

逆問題と正準変換

名大理 児玉裕若

§ 序

Soliton 解をもち、非線形分散型方程式の初期値問題で、exact に解く方法の1つに、逆散乱法があることは、よく知られている。近年、Ablowitz 等¹⁾は、逆散乱法で解ける方程式のクラスを、Systematic に議論した。このクラスには、Korteweg de Vries 方程式、変形 Korteweg de Vries 方程式、非線形 Schrödinger 方程式等が含まれる。これらの方程式に、共通な、注目すべき性質として、無限個の保存量の存在がある。Zakharov 等^{2,3)}は、このことに関連して、KdV 方程式、非線形 Schrödinger 方程式~~等~~は、完全積分可能な Hamiltonian System であることを示した。有限自由度 N の Hamiltonian System では、互いに involution にある N 個の保存量の存在は、系が完全積分可能であることの必要十分条件である (Liouville の定理)、が、ここで、

考えているような無限次元の系については、無限位の保存量の存在は、系が完全積分可能である事の必要条件の4と5と、一般に、完全積分可能であることを証明することはできない。しかし、逆散乱問題で解まうるといいう性質を用いることで、一般的に、これらの方程式 (Ablowitz 等が示した逆散乱法で解くことができる方程式) が、完全積分可能であることを示せる。

ここでは、逆散乱 Scheme を Ablowitz 等の提出したものの¹⁾を用いる。この Scheme から得られる、非線形方程式を Hamiltonian System と定義し、一般的に、この System が完全積分可能であることを示す。このとき逆散乱 Scheme は、正準変換であることが示され、初期値問題は、単に、正準変数の 1 parameter t の action として考えられる。

§1 Ablowitz 等の散乱 Scheme と散乱問題.

Potential $q(x,t)$, $r(x,t)$ を持つ 1次元 Dirac 型 op. についての散乱問題.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + i\xi \varphi_1 &= q(x,t) \varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - i\xi \varphi_2 &= r(x,t) \varphi_1 \end{aligned} \right) \quad (1)$$

を考える。Ablowitz 等は、 φ_1, φ_2 (1) の時間発展を

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= A\varphi_1 + B\varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= C\varphi_1 - A\varphi_2 \end{aligned} \right) \quad (2)$$

の形で定義し、(1), (2) 式向の integrability condition をつか、 $A(x, t, \xi)$, $B(x, t, \xi)$, $C(x, t, \xi)$ の向の関係より、 ξ, t についての非局形方程式を得た。まず、(1) 式の散乱向問題を考える為、次の Jost 函数を定義する。 for real ξ .

$$\left. \begin{aligned} f(x, t, \xi) &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \bar{f}(x, t, \xi) &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \end{aligned} \right) \text{ as } x \rightarrow -\infty \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} g(x, t, \xi) &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \\ \bar{g}(x, t, \xi) &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \end{aligned} \right) \text{ as } x \rightarrow \infty \quad (4)$$

このとき、 f, g は又、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, \xi) &= e^{-i\xi x} + \int_{-\infty}^x e^{-i\xi(x-s)} g(s) f_2(s, \xi) ds \\ f_2(x, \xi) &= \int_{-\infty}^x e^{i\xi(x-s)} r(s) f_1(s, \xi) ds \end{aligned} \right) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} g_1(x, \xi) &= - \int_x^{\infty} e^{-i\xi(x-s)} g(s) g_2(s, \xi) ds \\ g_2(x, \xi) &= \int_x^{\infty} e^{i\xi(x-s)} r(s) g_1(s, \xi) ds \end{aligned} \right) \quad (6)$$

$$g_2(x, \xi) = e^{i\xi x} - \int_x^\infty e^{i\xi(x-s)} r(s) g_1(s, \xi) ds \quad (6)$$

又、 g, \bar{g} は (1) 式の一般解と見做す。

$$f(x, \xi) = a(\xi) \bar{g}(x, \xi) + b(\xi) g(x, \xi) \quad (7)$$

$$\bar{f}(x, \xi) = -\bar{a}(\xi) g(x, \xi) + \bar{b}(\xi) \bar{g}(x, \xi) \quad (8)$$

と表わすことが可能である。係数 $a(\xi), b(\xi)$ は

$$a(\xi) = W[f; g], \quad b(\xi) = W[\bar{g}; f] \quad (9)$$

ここで $W[f; g] \equiv f_1 g_2 - f_2 g_1$ とは Wronskian を表わす。

Just 函数 (3), (4) の定義より、 $a(\xi)$ ($\bar{a}(\xi)$) は上

(下) 半平面に解析接続可能であることがわかる。

$a(\xi), \bar{a}(\xi)$ の零点は (1) 式の bound state を意味し、このとき、次の関係が成立する。

$$f(x, \xi_n) = c_n g(x, \xi_n) \quad \text{Im } \xi_n > 0 \quad n=1, \dots, N_1 \quad (10)$$

$$\bar{f}(x, \bar{\xi}_m) = \bar{c}_m \bar{g}(x, \bar{\xi}_m) \quad \text{Im } \bar{\xi}_m < 0 \quad m=1, \dots, N_2 \quad (11)$$

これらの組 $S = \{a, \bar{a}, b, \bar{b}, \xi_n, \bar{\xi}_m, c_n, \bar{c}_m\}$ を、散乱データと呼ぶ。又、(11) 式より、次の関係があることがわかる。

$$a(\xi) \bar{a}(\xi) + b(\xi) \bar{b}(\xi) = 1 \quad \text{for real } \xi \quad (12)$$

逆散乱問題に与えれば、 S の potential g, r を求めることは一意的である。¹⁾

§ 2. 保存量と散乱データの関係

Potential g, r は ここでは特に、

$$(\partial_x^n g) \cdot (\partial_x^m r) \rightarrow 0 \quad (\text{急減少}) \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

$n, m = 0, 1, 2, \dots$

とする。このとき $\xi \rightarrow \infty$ で ξ のような (1) 式の漸近解を考えることができる。

$$f_1(x, \xi) = \exp \left\{ -i\xi x + \int_{-\infty}^x \Phi_1(s, t, \xi) ds \right\} \quad (13)$$

$$\rightarrow a(\xi) e^{-i\xi x} \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

すなわち、

$$\ln a(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(s, t, \xi) ds \quad (14)$$

同様に、

$$\bar{f}_2(x, \xi) = -\exp \left\{ i\xi x + \int_{-\infty}^x \Phi_2(s, t, \xi) ds \right\} \quad (15)$$

$$\rightarrow -\bar{a}(\xi) e^{i\xi x} \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

$$\therefore \ln \bar{a}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(s, t, \xi) ds \quad (15)$$

一方、(2) 式より Φ_1, Φ_2 に (2.1) 式を代入して、次式を得る

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(-A - \frac{B}{g} \Phi_1 \right) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(A - \frac{C}{r} \Phi_2 \right) = 0 \quad (18)$$

よって、(17)、(18)式の Φ 2項目の積分が零であるならば、(14)、(15)は保存量であることがわかる。(13)式を(1)式に代入して、Potential a 項で保存量を表わすと、

$$\Phi_1(x, t, \xi) = \frac{1}{2i\xi} \left\{ \Phi_1^2 + g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{g} \Phi_1 \right) - gr \right\} \quad (19)$$

こゝより、 Φ_1 を ξ の逆中で展開して

$$\Phi_1(x, t, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_1^{(n)}(x, t)}{(2i\xi)^n} \quad (20)$$

次の recursion formula を得る。

$$\phi_1^{(k+1)} = g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{g} \phi_1^{(k)} \right) + \sum_{l=1}^{k-1} \phi_1^{(l)} \phi_1^{(k-l)} \quad (21)$$

このとき保存量は、例えば、

$$I_1^{(3)} = - \int gr dx, \quad I_1^{(2)} = - \int r g_x dx \quad (22)$$

$$I_1^{(1)} = \int (g^2 r^2 - g r_{xx}) dx, \quad I_1^{(4)} = \int (3g^2 r r_x - g r_{xxx}) dx$$

$$\dots \dots \dots I_1^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^{(k)}(x, t) dx \quad (23)$$

Φ_2 に関して同様に計算すると $I_1^{(k)} = I_2^{(k)}$ であることが、

ただちにわかる。又、(22)の積分が存在することは明らか。

§3 Hamiltonian System としての非線形方程式

次のような Hamiltonian System を定義する。

$$q_t = \{q, H\}, \quad r_t = \{r, H\} \quad (24)$$

H は、前節で求めた保存量 I によって表わされる。又、

$\{, \}$ は Poisson bracket を表わし、次のように定義される。

$$\{u, v\} = i \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{\delta u}{\delta q} \frac{\delta v}{\delta r} - \frac{\delta u}{\delta r} \frac{\delta v}{\delta q} \right) + \left(\frac{\delta u}{\delta r^*} \frac{\delta v}{\delta q^*} - \frac{\delta u}{\delta q^*} \frac{\delta v}{\delta r^*} \right) \right] \quad (25)$$

ここで $\delta/\delta q$ は、Fréchet 微分を表わす。このとき、

$$\begin{aligned} \{q(x), r(x')\} &= i\delta(x-x') \\ \{q(x), q(x')\} &= \{r(x), r(x')\} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

を満足し、 q, r が canonical set をなすことがわかる。

次に (24) を正準変換するが、その前に、(24) の形で与えられる非線形発展方程式のクラスを考へよう。

$$\text{Class 1: } H = -(I^{(3)} + I^{(3)*}) \quad (27)$$

とすると、(24) 式は

$$i\phi_t = 2r\phi^2 - \phi_{xx} \quad , \quad i\psi_t = -2\psi r^2 + \psi_{xx}$$

特に, $r = -\phi^*$ とおくと,

$$i\phi_t + \phi_{xx} + 2|\phi|^2\phi = 0 \quad (28)$$

これは非線形 Schrödinger 方程式である。

$$\text{Class 2: } H = i(I_1^{(4)} - I_1^{(4)*}) \quad (29)$$

とすると,

$$\phi_t = 6\phi\phi\phi_x - \phi_{xxx} \quad , \quad \psi_t = 6\phi\psi\psi_x - \psi_{xxx}$$

i) $r = \psi, \phi = iu$ とおくと,

$$u_t + 6uuu_x + u_{xxx} = 0 \quad (30)$$

これは Korteweg-de Vries 方程式である。

ii) $r = \phi = iu$ とおくと,

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0 \quad (31)$$

これは変形 Korteweg-de Vries 方程式である。

一般に,

$$H = \sum_{n=1}^N (\alpha_n I^{(n)} + \text{c.c.}) \quad (32)$$

が考えられ、generalized KdV 方程式等が含まれていることが容易に分かる。

§ 4. 正準変換

散乱問題に換えては、Potential ϕ, ψ と散乱 $T^{-1} \psi$ の間には一対一の関係がある。そこで今、 ϕ, ψ System

から、散乱関数 \bar{r} の項への正準変換を考へる。ここで、Fréchet derivative E 、一般性を失うことなしに、次のように定義する。

$$\frac{\delta f(x, \xi)}{\delta g(x)} \equiv \lim_{\delta r \rightarrow x} \frac{\delta f(x, \xi)}{\delta g(r)} \quad (33)$$

この定義より、(9)式から a, b の g, r についての Fréchet 微分は、Jost 函数を用いて、(real ξ について)

$$\frac{\delta a(\xi)}{\delta g(x)} = f_2 g_2(x, \xi), \quad \frac{\delta a(\xi)}{\delta r(x)} = -f_1 g_1(x, \xi) \quad (34)$$

$$\frac{\delta b(\xi)}{\delta g(x)} = -f_2 \bar{g}_2(x, \xi), \quad \frac{\delta b(\xi)}{\delta r(x)} = f_1 \bar{g}_1(x, \xi) \quad (35)$$

となる。Poisson bracket $\{a(\xi), b(\xi')\}$ は、(25)より

$$\{a(\xi), b(\xi')\} = i \int dx \left(f_2 g_2(x, \xi) f_1 \bar{g}_1(x, \xi') - f_1 g_1(x, \xi) f_2 \bar{g}_2(x, \xi') \right)$$

となる。一方 (1)式より、 $\xi = \xi_1$ のとき $u^{(1)}, u^{(2)}$, $\xi = \xi_2$ のとき、 $v^{(1)}, v^{(2)}$ を任意の解の pair とするとき

$$\begin{aligned} & u_1^{(1)} u_1^{(2)} v_2^{(1)} v_2^{(2)} - u_2^{(1)} u_2^{(2)} v_1^{(1)} v_1^{(2)} \\ &= P \frac{i}{2(\xi_1 - \xi_2)} \frac{\partial}{\partial x} \left[(u_1^{(1)} v_2^{(1)} - u_2^{(1)} v_1^{(1)}) (u_1^{(2)} v_2^{(2)} - u_2^{(2)} v_1^{(2)}) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

の関係がある。このように Poisson bracket は、Jost 函数の漸近解のみで与えられる。(36)を用いた場合は、(2)式は

$$\{a(\xi), b(\xi')\} = -\mathcal{P} \frac{1}{2(\xi-\xi')} a(\xi)b(\xi') + \mathcal{P} \frac{1}{2(\xi-\xi')} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2i(\xi-\xi')x} a(\xi')b(\xi)$$

ここで symbol \mathcal{P} は 主値を表わす。又、

$$\mathcal{P} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{i\xi x}}{\xi} \right) = i\pi \delta(\xi)$$

より、超函数 $\xi \rightarrow \xi, \bar{\xi}$ 、

$$\{\ln a(\xi), \ln b(\xi')\} = \mathcal{P} \left(-\frac{1}{2(\xi-\xi')} \right) + \frac{i\pi}{2} \delta(\xi-\xi') \quad (37)$$

を得る。同様にして、

$$\{\ln \bar{a}(\xi), \ln b(\xi')\} = \mathcal{P} \frac{1}{2(\xi-\xi')} + \frac{i\pi}{2} \delta(\xi-\xi')$$

$$\{\ln a(\xi), \ln \bar{b}(\xi')\} = \mathcal{P} \frac{1}{2(\xi-\xi')} - \frac{i\pi}{2} \delta(\xi-\xi')$$

$$\{\ln \bar{a}(\xi), \ln \bar{b}(\xi')\} = \mathcal{P} \left(-\frac{1}{2(\xi-\xi')} \right) - \frac{i\pi}{2} \delta(\xi-\xi')$$

$$\{a(\xi), \bar{a}(\xi')\} = \{b(\xi), \bar{b}(\xi')\} = 0$$

を得る。 (= 45 p 1)。

$$P_{\xi} = \ln |a(\xi)|^{-2} \quad \text{or} \quad \bar{P}_{\xi} = \ln |\bar{a}(\xi)|^{-2} \quad (38)$$

$$Q_{\xi} = \frac{2}{\pi} \arg b(\xi) \quad \text{or} \quad \bar{Q}_{\xi} = -\frac{2}{\pi} \arg \bar{b}(\xi)$$

が canonical set を与えることが容易にわかる。すなわち、

$$\begin{aligned} \{P_{\xi}, Q_{\xi'}\} &= \{\bar{P}_{\xi}, \bar{Q}_{\xi'}\} = -\delta(\xi - \xi') \\ \{P_{\xi}, \bar{P}_{\xi'}\} &= \{Q_{\xi}, \bar{Q}_{\xi'}\} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、 P は integral に対して、 τ であることに注意せよ。

bound state, $a(\xi_n) = 0$, についても同様に計算できる。特に $\delta\xi_n / \delta g(x)$ には、摂動法を用いる。

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + i(\xi + \delta\xi)\varphi_1 = (g + \delta g \delta(x-z))\varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - i(\xi + \delta\xi)\varphi_2 = r\varphi_1 \end{cases}$$

ただし、 $g \rightarrow g + \delta g$ の摂動を受けた方程式を考へ、波動函数 φ の連続性と、有界性をつかって、次式をうる。

$$\frac{\delta\xi_n}{\delta g(x)} = -\frac{1}{\dot{a}(\xi_n)} f_2 g_2(x, \xi_n) \quad (40)$$

同様にして、 r についても、

$$\frac{\delta\xi_n}{\delta r(x)} = \frac{1}{\dot{a}(\xi_n)} f_1 g_1(x, \xi_n) \quad (41)$$

ここで \dot{a} は ξ についての微分を意味する。又、

$$\frac{\delta C_n}{\delta g(x)} = -f_2 \bar{g}_2(x, \xi_n), \quad \frac{\delta C_n}{\delta r(x)} = f_1 \bar{g}_1(x, \xi_n)$$

は、明らか。こゝより Poisson bracket を計算して、(36)式をたかうことで、次式を得る。

$$\{\zeta_n, C_{n'}\} = 0 \quad (n \neq n')$$

$$\{\zeta_n, \zeta_{n'}\} = \{C_n, C_{n'}\} = 0$$

$$\{\zeta_n, C_n\} = \frac{1}{2} C_n$$

これからより、

$$P_n = \zeta_n, \quad Q_n = -2 \ln C_n \quad (42)$$

が canonical set であることが容易にわかる。一方、

$Q(\zeta_n) = 0$ を考慮することで 連続部分系 についての canonical set と、(42) とが commutative であることが示せる。又、 $\bar{Q}(\bar{\zeta}_m) = 0$ の部分についても全く、同様の結果を得る。

$$\bar{P}_m = \bar{\zeta}_m, \quad \bar{Q}_m = -2 \ln \bar{C}_m \quad (42)'$$

更に、このように canonical set (38), (42) は 散乱データ δ^N に同値であることが証明できる。このようにして、散乱問題は、 δ, γ から、 P, Q への正準変換であると思えることができる。そして、正準変換は、逆をもつことから、逆散乱問題も又、正準変換である。

§5 Canonical 変数による Hamiltonian の表現

(14) 式において、 $Q(\xi)$ は、 $|\xi| \rightarrow \infty$ で 2 次のような漸近形をもつことがわかる。

$$a(\xi) \rightarrow 1 \quad \text{as} \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

よって次の展開が可能である。

$$\ln a(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\xi^k} \quad \text{Im } \xi \geq 0 \quad (44)$$

(22) 式と比較して、次式を得る。

$$I_k = (2i)^k C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \ln a(\xi) \cdot \xi^{k-1} d\xi \quad (45)$$

積分路は、上半平面にわたるとする。 $a(\xi)$ については、bound state 及び、漸近形を考慮して次式で表わせる。

$$a(\xi) = \hat{a}(\xi) \prod_{n=1}^{N_1} \frac{\xi - \xi_n}{\xi - \xi_n^*} \quad \hat{a}(\xi): \text{reduced function of } a(\xi)$$

$\hat{a}(\xi)$ は、上半平面で極点をもちない、 $a(\xi)$ と同じ解析性をもつ函数である。これをつかして (45) 式を計算すると

$$\begin{aligned} H_1 &= \alpha_k I_1^{(k)} + C, C \\ &= -\alpha_k \frac{(2i)^k}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |a(\xi)|^2 \cdot \xi^{k-1} d\xi \\ &\quad + \alpha_k \frac{(2i)^k}{2\pi i} \sum_{n=1}^{N_1} \oint \ln \frac{\xi - \xi_n}{\xi - \xi_n^*} \cdot \xi^{k-1} d\xi \end{aligned}$$

ここで、 α_k は、 k が偶数のとき純虚数、奇数のとき実数となるように選ぶ。よって、P. Q で表わせば

$$H_1[P, Q] = \alpha_k (2i)^k \left[\frac{1}{\pi i} \int P_\xi \cdot \xi^{k-1} d\xi - \sum_{n=1}^{N_1} \frac{P_n^k - P_n^{*k}}{k} \right] \quad (46)$$

同様にして,

$$H_2[\bar{P}, \bar{Q}] = \alpha_k (2i)^k \left[\frac{1}{\pi i} \int \bar{P}_\xi \cdot \xi^{k-1} d\xi + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{\bar{P}_m^k - \bar{P}_m^{*k}}{k} \right] \quad (47)$$

を得る。このように、 P, Q を変換した action angle 型のものである。 P, Q の t に関する action は次の Hamiltonian flow によつて記述される。

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta Q}, \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{\delta H}{\delta P} \quad (48)$$

これより、この system が

$$P = \text{const.} \quad (\text{action variable}) \quad (49)$$

であり、完全積分可能であることが分かる。特に、固有値 ξ_n は (48) (24) の Hamiltonian flow で不変である。

前にあげた、幾つかの例について具体的に、 P, Q の action を求めてみる。

$$\text{Class 1} \quad H = -(I^{(3)} + I^{(3)*}), \quad (\alpha_k = -1, k=3)$$

非線形 Schrödinger 方程式

$$\xi_n = \bar{\xi}_n^* \quad ; \quad \text{time invariant.}$$

$$b(t, \xi) = \bar{b}^*(t, \xi) = b(0, \xi) \exp(4i\xi^2 t)$$

$$c_n(t) = \bar{c}_n^*(t) = c_n(0) \exp(4i\xi_n^2 t)$$

Class 2: $H = i(I^{(k)} - I^{(k)*})$ ($\alpha_k = i$, $k=4$)

i) K-dV 方程式

$$\zeta_n = iK_n : \text{time invariant} \quad K_n > 0 \text{ real.}$$

$$b(t, \xi) = -\bar{b}^*(t, \xi) = b(0, \xi) \exp(\delta i \xi^3 t)$$

$$c_n(t) = -\bar{c}_n^*(t) = c_n(0) \exp(\delta K_n^3 t)$$

ii) M-KdV 方程式

$$\zeta_n = \bar{\zeta}_n^* : \text{time invariant}$$

$$b(t, \xi) = \bar{b}^*(t, \xi) = b(0, \xi) \exp(\delta i \xi^3 t)$$

$$c_n(t) = \bar{c}_n^*(t) = c_n(0) \exp(\delta i \zeta_n^3 t)$$

こゝからは、よく知られた結果である。

References

- 1) M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur:
Phys. Rev. Lett., 31 (1973) 125
- 2) V.E. Zakharov and L.D. Faddeev;
Funct. Anal. Appl., 5 (1971) 280
- 3) V.E. Zakharov and C.V. Manakov;
Teoret. Matem. Fiz., 19 (1974) 332
(こゝでの結果は、Prog. Theor. Phys. Vol 54 No.3 に掲載予定)