数理解析研究所講究録
255巻 1975年 102-110

量子化に関するKaupの論文について

東教大 理 物理 小寺武康

D. J. Kaup は "Exact Quantization of the Non-linear Schrödinger Equation" と云う表題の論文を書いているが、先づその論文の概要を述べ その意味するところをしらべて見る。

D. J. Kaup の論文の概要

1次元の nonlinear Schrödinger 方程式

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} - \epsilon^2(\psi^*\psi)\psi$$

は

$$v_{1x} + i\zeta v_1 = \frac{\epsilon}{\hbar} m^{1/2}\psi v_2$$

$$v_{2x} - i\zeta v_2 = -\frac{\epsilon}{\hbar} m^{1/2}\psi^* v_1$$

の散乱問題の逆の問題で解かれる．なお "Scattering data" の時間変化は

$$i v_{1t} = \left(\frac{\hbar}{m}\zeta^2 - \frac{\epsilon^2}{2\hbar}\psi^*\psi\right)v_1 + \epsilon m^{-1/2}\left(i\zeta\psi - \frac{1}{2}\psi_x\right)v_2$$

$$i v_{2t} = -\epsilon m^{-1/2}\left(i\zeta\psi^* + \frac{1}{2}\psi_x^*\right)v_1 - \left(\frac{\hbar}{m}\zeta^2 - \frac{\epsilon^2}{2\hbar}\psi^*\psi\right)v_2$$

から導かれる．"Scattering data"

$$S_+ = \left\{ [\zeta_j, P_j]_{j=1}^{J} \; ; \; P(\zeta) \;\; (\zeta = \text{real}) \right\}$$

は次の様に定義される．すなわち散乱問題の解として

$$\phi \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\zeta x} \quad \text{as} \quad x \to -\infty, \; \text{Img}(\zeta) > 0$$

$$\phi \to \begin{bmatrix} a(\zeta)\, e^{-i\zeta x} \\ b(\zeta)\, e^{i\zeta x} \end{bmatrix} \quad \text{as} \quad x \to +\infty$$

の様な漸近的な振舞をするものを取る時

$$\bar{a}(\zeta)\, a(\zeta) + \bar{b}(\zeta)\, b(\zeta) = 1$$

を満す．但し $\psi(x)$ は compact support の上にあるとし

$$\bar{a}(\zeta) \equiv [a(\zeta^*)]^*, \quad \epsilon\bar{b}(\zeta) \equiv [\epsilon\, b(\zeta^*)]^*$$

この $a(\zeta)$ $b(\zeta)$ を使って

$$\rho(\zeta) = \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} \qquad (\zeta = \mathrm{real})$$

及び $a(\zeta)$ の上半面の zero 点 を ζ_j で表わしその点での $\rho(\zeta)$ の留数を ρ_j で表わす.

"Scattering data" の時間変化は

$$i\hbar(\zeta_j)_t = 0 \quad , \quad i\hbar(\rho_j)_t = -\frac{\hbar^2}{2m}(2\zeta_j)^2\rho_j \quad ,$$

$$i\hbar\, a(\zeta)_t = 0 \qquad (\mathrm{Img}(\zeta) \geq 0) \, ,$$

$$i\hbar\, \rho(\zeta)_t = -\frac{\hbar^2}{2m}(2\zeta)^2\rho(\zeta) \qquad (\zeta = \mathrm{real})$$

と書け. 非常に簡単になる事から Fourier 変換との類似を強調している. $\ln a(\zeta)$ の ζ の逆べき展開

$$\ln a(\zeta) \simeq -i\frac{\epsilon^2 m}{2\zeta\hbar^2}\left\{\mathcal{N} - \frac{1}{2\zeta\hbar}\mathcal{P} + \frac{m}{2\zeta^2\hbar^2}\mathcal{E} + O(\zeta^{-3})\right\}$$

から

$$\mathcal{N} \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\psi\, dx$$

$$\mathcal{P} \equiv -\frac{1}{2}i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}(\psi^*\psi_x - \psi^*_x\psi)\, dx$$

$$\mathcal{E} \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*_x\psi_x - \frac{1}{2}\epsilon^2(\psi^*\psi)^2\right] dx$$

は保存量である事が知れ　そしてそれらは"Scattering data"によって

$$\mathcal{N} = \frac{2\hbar^2}{m\epsilon^2}\left[i\sum_{j=1}^{J}(\zeta_j^* - \zeta_j) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \ln(1+\bar{\rho}\rho)\right]$$

$$\mathcal{P} = \frac{2\hbar^3}{m\epsilon^2}\left[-i\sum_{j=1}^{J}(\zeta_j^{*2} - \zeta_j^2) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \xi \ln(1+\bar{\rho}\rho)\right]$$

$$\mathcal{E} = \frac{4\hbar^4}{m^2\epsilon^2}\left[\frac{i}{3}\sum_{j=1}^{J}(\zeta_j^{*3} - \zeta_j^3) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \xi^2 \ln(1+\bar{\rho}\rho)\right]$$

と表わされる．ここに表われた $\mathcal{E}$ は ψ に共軛な運動量 Π を

$$\Pi \equiv i\hbar\psi^*$$

と定義すると、始めに与へた古典場の nonlinear Schrödinger 方程式の Hamiltonian である事が分る．又 simplicial form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\psi \wedge \delta\Pi \, dx$$

を計算する事により ψ, Π から S_+ への変換は正準変換で共軛な運動量として

$$A_j \equiv \frac{4\hbar^3}{m\epsilon^2}\eta_j$$

$$p_j \equiv -2\hbar\xi_j$$

$$p(\xi) = \frac{\hbar^3}{\pi m \epsilon^2} \ln\left[1 + \bar{\rho}(\xi)\, \rho(\xi)\right] \qquad (\xi = \text{real})$$

及び座標として

$$B_j = \mathrm{Arg}\,(b_j)$$

$$q_j = \frac{\hbar^2}{m\epsilon^2} \ln\,(b_j^* b_j)$$

$$q(\xi) = \mathrm{Arg}\,(b(\xi)) \qquad (\xi = \text{real})$$

と選べる事が分る。但しここで

$$b_j = \rho_j \left(\frac{\partial a}{\partial \xi}\right)_{\xi = \zeta_j}, \quad \zeta_j = \xi_j + i\eta_j \quad (\eta_j > 0),$$

である。

この段階で量子化をするのであるが p_j q_j を除いて非ホロノームな束縛条件がついているため量子化に不適当であるので、束縛条件が自動的に満される様に変数変換を行っておく。すなわち

$$\mathrm{Arg}\,(P_j + iQ_j) = \mathrm{Arg}\,(b_j)$$

$$P_j^2 + Q_j^2 = \frac{8\hbar^3}{m\epsilon^2}\eta_j$$

及び

$$b(\xi) = (P(\xi) + iQ(\xi))\,\tilde{R}\,(P^2(\xi) + Q^2(\xi))$$

但し

$$\tilde{R}(z) \equiv \left[z^{-1} \exp\left(-\frac{m\pi\epsilon^2}{2\hbar^3} z\right) + z^{-1} \right]^{1/2}$$

この変数の組 (P_j, Q_j) $(P(\xi), Q(\xi))$ は (p_j, q_j) と共に束縛のない共軛な運動量，座標の組で，これらを演算子でおきかえる事により直ちに量子化される。

$$\frac{1}{2\hbar}(P_j^2 + Q_j^2) \longrightarrow a_j^+ a_j + \frac{1}{2} \longrightarrow N_j + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\hbar}[P^2(\xi) + Q^2(\xi)] \rightarrow a^+(\xi)\,a(\xi) + \frac{1}{2} \rightarrow N(\xi) + \frac{1}{2}$$

のおきかえにより $\mathcal{N}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{E}$ は

$$\mathcal{N}_{op} = \sum_{j=1}^{J} \left(N_j + \frac{1}{2}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[N(\xi) + \frac{1}{2}\right]$$

$$\mathcal{P}_{op} = \sum_{j=1}^{J} \left(N_j + \frac{1}{2}\right)(p_j)_{op} + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[N(\xi) + \frac{1}{2}\right] p(\xi)$$

$$H = \mathcal{E}_{op} = \sum_{j=1}^{J} \left(N_j + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2m} (p_j)_{op}^2 - \frac{m\epsilon^4}{24\hbar^2} \sum_{j=1}^{J} \left(N_j + \frac{1}{2}\right)^3$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[N(\xi) + \frac{1}{2}\right] \frac{1}{2m} p^2(\xi)$$

ここで

$$p(\xi) \equiv -2\hbar\xi$$

である。この様に個数演算子，運動量演算子，エネルギー（Hamiltonian）演算子が書かれる

以上がKaupの論文の概要である。

Kaupの論文について

古典論と量子論の対応の多義性のためにどの正準変数の許で量子化すべきであるかは決まらない。その意味ではKaupの量子化も一つの場の量子化である事はまちがいなく，一種のボーズ量子化に対応するが，通常の場の量子化と異なり，最初に"ソリトン"の個数を与えねばならない。通常は量子化された場の方程式は古典場の解に対応するものをすべて持つはずである。したがって，この様な量子化は"ソリトン"個数について"Fock space"を作る必要があるのかもしれないが，その様に考えるよりもむしろ（Kaupのformalismは必しもそうなってはいないが）古典場の解えの量子論的補正と見た方が良いのかもしれない。

更に困難はKaupも云っている様に $a^+ a$ がボーズ演算子であるから，$\epsilon^2>0$ に対してエネルギーが下に

unbounded である事である。（ $E^2<0$ なら“ソリトン”はない）これは物理的には非常に理解しにくい事である。そしてこの量子化が正しいとすると $E^2>0$ の1次元 non-linear Schrödinger 方程式で記述出来る量子場に対応する現象は存在しない事になる心配がある。どの量子化が正しいのかは結局は実験との比較による以外にはないのであるから、対応する物理現象がないのであれば、Kaup のは数学的モデルとして、古典場から離散的な粒子数を導くと云う意味での“量子化”として完結していると見ても良いかもしれない。

Kaup の主張の様に Fourier 変換との類似で“Scattering data”での量子化を考へると、“ソリトン”に対応する Fourier 変換が分らなくなり、Fourier 変換が完全でない様に見えて奇妙な事になる。

N. H. Christ, T. D. Lee の様に古典場が bound state（ソリトン）の解を持つ時は、自由場からの摂動展開（Fourier 変換）は困難であると考えて古典解から展開するのだと考えると、多分 Kaup のは“ソリトン”数を一定にした zero 場からの展開と考える事が出来る。

“ソリトン”の量子化は多分、将来素粒子物理の分野でも重要になって来ると思われるので Kaup のパイオニア的な仕事に敬意をはらいたい。

なお、ここで取上げた Kaup の論文はプレプリントで出版先は不明である．又 Christ，Lee の論文はプレプリントで連名のは出版先は不明であるが個別のは "Extended Systems in Field Theory" June 1975，Paris の Conference の proceeding に出版される予定

最後に量子化の事について色々お教へ頂きました沢田克郎氏，および亀淵迪氏に感謝致します．