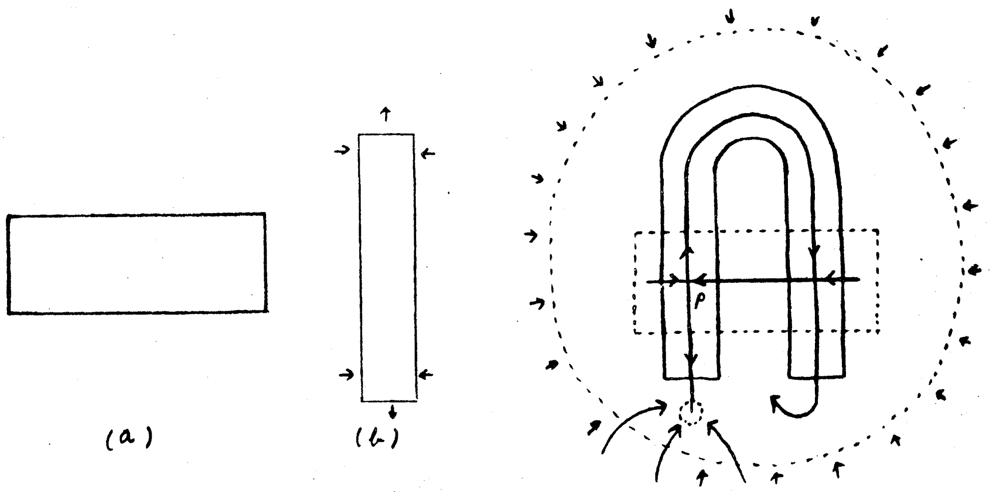


なお. $W^u(p) \pitchfork W^s(q) \ni x$ なる x を. heteroclinic pt. という。

以上の例（Morse-Smale）の top. ent. $= 0$ であることを§2で述べる。

<u>Horseshoe diffeo.</u>（S^2上の diffeo.）

次の図で horseshoe diffeo. の作り方を表わす。詳しくは倉田氏を参照されたい。この diffeo. においては. homoclinic pt. があらわれる。



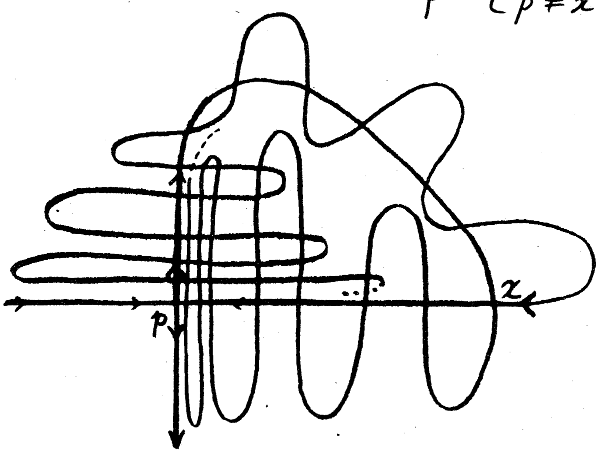
(a) (b) (c) horseshoe

<u>Def.</u> p を $f \in \mathrm{Diff}(M)$ の hyperbolic periodic pt. とする.
$x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ を homoclinic pt. と云う.
$x \in W^s(p) \pitchfork W^u(p)$ のとき, x は <u>transverse</u> homoclinic pt. という。

<u>Remark</u>. x : homoclinic $\Longleftrightarrow$ ある $m \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\lim_{n \to +\infty} f^{mn}(x) = \lim_{n \to -\infty} f^{mn}(x) = p \quad (p \neq x)$$

上図より, 点 p における stable mfd. と, unstable mfd. は右図の様になる。従って, homoclinic pt. x があらわれる。horseshoe diffeo. の top. ent. $= \log 2$ であ



ることを §3 で示す.

<u>Anosov diffeo. の例.</u>

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$. Aの固有値を λ_1, λ_2 とし.

$|\lambda_i|\neq 1$ $(i=1,2)$ とする. $(0<|\lambda_2|<1<|\lambda_1|)$

$$\begin{array}{cccc} f: & T^2 & \longrightarrow & T^2 \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x,y) & \longmapsto & (ax+by,\ cx+dy) \end{array}$$

により T^2 上の diffeo. を定義する. f は Anosov diffeo. で, f の top. ent. $=\log|\lambda_1|$ (§3 で示す).

§2. Topological entropy の定義と定理.

$$\begin{cases} X: \text{compact top. space} \\ {}^\forall \text{open cover } \mathcal{A} \text{ of } X,\ N(\mathcal{A}): \text{min subcover の sets の個数} \\ {}^\forall \text{covers } \mathcal{A},\mathcal{B},\ \mathcal{A}\vee\mathcal{B}=\{A\cap B \mid A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B}\} \\ \varphi: X\to X \quad \text{cont. map} \end{cases}$$

<u>Def.</u> $h(\varphi,\mathcal{A})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N(\mathcal{A}\vee\varphi^{-1}\mathcal{A}\vee\cdots\vee\varphi^{-n+1}\mathcal{A})$

を. cover $\mathcal{A}$ に関する φ の entropy という.

<u>Remark.</u> $h(\varphi,\mathcal{A})$ は極限値を持ち,

$$0\leq h(\varphi,\mathcal{A})\leq \log N(\mathcal{A})<\infty$$

であることが示される.

<u>Def.</u> $\mathrm{ent}(\varphi)\overset{\mathrm{def}}{=}\sup_{\mathcal{A}} h(\varphi,\mathcal{A})$ を φ の topological entropy

という。

<u>Remark</u>. $\left[\begin{array}{ll} \varphi : X \longrightarrow X & \text{cont. map} \\ \psi : X \rightarrow X' & \text{homeo.} \\ \psi\varphi\psi^{-1} : X' \longrightarrow X' & \end{array}\right]$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{ent}(\psi\varphi\psi^{-1}) = \mathrm{ent}(\varphi)$, i.e. top. conjugate で topological entropy は不変.

以上は [4] による。

<u>Theorem</u>. (Bowen [3])

$\left[\begin{array}{ll} M : \text{compact metric sp.} & \\ f : M \longrightarrow M & \text{cont. map} \\ \Omega : \text{nonwandering set of } f & \end{array}\right]$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}(f|_{\Omega})$.

<u>Cor</u>. $\Omega(f)$: finite $\Longrightarrow$ $\mathrm{ent}(f) = 0$.

これより. Morse-Smale diffeo. の topological entropy $= 0$ である。

<u>Notation</u>. (X, d) compact metric sp., $f : X \longrightarrow X$ homeo. $\delta > 0$ と $x \in X$ に対し.

$$W^s(x, \delta) = \{ y \in X ; d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta, \ \forall n \geq 0 \},$$

$$W^u(x, \delta) = \{ y \in X ; d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta, \ \forall n \leq 0 \}.$$

<u>Def</u>. f が canonical coordinates を持つとは,

$\forall \delta > 0$ に対し. $\exists \varepsilon(\delta) > 0$ s.t. $d(x, y) \leq \varepsilon(\delta) \Longrightarrow W^s(x, \delta) \cap$

$W^u(y,\delta) \neq \phi$.

f が hyperbolic can. coord. を持つとは，更に次の条件を満たすこととする：$\exists \delta^* > 0$，$0 < \exists \lambda < 1$，$\exists c \geq 1$；

$x \in X$，$y \in W^s(x,\delta^*) \Rightarrow d(f^n(x), f^n(y)) \leq c\lambda^n d(x,y)$，$\forall n \geq 0$，

$x \in X$，$y \in W^u(x,\delta^*) \Rightarrow d(f^n(x), f^n(y)) \leq c\lambda^n d(x,y)$，$\forall n \leq 0$.

<u>Remark</u>. can. coord. については metric のとり方によらないが，hyperbolic can. coord. については metric のとり方に依存する。

<u>Theorem</u>. (Bowen [3])

$$\begin{bmatrix} M : \text{compact Riemannian mfd.} \\ f \in \mathrm{Diff}\, M \text{ が Axiom A を満たす} \\ \Omega_i : \text{basic set} \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow f|_{\Omega_i}$ はある metric に関し，hyp. can. coord. を持つ。

<u>Theorem</u>. (Bowen [3])

$$\begin{bmatrix} X : \text{compact metric sp.} \\ f : X \to X \text{ homeo. で，hyp. can. coord. を持つ.} \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow \mathrm{ent}(f) = \overline{\lim}\, \frac{1}{n} \log N_n(f)$，

ただし，$N_n(f)$: f^n の fixed pts. の個数.

§3. Shift automorphism と topological entropy の計算.

$S_n = \{0, 1, \ldots, n-1\} \ni a, b$ に対し

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 & a = b \\ 1 & a \neq b \end{cases}$$ とおく．

$X_{S_n} = \{(\cdots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots) \,;\, a_i \in S_n\}$,

$x \in X_{S_n}$ に対し．第 i 座標を $(x)_i$ と書く．$(x)_i \in S_n$.

$x, y \in X_{S_n}$ に対し，$d(x,y) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} d((x)_i, (y)_i)$ による metric を入れると，X_{S_n} は compact metric sp. となる．

$\alpha : X_{S_n} \longrightarrow X_{S_n}$ を，$a = (\cdots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots)$ $\in X_{S_n}$ に対し，$(\alpha(a))_i = a_{i+1}$ により定義する。α は onto homeo.（shift automorphism という）.

例．$(n=2)$

$$\begin{array}{l} \ \ i-2 \ \ i-1 \ \ \ i \ \ \ \ i+1 \\ a = (\cdots\cdots, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots\cdots) \\ \downarrow \alpha \\ \alpha(a) = (\cdots, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots \quad) \\ \ \ i-3 \ \ i-2 \ \ i-1 \ \ \ i \end{array}$$

$\alpha : X_{S_n} \longrightarrow X_{S_n}$ に対し．α^m の fixed pt. は．

$$(\cdots, \underbrace{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}}, \underbrace{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}}, \underbrace{a_{i_1}, \cdots, a_{i_m}}, \cdots)$$

である．よって，α^m の fixed pts. の個数は n^m。従って，

$$\begin{aligned} \mathrm{ent}(\alpha) &= \overline{\lim_m} \frac{1}{m} \log N_m(\alpha) \\ &= \overline{\lim_m} \frac{1}{m} \log n^m = \log n . \end{aligned}$$

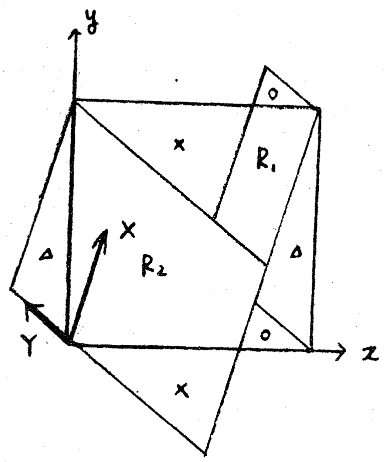
<u>horseshoe diffeo</u>．$f : S^2 \longrightarrow S^2$ の nonwandering set を Λ とする．Λ は Cantor set で，$f|\Lambda$ は shift aut. $\alpha : X_{S_2} \longrightarrow$

X_{Σ_2} に top. conjugate，従って．$\mathrm{ent}(f) = \log 2$．

<u>toral diffeo.（Anosov）の場合</u>．

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ の固有値を λ_1, λ_2（$0 < |\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$）とし，§1 の様に $f_A : T^2 \longrightarrow T^2$ を考える。$f_A{}^m$ の fixed pts. の個数 $N_m(f_A)$ は Lefschetz trace formula より．$N_m(f_A) = (1-\lambda_1{}^m)(1-\lambda_2{}^m)$．

$$\begin{aligned} \mathrm{ent}(f_A) &= \overline{\lim} \frac{1}{m} \log N_m(f_A) \\ &= \overline{\lim} \frac{1}{m} \log |\lambda_1|^m \left(\frac{1}{|\lambda_1|^m} - \frac{\lambda_1{}^m}{|\lambda_1|^m} \right)(1-\lambda_2{}^m) \\ &= \log |\lambda_1|. \end{aligned}$$



λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトルを X と Y とし，二つの平行四辺形 R_1 と R_2 に分割する。上の計算は，この Markov partition を用いて shift auto. と対応させても，又，定義からも直接導ける。

文 献

[1] Smale, S. ; Differentiable Dynamical Systems. Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), p. 747-817.

[2] Nitecki, Z. ; Differentiable Dynamics. (MIT)

[3] Bowen, R. ; Topological Entropy and Axiom A. Proc. Sympos. Pure Math. 14(1970), p. 23-41.

[4] Adler, R. L., A. G. Konheim and M. H. McAndrew ; Topological Entropy. Trans. Amer. Math. Soc. 114(1965). p. 309-319.

[5] Smale, S. ; Diffeomorphism with many periodic points. Differential and Combinatorial Topology. (Princeton) p. 63-80.