数理解析研究所講究録
254巻 1975年 89-91

Morse − Smale Systems I

横浜市立大学　文理　一楽重雄

1. 安定多様体，不安定多様体

$f : M^n \longrightarrow M^n$ を微分同相写像，$p \in M^n$ を固定点，すなわち，$f(p) = p$ が成りたつとする。このとき，f の p での微分，$Df(p) : T_pM \longrightarrow T_pM$ が，絶対値1の固有値を持たないとき，p を双曲的と呼ぶ。p が双曲的固定点なら，T_pM は絶対値1以下の固有値に対応する固有空間 E^s と絶対値1以上の固有値に対応する固有空間 E^u との直和に分解する。すなわち，

$$T_pM = E^u \oplus E^s$$

$$Df(p)(E^u) = E^u, \quad Df(p)(E^s) = E^s$$

$Df(p) | E^u : E^u \to E^u$ は expansion

$Df(p) | E^s : E^s \to E^s$ は contraction。

f をくり返し施すことによって，p に近づく点全体を考えると，それは ~~R^s と同相 M^n にはめ込まれた~~ M^n の部分多様体（但し，正規ではない場合が多い。すなわち，多様体としての位相と部分集合としての位相は，一般には一致しない。）にな

り，pでの接空間はE^sである。これをpの安定多様体と言い，$W^s(p)$と書く。また，多様体としては，$W^s(p)$はR^sに微分同相である。まとめると，

$W^s(p) = \{ q \in M^n \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(q), p) = 0 \}$ は，1対1に，はめこまれたR^s の像であり，

$T_p W^s(p) = E^s$.

まったく，双対的に，不安定多様体が定義される。

$$W^u(p) = \{ q \in M^n \mid \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(q), p) = 0 \}$$

$$T_p W^u(p) = E^u.$$

次に，pが周期点のときは，その周期をrとして，f^rの固定点と見做せば，同様の議論が成りたつ。例えば，

$$W^u(p) = \{ q \in M^n \mid \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) = 0 \}$$

とすれば良い。

2. Morse − Smale diffeomorphism

$f: M^n \longrightarrow M^n$ 微分同相が，次の条件を満たすとき，Morse − Smale diffeo. と呼ぶ。

(1) $\Omega(f) = \{f$の非遊走点$\}$が有限。従って，$\Omega(f) = Per(f)$.

(2) すべての $p \in Per(f)$ は双曲的。

(3) $p, q \in Per(f)$に対して，$W^s(p)$ と $W^u(q)$ は横断的に交わる。すなわち，$^\forall x \in W^s(p) \cap W^u(q)$ に対して，$T_x W^s(p)$ と

$T_xW^u(p)$ を合わせたものは，T_xM^n を張る。

Morse−Smale diffeo. は，最も扱い易い diffeo. であって，色々，調子の良い性質を満たす。Anosov diffeo, Axiom A diffeo. と発展してゆくなかで，最も単純，基本的なものである。

3. Morse−Smale 不等式及びホモロジー群

ベクトル場の0点に関する古典的な Poincaré−Hopf の定理，あるいは，Morse 関数とホモロジー群の関係と同様に，周期点の数とホモロジー群は，次の Morse−Smale 不等式で関係づけられる。 $f:M\to M$，Morse−Smale とすると，次が成りたつ。(Smale)

$$M_0 \geqq B_0$$

$$M_1 - M_0 \geqq B_1 - B_0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i M_i = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i B_i$$

ここで，B_i は M の i 番目ベッチ数。M_j は $\dim W^u(p)=j$ なる周期点 p の個数である。 証明は，$M=\bigcup_{p\in Per(f)} W^u(p)$ が，(open) cell 分割を与えることを用いる。

また，$f(W^u(p)) = W^u(p)$ であることから，f の導びくホモロジー群の準同型，$f_*: H_*(M;\mathbb{R}) \longrightarrow H_*(M;\mathbb{R})$ の固有値は1の巾根であることが分かる。(Shub) 以上