数理解析研究所講究録
254巻 1975年 24-40

電気回路の力学系

名大 理 大学院 伊藤敏和

§1 まえがき

我々はここで話題にするのは，S.Smaleの論文[4]の紹介です。そして，我々はS.Smaleがなぜ電気回路を数学的に形式化しようとしたのか，さらにその結果としてどういうことに目を向ければよいのか，ということを具体的な例を通して述べる。

もしこのような方面に興味をもっている方は，ぜひ[4]を読まれることをおすすめします。特にExample 6 及び Problem 1 を。

S.Smale の idea を図式化してみる.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{電気回路の状態}} \arrow[d, "① \text{ S.Smaleはうまく形式化している.}"] & (\text{Maxwell 方程式}) \arrow[d] \\
\boxed{\text{manifold}, \Sigma} & (\Sigma \text{ 上の vector field}, X)
\end{tikzcd}$$

② Σ_1 上に自然な indefinite metric I を入れ，X を Σ 上に自然に作られる closed 1-form ω の I に関する dual (i.e. $I(X, \ )=\omega$) とみた。

(注) ω の構成に関する情報は [1] の中にある。

S. Smale は上記の具体的な例をもとにして，次のような問題をだしている。

(問題) M を smooth compact manifold とせよ。I を M 上の indefinite metric とし，f を M 上の smooth 函数としたとき，df の I に対する dual vector field grad f の性質をしらべよ。又 ω を M 上の closed 1-form にした時に ω の I に対する dual vector field grad ω の性質をしらべよ。

(注) g を M 上の Riemannian metric とした時の考察は [6] [7] にあるから，それと類似のことがいえるか考察せよ。

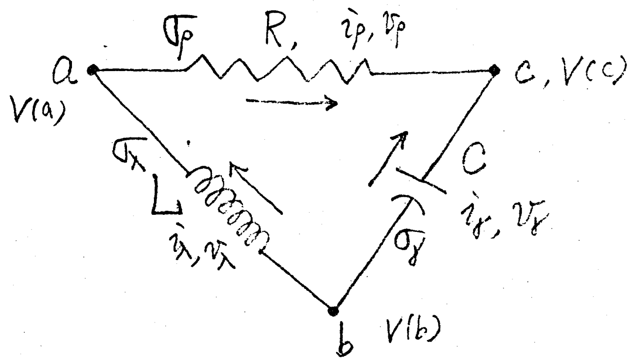
もうし遅れましたが，松本隆さんが S. Smale の形式化の拡張と [4] の中の問題の一部分を [2] であつかっていますので松本さんの講演を参考にしてください。

§ 2. S. Smale の formulation.

我々は具体例でもってS.Smaleのformulationをみて，そして，松本さんのformulationへの萌芽をもみよう。

例1

右図のような回路を考えよ。



R; resistor

L; coil

C; condencer.

電流を i，電位差を v であらわす。

まづ，Kirchhoff laws と Ohm law を記述する。

KCL; $\quad i_\rho = i_\lambda = -i_\gamma$

KVL; $\quad v_\rho + v_\lambda + v_\gamma = 0$

Ohm law; $\quad v_\rho = f(i_\rho)$

(我々は non-linear resistor を考える.)

次に Maxwell equation (運動方程式)をかく。

$$(A)\begin{cases} L(i_\lambda)\cdot\dfrac{di_\lambda}{dt} = v_\lambda \\ C(v_\gamma)\cdot\dfrac{dv_\gamma}{dt} = i_\gamma \end{cases}$$

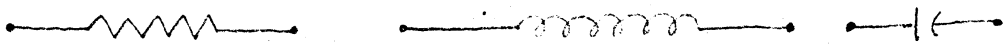
ここで $L(i_\lambda)$ は inductance, $C(v_\gamma)$ は capacitance である。

この方程式(A)を上記の関係式をもちいて書きなおすと,

$$\begin{cases} L(i_\lambda)\cdot\dfrac{di_\lambda}{dt} = v_\gamma - f(i_\lambda) \\ C(v_\gamma)\cdot\dfrac{dv_\gamma}{dt} = -i_\lambda \end{cases}$$

が得られる。

以上がこれまでよく知られている事実である。S.Smale はこのよくしられた事実を次のようにみた。即ち，



回路の各 branch は電流と電位差とによって状態が記述されるから，各 branch に対して (i, v) を変数にする空間を対応させた。例えば  i_ρ, v_ρ に対して $(i_\rho, v_\rho) \in \mathbb{R}^2$

例1の回路に対して，空間 $\mathcal{S}$ を対応させた。

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}\times\mathcal{L}\times\mathcal{C}\times\mathcal{R}'\times\mathcal{L}'\times\mathcal{C}' = \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$$

$$\ni (i_\rho, i_\lambda, i_\gamma, v_\rho, v_\lambda, v_\gamma)$$

そこで Kirchhoff の電流法則(KCL)は各 node において電流の代数的総和は0，ということである。

このことは 1-cycle のことばをもちいて，次のようにいい変えれる。

i.e. $C_1 \ni \sigma = i_\rho\sigma_\rho + i_\lambda\cdot\sigma_\lambda + i_\gamma\cdot\sigma_\gamma$

$\partial ; C_1 \longrightarrow C_0$ boundary operator

を具体的に書く。

$$\begin{aligned}\partial\sigma &= i_\rho(c-a) + i_\lambda(a-b) + i_\gamma(c-b)\\ &= (i_\lambda - i_\rho)a - (i_\lambda + i_\gamma)b + (i_\rho + i_\gamma)c\end{aligned}$$

だから KCL $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,\partial \ni \sigma$

次にKVLは $v_\rho = -(V(c)-V(a))$, $v_\lambda = -(V(a)-V(b))$
$v_\gamma = -(V(c)-V(b))$ とかけていることに着目すれば,
1-cocycle のことばでいいかえることができる。これは
電流とはdualな関係になっているとみる。

それは
$$\begin{aligned}\sigma' &= v_\rho \cdot \sigma_\rho' + v_\lambda \cdot \sigma_\lambda' + v_\gamma \sigma_\gamma' \\ &= -(V(c)-V(a))\sigma_\rho' - (V(a)-V(b))\sigma_\lambda' - (V(c)-V(b))\sigma_\gamma' \\ &= -\partial^*(V(a)a' + V(b)b' + V(c)c')\end{aligned}$$
と書かれている。 ここで $\sigma_\rho', \sigma_\lambda', \sigma_\gamma'$ は $\sigma_\rho, \sigma_\lambda, \sigma_\gamma$ の
dual, a', b', c' も a, b, c のdual, $V(a), V(b), V(c)$
は各node a, b, c における電位を表わす。

$\partial^* ; C^0 \longrightarrow C^1$ boundary operator

よって KVL $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,\partial^* \ni \sigma'$

我々は $K = \mathrm{Ker}\,\partial \times \mathrm{Im}\,\partial^* \subset \mathcal{S} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ を考
えると,電気回路の状態のKCL, KVLをみたした空間が得られ
たことになる。さらにOhm lawをみたしたものを考える
には $K \cap \{v_\rho = f(i_\rho)\} = \Sigma \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ を考え
ればよい。このことをS.Smaleは次のように考えた。

$\Lambda_\rho \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}' = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ closed 1-dim. submanifold

$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}'$ canonical projection の
Kへの制限を π' とすると,

(仮定) $\pi' ; K \longrightarrow \mathcal{R}\times\mathcal{R}'$ が Λ_p に R.Thom の意味で T-regular

なる仮定のもとに $(\pi')^{-1}(\Lambda_p) = \Sigma$ とおけば Σ は submanifold になる。

このΣが回路の状態に対応する manifold である。

[注意]

(1) S.Smale が Λ_p を考えたのは current controlled と voltage controlled とを一度に考えたかったからであろう。

(2) 松本さんの形式化 は S.Smale よりも複雑なものを考えようとするのであるから Λ_p にかわりうるものを作ること，それから ∂, ∂^* を matrix で表わし，それをもちいる（これは R.Brayton & J.Moser [1] の中であつかわれている）の2つから成り立っている。

以上で§1の図式の①ができたので以下では②を記述する。そのためにΣをもう一度みなおしてみると，

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}\times\mathcal{C}' & \longrightarrow & \Sigma \subset \mathcal{S} \\
 & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
(i_\lambda, v_\gamma) & \rightsquigarrow & (i_\lambda, i_\lambda, -i_\lambda, f(i_\lambda), v_\gamma - f(i_\lambda), v_\gamma) \\
 & & \downarrow \pi \\
 & & \mathcal{L}\times\mathcal{C}' \ni (i_\lambda, v_\gamma)
\end{array}
$$

即ち $\dim \Sigma = \dim(\mathcal{L} \times \mathcal{C}')$ になっている。そして

$$(A)\begin{cases} L(i_\lambda)\cdot\dfrac{di_\lambda}{dt} = v_\gamma - f(i_\lambda) \\ C(v_\gamma)\cdot\dfrac{dv_\gamma}{dt} = -i_\lambda \end{cases}$$

が Σ 上の vector field X の座標系による成分表示である。

そこで S.Smale は R.Brayton & J.Moser [1] の中で

(A) の右辺を $L(i_\lambda)\cdot\dfrac{di_\lambda}{dt} = \dfrac{\partial P(i_\lambda, v_\gamma)}{\partial i_\lambda}$, $C(v_\gamma)\cdot\dfrac{dv_\gamma}{dt} = \dfrac{\partial P(i_\lambda, v_\gamma)}{\partial v_\gamma}$

とする $P(i_\lambda, v_\gamma)$ の構成の時にもちいられている式に着目して Σ 上に自然な(と思われる) closed 1-form ω と, indefinite metric I を構成する。

$\pi ; \Sigma \longrightarrow \mathcal{L} \times \mathcal{C}'$ canonical projection

$\mathcal{L} \times \mathcal{C}'$ 上の indefinite metric $J = -L(i_\lambda)\, di_\lambda^2 + C(v_\gamma)\, dv_\gamma^2$

(ただし $L(i_\lambda) > 0$, $C(v_\gamma) > 0$ なる smooth function)

を Σ 上に引きもどしたものを $I = \pi^* J$ とおく。明らかにこれは Σ 上の indefinite metric である。次に $\mathcal{R} \times \mathcal{R}'$ 上の 1-form $\eta_1 = v_\rho\, di_\rho$ を Σ 上に引きもどした form を又我々は η_1 とかくと η_1 は Σ 上の closed 1-form を define する。一方 $h' ; \mathcal{J} \xrightarrow[\text{canonical projection}]{} \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \xrightarrow[\text{dual pairing}]{} \mathbb{R}^1$ とし,

$h'|_\Sigma = h$ とおく。(i.e $h(i, v) = i_\gamma v_\gamma$)

そして $\omega = \eta_1 + dh$ とおく。この時, X を上記した Σ 上の vector field とすると, 次の Main theorem が

成立する。

Main theorem

$$I(X,\ )=\omega \quad \text{on } \Sigma$$

Remark

$H^1(\Sigma;\mathbb{R})=0$ なら $dP=\omega$ なる Σ 上の函数 P が存在する。

次に我々は Σ 上で vector field X の orbit を考察するために以下のことを準備しておく。

$W;\Sigma\longrightarrow\mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$W(i,v)=\int_0^{i_\lambda}L(i_\lambda)i_\lambda\,di_\lambda+\int_0^{v_\gamma}C(v_\gamma)v_\gamma\,dv_\gamma$$

$P_R;\Sigma\longrightarrow\mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$P_R(i,v)=i_\rho v_\rho$$

(注) W は energy, P_R は power である。

このとき，次の定理が成立する。

Theorem

Σ 上で $X\cdot W=-P_R$

§ 3. 具体例による (Σ, X) の考察.

例 1

§2における例1でしらべる。

Σ_1 の変数 (i_λ, v_γ) を (x, y) とおく。$L(i_\lambda) \equiv C(v_\gamma) \equiv 1$ とする。このとき, $\omega = f(x)dx + d(-xy)$, $P(x,y) = -xy + \int_0^x f(t)dt$ （P は constant をのぞいて well defined) となり, $\omega = dP$. 又 $I = -dx^2 + dy^2$.

$$X = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - f(x) \\ -x \end{pmatrix}.$$

$$-P_R(x, y) = -xf(x)$$

$$W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

ここで, 次の仮定をする。

（仮定）

$\exists\, c, k > 0$ constant

$\ni$ (a) $xf(x) > c|x|$ for $|x| > k$

(natural assumption)

(b) $f'(0) < 0$

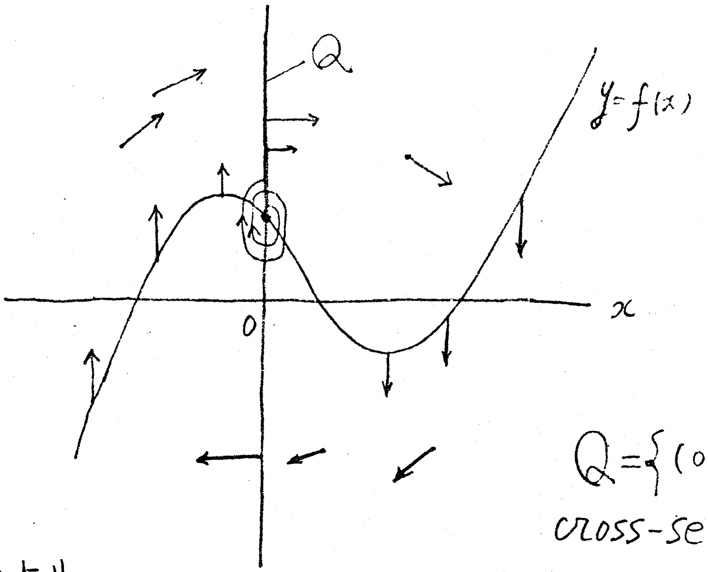
(nonlinearity assumption)

この仮定のもとに次の命題が成立する。

Proposition

上記の仮定のもとに，大きいenergyの点から出るorbitはただ1つのperiodic orbitにまきつき，ただ1つのfixed pointはsourseであり，Xに対して強い意味でのcross-sectionがある。

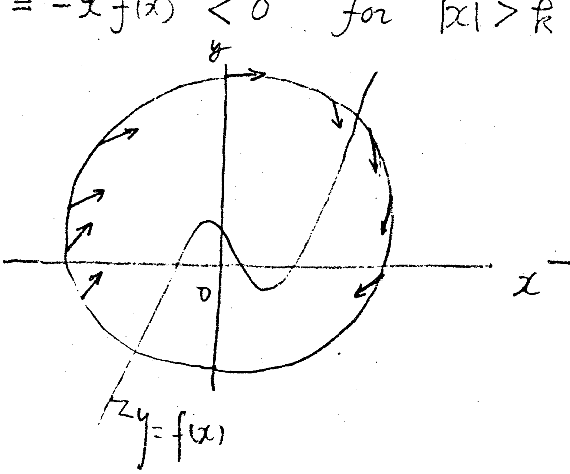
この命題のfeelingは次の図である。

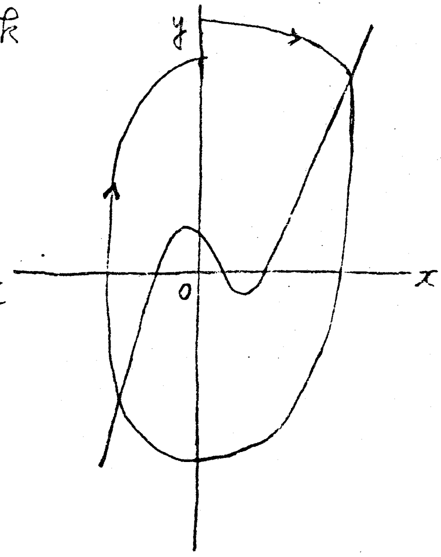


$Q=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geqq f(0)\}$
cross-section to X

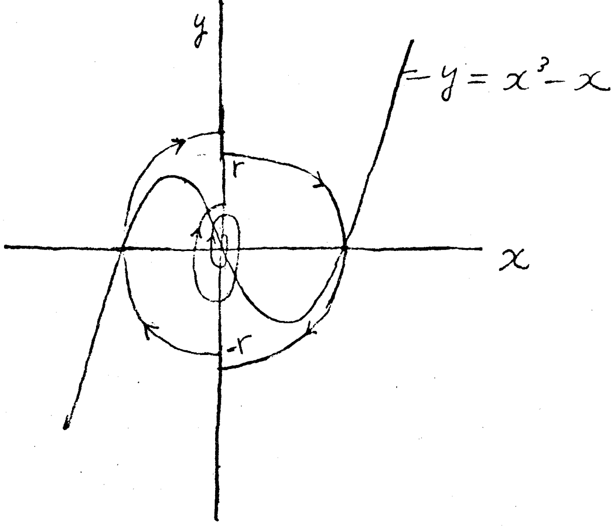
仮定(a)より

$X\cdot W = -xf(x) < 0$ for $|x|>k$

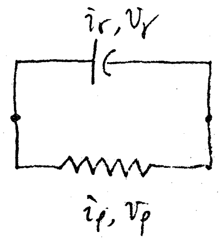


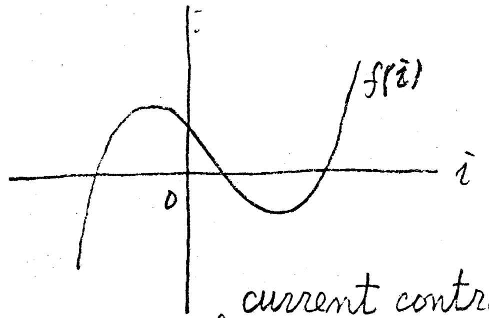


特に $f(x)=x^3-x$ の時を図示する。



例2





current controlled characteristic

上記の回路を考える。

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{R} & \longrightarrow & \Sigma_2 \subset \mathcal{S} = \mathcal{R}\times\mathcal{C}\times\mathcal{R}'\times\mathcal{C}' = \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \\
i_p & \longmapsto & (i_p, -i_p, f(i_p), f(i_p)) \\
 & & \downarrow \pi \\
 & & \mathcal{L}\times\mathcal{C}' \ni (0, f(i_p))
\end{array}$$

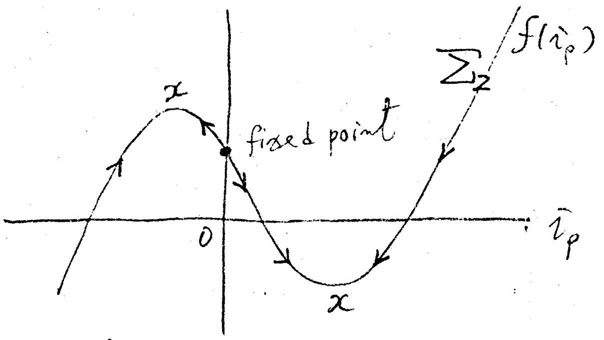
だから π は $f'(i_p)=0$ なる点において singular である。

$$I = c\,(df(i_p))^2, \qquad \omega = -d(i_p f(i_p)) + f(i_p)\,di_p$$

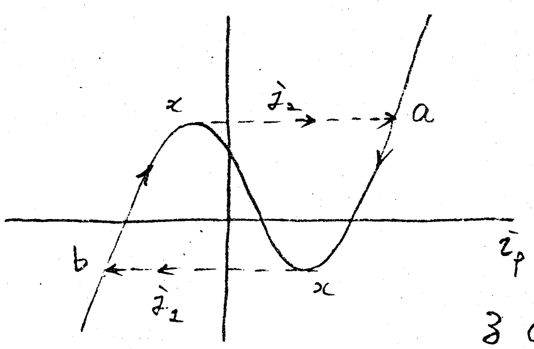
ここで C は coil の capacitanc である。

(A) $X = \dfrac{di_p}{dt} = -\dfrac{i_p}{cf'(i_p)}$

Σ_2上の vector field X の feeling は次のとうり。



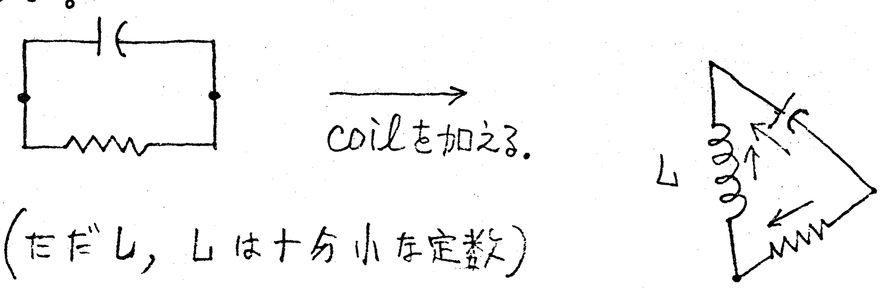
点 x で X はどうなっているかわからない。
そこで，我々は circuit theory の立場から singular point をみると次のようになっている。



点 x において左図のように jump する。

我々は $b\,x\,a\,x\,b$ なる cycle α を考える。

次に例2の回路に inductance L の coil を加えた回路を考える。



(ただし，L は十分小な定数)

すると例1より

$$(B)\begin{cases} L\cdot\dfrac{di_p}{dt}=v_g-f(i_p) \\ C\cdot\dfrac{dv_g}{dt}=-i_p \end{cases}$$ がえられる。

(・C は inductance, 定数)

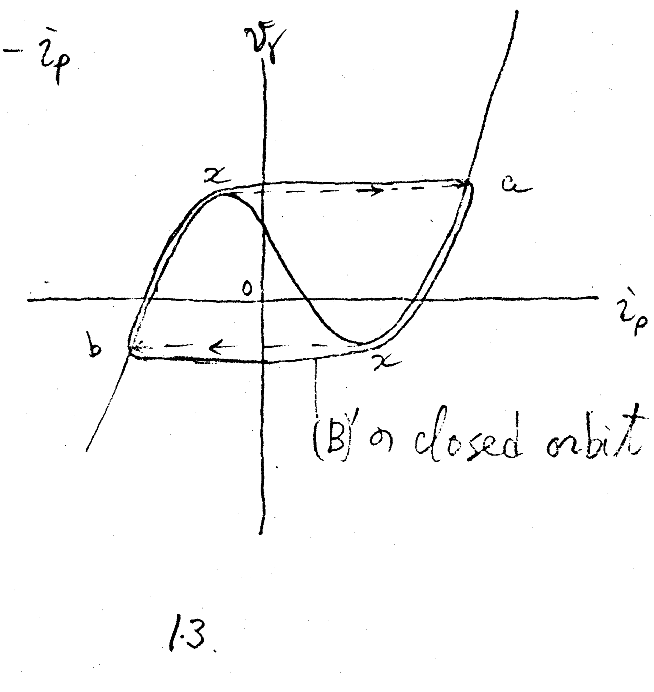
もし，ここで $L=0$ とすれば $C\cdot\dfrac{di_p}{dt}=-\dfrac{i_p}{f'(i_p)}$

がえられ (A)がでる。さらに Σ_2 は Σ_1 に次のようにしてうめこまれる。

$$\Sigma_2 \hookrightarrow \Sigma_1$$
$$i_p \longmapsto (i_p,\ v_g=f(i_p))$$

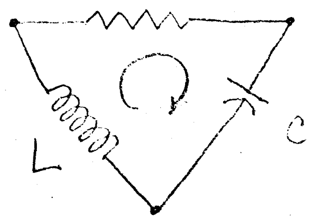
ここで $C=1$ で L が十分小のときの (B) の closed orbit は α の近くにある。このことから，α を $L\to 0$ の時の (B) の closed orbit の極限としてみる。

$$(B)'\begin{cases} \dfrac{di_p}{dt}=\dfrac{v_g-f(i_p)}{L} \\ \dfrac{dv_g}{dt}=-i_p \end{cases}$$

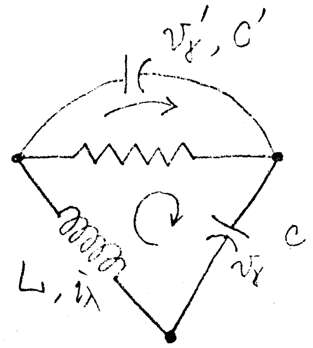


例3.

(イ)



(ロ)



(イ),(ロ) 共に voltage controlled i.e $i_p = f(v_p)$
とする。

(イ)の場合.

$$\mathcal{R}' \times \mathcal{C}' \longrightarrow \Sigma_{(\text{イ})} \subset \mathcal{S}$$
$$(v_p, v_\gamma) \longmapsto (f(v_p), f(v_p), f(v_p), v_p, -v_p - v_\gamma, v_\gamma)$$

$$\begin{cases} L(f(v_p)) \cdot f'(v_p)^2 \cdot \dfrac{dv_p}{dt} = -(v_p + v_\gamma) \\ C(v_\gamma) \cdot \dfrac{dv_\gamma}{dt} = f(v_p) \end{cases}$$

今 $L \equiv C \equiv 1$ のときを考える。

$$(A) \begin{cases} f'(v_p)^2 \cdot \dfrac{dv_p}{dt} = -(v_p + v_\gamma) \\ \dfrac{dv_\gamma}{dt} = f(v_p) \end{cases}$$

energy $W = \frac{1}{2}(f(v_p)^2 + v_\gamma^2)$

power $P_R = v_p \cdot f(v_p)$

(ロ)の場合.

C'は small capacitance をもった condencer.

$$\mathcal{L} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \Sigma_{(\text{ロ})} \subset \mathcal{S}$$
$$(i_\lambda, v_\gamma, v_\gamma') \longmapsto (f(v_\gamma'), i_\lambda, i_\lambda, i_\lambda - f(v_\gamma'), v_\gamma', -v_\gamma - v_\gamma', v_\gamma, v_\gamma')$$

$$\Sigma_{(ロ)} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathcal{L}\times\mathcal{C}'$$

$$(f(v_\gamma'),\ i_\lambda,\ i_\lambda,\ i_\lambda - f(v_\gamma'),\ v_\gamma',\ -v_\gamma - v_\gamma',\ v_\gamma,\ v_\gamma') \longmapsto (i_\lambda,\ v_\gamma,\ v_\gamma')$$

$$(A')\quad \begin{cases} \dfrac{di_\lambda}{dt} = -(v_\gamma + v_\gamma') \\[2mm] \dfrac{dv_\gamma}{dt} = i_\lambda \\[2mm] C'\cdot\dfrac{dv_\gamma'}{dt} = i_\lambda - f(v_\gamma') \end{cases}$$

($L \equiv C \equiv 1$ のときを考えている。)

(C'は定数capacitance)

$C'=0$ のとき (A') から (A) がでる。

(注意) $v_p = v_\gamma'$ である.

$$\Sigma_{(イ)} \hookrightarrow \Sigma_{(ロ)}$$

$$(v_\gamma', v_\gamma) \longmapsto (f(v_\gamma'), v_\gamma, v_\gamma')$$

以下変数を取りなおす。

$(x, y; z) = (v_\gamma', v_\gamma, i_\lambda)$ とおく。

$\Sigma_{(ロ)} = \mathbb{R}^3$ と同一視する。

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{z - f(x)}{C'} \\[2mm] z \\[2mm] -(x+y) \end{pmatrix}$$

energy $W = \frac{1}{2}(C'x^2 + y^2 + z^2)$

power $P_R = x f(x)$

$\Sigma_{(イ)} = S = \{(x, y, f(x)) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^3 = \Sigma_{(ロ)}$

$X|_S$ は(イ)の場合である。

この場合も例1で考察したように $X \cdot W = -P_R$ であって orbit の状態の例1と同様のことがわかる。そして，

$Q = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y > 0,\ z = f(x) \}$ が X に対する cross-section であり，X は Q の diffeomorphism T をひきおこす。 $T ; Q \longrightarrow Q$. このTに関することについて以下 S. Smale のいっていることを原文のままかきますから勉強に役立てて下さい。

I would think that this should be a relevant, interesting and challenging problem, to study the qualitative properties of this transformation T, say for f of the type we have been considering. It might be useful to impose other conditions such as f, say of a generic type. Can one use $X \cdot W = -P_R$ to obtain further information? In the fact that this system is of gradient type for an indefinite metric of some use?

Reference

[1] R. Brayton & J. Moser ; A theory of non-linear networks I, II, Quart. Appl. Math. 22 (1964) 1–33, 81–104.

[2] T. Matsumoto ; On the Dynamics of Electrical Networks, (to apper)

[3] S. Smale ; Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 747–817

[4] S. Smale ; On the mathematical foundations of electric circuit theory, J. Diff. Geometry 7 (1972) 193–210.

[5] M. Hirsch & S. Smale ; Differential equations, Dynamical systems, and Linear algebra, Academic Press.

[6] S. Smale ; On gradient dynamical systems, Ann. of Math. (2) 74 (1961) 199–206

[7] S. Smale ; Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 17 (1963), 97–116.