

## 二次元 KdV 方程式の N-ソリトン解

京大 工 薩摩 順吉

### § 1. まえがき

二次元 KdV 方程式,

$$u_{xt} + 12(uu_x)_x + u_{xxxx} \pm 12u_{yy} = 0 \quad (1)$$

の N-ソリトン解を広田の方法<sup>1)</sup>を用いて求める。(1)式の二次元効果を示す項の±符号は媒質がそれぞれ negative 及び positive dispersion であることに対応している。(1)式は一次元ソリトンの横方向の揺動に対する安定性を論ずるために Kadomtsev 及び Petviashvili<sup>2)</sup> そして 及川・薩摩・矢島<sup>3)</sup>によって導入されたものである。ここでは二次元的な影響はソリトンの伝播方向を変化させると考え、伝播方向の異なった N 個のソリトンの衝突を記述する厳密解を求める。

最近、(1)式に対する逆散乱法が Druyama<sup>4)</sup>によって提起され、また Bäcklund 変換が Chen<sup>5)</sup>によって見出された。更に、Zakharov と Shabat<sup>6)</sup>が(1)式に対し逆散乱法を適用し、ここで

求めようとするものと本質的に同じ  $N$ -ソリトン解を得ている。広田の方法は逆散乱法とくらべかなり融通性を持っており、いろいろな型の非線形波動現象に適用可能であると考えられるので、この方法で  $N$ -ソリトン解を示すことは有益であると思われる。

## § 2. 1-ソリトン解

(1)式に対して

$$u = (\log f)_{xx} \quad (2)$$

なる変換を施せば、 $f$ に関する双一次形式

$$ff_{xt} - f_x f_t + ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 \pm 12(f_{yy}f - f_y^2) = 0 \quad (3)$$

が得られる。但し、(1)式の解として  $|x| \rightarrow \infty$  で  $|u| \rightarrow 0$  となるものだけに着目している。広田氏によって導入された演算子<sup>1)</sup>

$$D_r^m a(r) \cdot b(r) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r'} \right)^m a(r) \cdot b(r') \Big|_{r=r'} \quad (4)$$

( $r = x, y, t$ ,  $m$ : indeger)

を使えば、(2)式は

$$(D_x D_t + D_x^4 \pm 12 D_y^2) f(x, y, t) \cdot f(x', y', t') = 0 \quad (2')$$

と書き直すことができる。

(3)式の特解として

$$f = \cosh(k_x x + k_y y - \omega t) \quad (5)$$

が存在することは容易に確かめられる。ここで  $k$ ,  $k_y$  は定数であり,  $\omega$  は

$$-k\omega + 4k^4 \pm 12k_y^2 = 0 \quad (6)$$

を満足している。(6)式を(2)式に代入すれば,

$$u = k^2 \operatorname{sech}^2(kx + k_y y - \omega t) \quad (7)$$

となるが, これは  $x$  軸と  $\tan^{-1}(k_y/k)$  の角をなして  $\omega/\sqrt{k^2+k_y^2}$  の速度で伝播しているソリトンを表わしている。元来, (1)式は二次元効果が小さいという近似の下に成立しているので, 伝播方向が  $x$  軸となす角は十分小さいと考へなければならぬが数学的観点からはそのような制限は存在しない。

### § 3 N-ソリトン解

N-ソリトン解は

$$f = \frac{1}{2} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \cosh\left(\sum_{i=1}^N \epsilon_i \xi_i\right) \prod_{i < j}^{(N)} \left\{ (\epsilon_i k_i - \epsilon_j k_j)^2 + (p_i - p_j)^2 \right\}^{\pm 1} \quad (8)$$

で与えられる。但し

$$\xi_i = k_i x + k_{y_i} y - \omega_i t \quad (9)$$

$$-k_i \omega_i + 4k_i^4 \pm 12k_{y_i}^2 = 0 \quad (10)$$

$$p_i = k_{y_i} / k_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

であり,  $\sum_{\epsilon_i = \pm 1}$  は  $\epsilon_1 = \pm 1, \epsilon_2 = \pm 1, \dots, \epsilon_N = \pm 1$  のすべての可能な組合せについての和をとることを意味している。また  $\prod_{i < j}^{(N)}$  は  $i < j$  を満足する  $N$  個の要素のすべての可能な組合せについて

の積をとることを意味している。(8)式は一次元 KdV 方程式の場合に広田氏が求めた  $N$ -ソリトン解<sup>1)</sup>と本質的に同じ形をしている。(1)式において  $y \rightarrow t$ ,  $t \rightarrow x$  とすれば, Boussinesq 方程式

$$12 u_{tt} + u_{xx} + 12 (u u_x)_x + u_{xxxx} = 0 \quad (12)$$

が得られる。従って (8)式は適当な変数変換を施すことによつて Boussinesq 方程式の  $N$ -ソリトン解<sup>8)</sup>に帰着させることができる。

$N$ -ソリトン解, (8)式, が (3)式を満足していることを証明しよう。(8)式は

$$f = \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \exp \left( \sum_{i=1}^N \epsilon_i \xi_i + \sum_{i < j}^{(N)} \Phi_{ij} \right) \quad (13)$$

と書きかえられる。但し,

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{2} \log |(\epsilon_i k_i - \epsilon_j k_j)^2 \mp (p_i - p_j)^2| \quad (14)$$

であり,  $\sum_{i < j}^{(N)}$  は  $i < j$  を満足する  $N$ 個の要素のすべての可能な組合せについての和をとることを意味している。(13)式を (3)式に代入し, (9)式を使えば

$$\begin{aligned} & \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \sum_{\epsilon'_i = \pm 1} \exp \left[ \sum_{i=1}^N (\epsilon_i + \epsilon'_i) \xi_i + \sum_{i < j}^{(N)} (\Phi_{ij} + \Phi_{ij}') \right] \\ & \times \left[ - \left( \sum_{i=1}^N \epsilon_i w_i \right) \left( \sum_{i=1}^N \epsilon_i k_i \right) + \left( \sum_{i=1}^N \epsilon_i w_i \right) \left( \sum_{i=1}^N \epsilon'_i k_i \right) + \left( \sum_{i=1}^N \epsilon_i k_i \right)^4 \right. \\ & - 4 \left( \sum_{i=1}^N \epsilon_i k_i \right)^3 \left( \sum_{i=1}^N \epsilon'_i k_i \right) + 3 \left( \sum_{i=1}^N \epsilon_i k_i \right)^2 \left( \sum_{i=1}^N \epsilon'_i k_i \right)^2 \\ & \left. \pm 12 \left( \sum_{i=1}^N \epsilon_i k_i y_i \right)^2 \mp 12 \left( \sum_{i=1}^N \epsilon_i k_i y_i \right) \left( \sum_{i=1}^N \epsilon'_i k_i y_i \right) \right] = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

となる。但し  $\Phi_{ij}'$  は (14)式において  $\epsilon_i, \epsilon_j$  を  $\epsilon'_i, \epsilon'_j$  としたものの

である。 (10) 式と (11) 式を用い、  $2\eta_i = \epsilon_i - \epsilon'_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) なる記号を導入すれば、 (15) 式は

$$\sum_{\epsilon_i=\pm 1} \sum_{\epsilon'_i=\pm 1} \exp \left[ \sum_{i=1}^N (\epsilon_i + \epsilon'_i) \xi_i + \sum_{i < j}^{(N)} (\Phi_{ij} + \Phi'_{ij}) \right] \quad (16)$$

$$\times \left[ 2 \left( \sum_{i=1}^N \eta_i r_i \right)^4 - 2 \left( \sum_{i=1}^N \eta_i r_i \right) \left( \sum_{i=1}^N \eta_i^3 r_i^3 \right) - 3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \eta_j r_i r_j (p_i - p_j)^2 \right] = 0$$

となる。 (16) 式の  $\xi_i$  の係数は一般性を失なうことなく次の三つの組に分けることができる。

$$\begin{aligned} \epsilon_i + \epsilon'_i &= 0 & \text{for } i=1, 2, \dots, m \\ \epsilon_i = \epsilon'_i &= 1 & \text{for } i=m+1, m+2, \dots, n \\ \epsilon_i = \epsilon'_i &= -1 & \text{for } i=n+1, n+2, \dots, N \end{aligned} \quad (17)$$

上の条件を使えば、 (16) 式の  $\exp \left( 2 \sum_{i=m+1}^n \xi_i - 2 \sum_{i=n+1}^N \xi_i \right)$  の係数は、

$$\frac{1}{4} \prod_{m+1 \leq i < j \leq N} [(\epsilon_i r_i - \epsilon_j r_j)^2 - (p_i - p_j)^2] \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ m+1 \leq j \leq N}} [ \{ (r_i + r_j)^2 - (p_i - p_j)^2 \} \{ (r_i - r_j)^2 - (p_i - p_j)^2 \} ]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \sum_{\eta_i=\pm 1} \left[ \{ 2 \left( \sum_{i=1}^m \eta_i r_i \right)^4 - 2 \left( \sum_{i=1}^m \eta_i r_i \right) \left( \sum_{i=1}^m \eta_i^3 r_i^3 \right) - 3 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \eta_i \eta_j r_i r_j (p_i - p_j)^2 \} \right]$$

$$\times \prod_{\substack{(m) \\ (i) < (j)}} \{ (\eta_i r_i - \eta_j r_j)^2 - (p_i - p_j)^2 \}$$

となる。但し、  $\prod_{m+1 \leq i < j \leq N}$  と  $\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ m+1 \leq j \leq N}}$  は積記号の下に書かれた条件を満す要素のすべての可能な組合せについての積をとることを意味している。他のすべての係数について考えると、結局方程式が成立すれば (16) 式が成り立ち、 (17) 式が (16) 式の解となる。

$$G(\eta_1 r_1, \eta_2 r_2, \dots, \eta_n r_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$\equiv \sum_{\eta_i=\pm 1} \left[ \{ 2 \left( \sum_{i=1}^n \eta_i r_i \right)^4 - 2 \left( \sum_{i=1}^n \eta_i r_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \eta_i^3 r_i^3 \right) - 3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \eta_j r_i r_j (p_i - p_j)^2 \} \right]$$

$$\times \prod_{i < j}^{(n)} \{ (\eta_i k_i - \eta_j k_j)^2 - (P_i - P_j)^2 \} = 0 \quad (18)$$

for  $1 \leq n \leq N$

関数  $G$  は以下の性質を持っている。

$$\begin{aligned} [A] \quad & G(\eta_1 k_1, \eta_2 k_2, \dots, \eta_n k_n; P_1, P_2, \dots, P_n) \Big|_{k_1=0} \\ &= \prod_{i=2}^n \{ k_i^2 - (P_i - P_1)^2 \} G(\eta_2 k_2, \eta_3 k_3, \dots, \eta_n k_n; P_2, P_3, \dots, P_n) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} [B] \quad & G(\eta_1 k_1, \eta_2 k_2, \dots, \eta_n k_n; P_1, P_2, \dots, P_n) \Big|_{k_1 = \pm k_2 \text{ and } P_1 = P_2} \\ &= 8 k_1^2 \prod_{i=3}^n \{ (k_1 - k_i)^2 - (P_1 - P_i)^2 \} \{ (k_1 + k_i)^2 - (P_1 - P_i)^2 \} G(\eta_3 k_3, \eta_4 k_4, \dots, \eta_n k_n; P_3, P_4, \dots, P_n) \end{aligned} \quad (20)$$

[C] 任意の  $i, j$  に対して,  $k_i, P_i$  を  $k_j, P_j$  でおきかえても不変に保たれる。

[D]  $k_1, k_2, \dots, k_n$  及び  $P_1, P_2, \dots, P_n$  について奇次関数である。

[E]  $k_1, k_2, \dots, k_n$  について偶関数である。

上記の性質を使って (18) 式を数学的帰納法で証明しよう。

$n=1, 2$  のときは容易に証明できる。今  $n-1$  及び  $n-2$  に対して成り立つと仮定すれば, 性質 [A], [C], [E] より  $G$  は  $\prod_{i=1}^n k_i^2$  で因数分解されることになる。また性質 [B], [D] は  $G$  が

$$G = (k_1 - k_2) \{ (k_1 + k_2) g_1 + (P_1 - P_2) g_2 \} + (P_1 - P_2) \{ (k_1 + k_2) g_3 + (P_1 - P_2) g_4 \} \quad (21)$$

という形で書かれることを意味している。ここで  $g_1, \dots, g_4$  は  $k_1, \dots, k_n$  と  $P_1, \dots, P_n$  についての奇次多項式である。さらに

[C] に注意すれば

$$G = \prod_{i < j}^{(n)} (k_i^2 - k_j^2) G_1 + (P_1 - P_2) (k_1 - k_2) \prod_{i < j}^{(n)} (k_i^2 - k_j^2) G_2 + \dots + \prod_{i < j}^{(n)} (P_i - P_j)^2 G_L \quad (22)$$

と書き表わされるが，ここでやはり  $G_1, G_2, \dots, G_L$  は  $k_1, \dots, k_n$  と  $p_1, \dots, p_n$  についての齊次多項式である。また積記号に付けられたダッシュは  $i=1, j=2$  の場合を除くことを意味している。(22)式の各項は  $k_1, \dots, k_n, p_1, \dots, p_n$  によって少なくとも  $n(n-1)$  次の次数をもっている。結局もし  $G$  が恒等的に 0 でないとおれば， $G$  は  $k_1, \dots, k_n, p_1, \dots, p_n$  に関して少なくとも  $n(n-1) + 2n$  次の関数でなければならぬことになる。一方 (18)式は  $G$  が高々  $n(n-1) + 4$  次の関数であることを示している。 $n \geq 3$  のとき両者は明らかに矛盾をきたす故， $G$  はすべての  $n$  に対して 0 でなければならぬ。よって (18)式が示され，(8)式が (3)式を満足あることが証明された。

#### §4 ソリトンへの分裂

$N$ -ソリトン解が  $N$ 個のソリトンに分裂していく様子を調べよう。(23)式を(2)式に代入すれば，

$$u = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{i'=1}^N \sum_{j'=1}^N (c_i - c_{i'}) (c_j - c_{j'}) k_i k_j \exp \left\{ \sum_{i'=1}^N (c_i + c_{i'}) \xi_{i'} + \sum_{j'=1}^N (\Phi_{j'} + \Phi_{j'}) \right\} \right]}{2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \exp \left\{ \sum_{i'=1}^N (c_i + c_{i'}) \xi_{i'} + \sum_{j'=1}^N (\Phi_{j'} + \Phi_{j'}) \right\}} \quad (23)$$

が得られる。一般性を失わずにとなく， $\tau \rightarrow \infty$  の極限で

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1} = \infty,$$

$$\xi_n = \text{finite} \quad (24)$$

$$\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_N = -\infty$$

となるとする。(24)式の分母分子に  $\exp\left(2\sum_{i=1}^N \xi_i - 2\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i\right)$  をかけ、 $t \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$u|_{t \rightarrow \infty} = k_n^2 \operatorname{sech}^2(\xi_n - \delta_n^+) \quad (25)$$

が得られる。ここで

$$\delta_n^+ = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \log \left| \frac{(k_n - k_i)^2 \mp (p_n - p_i)^2}{(k_n + k_i)^2 \mp (p_n - p_i)^2} \right| - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \log \left| \frac{(k_n - k_i)^2 \mp (p_n - p_i)^2}{(k_n + k_i)^2 \mp (p_n - p_i)^2} \right| \quad (26)$$

である。同様に  $t \rightarrow -\infty$  の場合を考えると

$$u|_{t \rightarrow -\infty} = k_n^2 \operatorname{sech}^2(\xi_n - \delta_n^-) \quad (27)$$

が得られる。ここで

$$\delta_n^- = -\delta_n^+ \quad (28)$$

である。従って  $n$  番目のソリトンが、他の  $N-1$  個のソリトンと衝突することによって受ける位相変化は

$$\delta_n = \delta_n^+ - \delta_n^- = 2\delta_n^+ \quad (29)$$

で与えられることになる。同じ計算を 1 から  $N$  までのすべての  $n$  に対して行なえば、 $|t| \rightarrow \infty$  の極限で  $N$ -ソリトン解は  $N$  個のソリトンに分裂していくことを示すことができる。

2-ソリトン解は

$$u = \frac{2[(k_1^2 - k_2^2)^2 \mp (k_1^2 + k_2^2)(p_1 - p_2)^2 + A^+ A^- (k_1^2 \cosh 2\xi_2 + k_2^2 \cosh 2\xi_1)]}{[A^- \cosh(\xi_1 + \xi_2) + A^+ \cosh(\xi_1 - \xi_2)]^2} \quad (30)$$

で与えられる。ここで

$$A^+ = \sqrt{(k_1 + k_2)^2 \mp (p_1 - p_2)^2} \quad (31)$$



$$A^- = \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + (P_1 - P_2)^2} \quad (32)$$

である。  $|t| \rightarrow \infty$  の漸近形を考えると、この解は振幅が  $k_1, k_2$  の二個のソリトンが  $\tan^{-1}[(P_2 - P_1)/(P_1 P_2 + 1)]$  の角をなして衝突している様子を表わしていることが分る。

衝突によって生じる位相変化は

$$\delta_1 = -\delta_2 = \frac{1}{2} \log \left| \frac{(k_1 - k_2)^2 + (P_1 - P_2)^2}{(k_1 + k_2)^2 + (P_1 - P_2)^2} \right|$$

で与えられるが、一次元の場合とくらべてその大きさは、媒質が *negative dispersion* の場合には増し、*positive dispersion* の場合には減少している。またその増加(減少)率は二つのソリトンの伝播方向が交わる角度が大きくなればなるほど大きくなっていく。

## §5 参考文献

- 1) R. Hirota : Phys. Rev. Letters 27 (1971) 1192.
- 2) B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili : Soviet Physics-Doklady 15 (1970) 539.
- 3) M. Oikawa, J. Satsuma and N. Yajima : J. Phys. Soc. Japan 37 (1974) 511.

- 4) V. S. Dryuma : Soviet Physics - JETP Letters 19 (1974) 387.
- 5) H. Chen : preprint
- 6) V. E. Zakharov and A. B. Shabat : Funct. Anal. Appl. 8 (1974) 226.
- 7) R. Hirota : Progr. Theor. Phys. 52 (1974) 1498.
- 8) R. Hirota : J. Math. Phys. 14 (1973) 810.