数理解析研究所講究録
255巻 1975年 76-85

逆問題法の摂動論

九大 応力研　矢島 信男

こゝでは，逆問題法のテクニックを用いて，不均一分散系に於ける非線形波動のふるまいをしらべる。不均一性のために，逆問題法における散乱データの時間依存性は複雑となって閉じた形式で解くことはむずかしい。そこで不均一性が小さいとして摂動的にとりあつかう。近似の最低次のところで，ソリトンの変形，個数の変化がしらべられる。こゝで扱うのは，角谷，小野，浅野達がそれぞれ導いた方程式，

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} + \nu(t)u = 0 \tag{1}$$

である。

$\nu(t) = 0$ ならば，(1)はソリトン解，

$$u = -\mho\,\mathrm{sech}^2\left\{\sqrt{\mho/2}\,(x - 2\mho t)\right\} \tag{2}$$

を持つ。$\nu(t) \neq 0$ では，(2) のソリトンは変形していく。

$\nu(t)=0$ ならば，(1)に附随した固有値方程式，

$$v_{xx}-uv=-\lambda v\ , \qquad (3)$$

の逆向題法で(1)の初期値解を求めることができる。こゝでは $\nu(t)\neq 0$ についても (3) を対応させよう。(3) を (1)に代入して，vの時間発展を与える方程式を得る：

$$\lambda_t v^2+\{Q_x v-Q v_x\}_x+\nu u v^2=0\ . \qquad (4)$$

$$Q=v_t+v_{xxx}-3(u+\lambda)v \qquad (5)$$

こゝで，$|x|\to\infty$ で u とその微係数は 0 になるものとしておく。

(3)の離散的固有値は (1) のソリトン解に対応していて，固有値 $\lambda\ (<0)$ と $\mho$ とは

$$\mho=-2\lambda \qquad (6)$$

で結ばれる。

$\lambda<0$ なる場合に，(4) を x について全領域にわたって積分し，$x=\pm\infty$ で $v=0$ なる境界条件を用いると，

$$\lambda_t=-\nu(t)\int_{-\infty}^{\infty}u v^2 dx\Big/\int_{-\infty}^{\infty}v^2 dx \qquad (7)$$

を得る。すなわち，$\nu(t) \neq 0$ の場合には，固有値は時間的に変化し，ソリトンの振幅Uも時間的に変化する。

逆問題法を用いるために，$\lambda = k^2 > 0$ として連続固有値の状態を考える。

$$v_{xx} - uv = -k^2 v \qquad (8)$$

(8) の解，$\psi, \bar{\psi}$ を考える。こゝで $\psi, \bar{\psi}$ は

$$\psi = e^{ikx} \quad , \quad \bar{\psi} = e^{-ikx} \qquad (x = \infty) \qquad (9)$$

なる漸近形を持っている。こゝでは，$u(x,t)$ は $|x| \to \infty$ で 0 になるとしている。

Wronskian，$W(f,g)$ を $W(f,g) = f_x g - f g_x$ で定義すると，

$$W(\psi, \bar{\psi}) = 2ik \quad . \qquad (10)$$

これは，ψ と $\bar{\psi}$ が一次独立であることを示す。

今，(8) の解 ϕ，

$$\phi = e^{-ikx} \qquad (x = \infty) \qquad (11)$$

を導入し

$$\phi = a(k,t)\,\bar{\psi} + b(k,t)\,\psi \qquad (12)$$

とかく。 $a(k,t)$, $b(k,t)$ は散乱データであって，(10) から

$$a = (2ik)^{-1} W(\psi, \phi), \quad b = (2ik)^{-1} W(\phi, \bar{\psi}) \tag{13}$$

となる。

散乱データ a, b の時間変化は (4), (5) によって与えられる。 $v = \phi$ として (11) を用いると

$$\begin{aligned}
&\phi_t + \phi_{xxx} - 3(u+\lambda)\phi \\
&\qquad = -\frac{\nu}{2ik}\bar{\phi}\int_{-\infty}^{x} u\phi^2 dx \\
&\qquad\quad + \left(4ik^3 + \frac{\nu}{2ik}\int_{-\infty}^{x} u\phi\bar{\phi}\,dx\right)\phi
\end{aligned} \tag{14}$$

を得る。こゝで $\bar{\phi}$ は (8) の解で，$x = -\infty$ で $\bar{\phi} = e^{ikx}$ をみたし，ϕ とは一次独立であって，

$$\bar{\phi} = 2ik\,\phi\int^{x}\phi^{-2}dx$$

であらわされる。(14) で $x \to \infty$ とし (9), (12) を用いると，

$$a_t = \frac{\nu}{2ik}\left\{a(\bar{\phi}|u|\phi) - b^*(\phi|u|\phi)\right\} \tag{15a}$$

$$b_t = 8ik^3 b - \frac{\nu}{2ik}\left\{a^*(\phi|u|\phi) - b(\bar{\phi}|u|\phi)\right\} \tag{15b}$$

こゝで，$(f|L|g) = \int_{-\infty}^{\infty} fLg\,dx$ である。

(15) に (12) を代入し,

$$|a|^2 = 1 + |b|^2$$

なる関係を用いると,

$$a_t = \frac{\nu}{2ik}\left\{(\bar{\psi}|u|\psi)\,a + (\psi|u|\psi)\,b\right\} \tag{16a}$$

$$b_t = 8ik^3 b - \frac{\nu}{2ik}\left\{(\bar{\psi}|u|\psi)\,b + (\bar{\psi}|u|\bar{\psi})\,a\right\} \tag{16b}$$

となる。

固有値の変化を考えよう。離散的固有値 λ_0 は a の零点 k_0 ($\mathrm{Im}(k_0) > 0$) と $\lambda_0 = k_0^2$ でむすびついている。λ_0 の時間変化は (16a) で $k = k_0$ として,

$$\left.\frac{da}{dt}\right|_{k=k_0} = -\frac{dk_0}{dt}\,a'(k_0)$$

を用いると,

$$\lambda_{0t} = i\nu\,\frac{b(k_0)}{a'(k_0)}\,(\psi(k_0)|u|\psi(k_0)) \tag{17}$$

となる。これは, $\psi(k_0)$ の normlization を適当にとれば, (7) に一致している。

(16) で $\nu(t) = 0$ とすれば,

$$a_t = 0 \quad , \quad b_t = 8ik^3 b \tag{18}$$

となって，Gardner - Green - Kruskal - Miura のものと一致している。

$v(t)$ の影響を摂動として扱う。(16a)，(16b) の右辺の行列要素を $v=0$ のときの値でおきかえる。この近似を逐次実行することは複雑であるので第1近似のみを考える。さらに簡単のために1ソリトン解のみに限っておく。(2) の u に対して，結果のみを記すと，

$$(\bar{\Psi}|u|\Psi) = -\frac{2}{3}\sqrt{2v}\ \frac{v+6k^2}{v+2k^2} \tag{19a}$$

$$(\Psi|u|\Psi) = -\frac{2}{3}\sqrt{2v}\,e^{4ikvt}\,\frac{\sqrt{v/2}+ik}{\sqrt{v/2}-ik}\sqrt{\frac{2}{v}}\ \frac{\pi k}{\sinh(\pi k\sqrt{2/v})} \tag{19b}$$

$$= (\bar{\Psi}|u|\bar{\Psi})^* \tag{19c}$$

となる。

(19) を (16) に代入して a, b を求めよう。ただし，$t=0$ で a, b は $v=0$ の値をとるとしておく．すなわち，$t<0$ で $v=0$ と考えている。この場合，a, b の初期値を書いておくと，

$$a(t=0) = -\frac{\sqrt{v/2}+ik}{\sqrt{v/2}-ik} \tag{19d}$$

$$b(t=0) = \Gamma(1-ik\sqrt{2/v})\,\Gamma(ik\sqrt{2/v})\,/\,\Gamma(-1)\cdot e^{-4ikvt} \tag{19e}$$

これからわかるように，$k=i\sqrt{U/2}$ のところでのみ，$b(t=0)$ は0と異なる。それゆえ，ν の影響が余り大きくなければ，b は $k=i\sqrt{U/2}$ の近傍でのみ重要な寄与を与えるとして，

$$b(t) = e^{-4ikUt}\,b'(t) \approx e^{8ik^3t}\,b'(t) \tag{20}$$

としよう。(19) と (16) とから．

$$a_t = \frac{2}{3} i \frac{\nu}{l} \left\{ \frac{1+3l^2}{1+l^2} a + \frac{1+il}{1-il} \frac{\pi l}{\sinh(\pi l)} b' \right\} \tag{21}$$

$$b'_t = -\frac{2}{3} i \frac{\nu}{l} \left\{ \frac{1-il}{1+il} \frac{\pi l}{\sinh(\pi l)} a + \frac{1+3l^2}{1+l^2} b' \right\} \tag{22}$$

$$l \equiv k/\sqrt{U/2}$$

を得る。こゝで

$$\sigma = \int_0^t \nu(t')\,dt' \tag{23}$$

とすると，(21)，(22) の解として．

$$a(t) = a(t=0) \left\{ \cos\left(\frac{2}{3l}\Omega\sigma\right) + i \frac{A}{\Omega} \sin\left(\frac{2}{3l}\Omega\sigma\right) \right\} \tag{24}$$

$$A = \frac{1+3l^2}{1+l^2}$$

$$\Omega = \sqrt{\left(\frac{1+3l^2}{1+l^2}\right)^2 - \frac{(\pi l)^2}{\sinh^2(\pi l)}}$$

が得られる。

νが小さくて，$|2\Omega\sigma/3\ell| \ll 1$ ならば $\ell = i\kappa$ とすると，

$$a \approx \frac{1}{\kappa(\kappa+1)^2}\left\{\kappa(\kappa^2-1)+\frac{2}{3}(3\kappa^2-1)\sigma\right\} \qquad (25)$$

となって，この根は

$$\kappa = -\frac{2}{3}\sigma, \quad \pm 1 - \frac{2}{3}\sigma$$

であって，$\kappa > 0$ に限ると，

$$\kappa = 1 - \frac{2}{3}\sigma \qquad \text{for } \sigma > 0, \ \nu > 0 \qquad (26a)$$

$$\kappa = \frac{2}{3}|\sigma|, \ 1 + \frac{2}{3}|\sigma| \quad \text{for } \sigma < 0, \ \nu < 0 \qquad (26b)$$

を得る。それゆえ，$\nu > 0$ ならばソリトンの振幅は減少し，$\nu < 0$ ならばソリトンは成長するとともに小さな振幅のソリトン（ $\frac{2}{3}|\sigma|$ に対応）の発生をゆるすことになる。

(17) に (19) を代入すれば

$$\lambda_{0t} = -\frac{4}{3}\nu\lambda_0 \qquad (27)$$

を得るが，これの $|\sigma| \ll 1$ の解が (26) の $\kappa = 1 \pm \frac{2}{3}\sigma$ に対応している。当然であるが，(27) はソリトンの発生について何

の予測も与えない．

ソリトンが発生（あるいは消滅）するための条件を求めておこう。aの零点の個数は$|\sigma|$の増加とともに変化する。この場合，あらたにつくられる（あるいは消える）零点は複素k平面の虚軸上で原点の近傍（$-ik\approx 0$）にあるので，零点の数の変化する条件を$k\approx 0$の近傍でしらべればよい。(24)のΩは$k\approx 0$の近傍では，

$$\frac{\Omega}{\kappa}\approx i2\sqrt{1+\frac{\pi^2}{12}}$$

で与えられるのでこれを(24)に代入すると，

$$\frac{3\kappa}{2\sigma}+\frac{\tan\left(\frac{4}{3}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{12}}\,\sigma\right)}{\frac{4}{3}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{12}}\,\sigma}=0 \tag{28}$$

で$\kappa\approx 0$でのaの零点が与えられることになる。したがって，$\frac{4}{3}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{12}}|\sigma|$が$n\pi$をこえるたびに，$a$の零点の数は変化する（$\sigma>0$ならばその数は減るし，$\sigma<0$ならばその数は増える）。たゞ，こゝでの摂動論では，nが大きい場合にまで(28)を使うことは，その適用範囲をこえるおそれがあることを注意しておく。

こゝでは，ソリトンが変形するような場合にまで逆散乱問題法を拡張することができることを示した。たゞ実際の計算

は近似にたよらざるを得ない。

最近，Kaup (Preprint) は，方程式(1)を含むより広範囲の系について，散逸を許すような場合に逆散乱問題法を適用する可能性を論じている。そこでは (16)，(17) に相当する式が導かれ，ソリトンの変形があつかわれている。たゞ，ソリトンの数の変化についての議論はやられていない。