数理解析研究所講究録
256巻 1975年 110-121

Reductive Operatorについて

東北大 教養　北野孝一

Hで separable, infinite-dimensional complex Hilbert space を、B(H)でH上の bounded linear operator の全体を表わす。

operatorが reductive であるとは invariant subspace がすべて reducing であるときである。J. A. Dyer, E. A. Pedersen 及び P. Porcelli [3] により、次の I, II が同値であることが証明された。

I. 任意の operatorが自明でない invariant subspace をもつ.

II. 任意の reductive operator は normalである.

(E. A. Azoff, F. Gilfeather [2] は別証明を与えている.)

これで、invariant subspace の存在の問題と reductive operator の normality の問題が同値であることがわかったのである。以前から reductive operator の normalityについては研究されていたし、現在も多くの研究がなされてい

る。例えば、T. Andô [1]，T. Saitô [14]，K. Kitano [6]，R.L. Moore [8]，P.R. Halmos [5]，P. Rosenthal，E. Nordgren，H. Radjavi [10]，C.K. Fong [4] など。

この報告では reductive operator についてのいくつかの性質と quasi-similarity と normality との関連についての結果を紹介したいと思う。

$\mathbb{R}$ で reductive operator の全体を、$\mathbb{T}$ で transitive operator の全体を表わす。ここで operator が transitive であるというのは、自明な invariant subspace しか持たないときである。それから operator A で invariant な subspace の全体を LatA で表わす。

§1. Reductive Operator の性質

この節の結果は P.R.Halmos，R.L.Moore によっている。

<u>定理</u>　$\mathbb{R}$ の閉核(内点全体)は $\mathbb{T}$ の部分集合である。

証明、reductive intransitive operator A が $\mathbb{R}$ の interior に入らないことを示せばよい。A が intransitive より、自明でない invariant subspace が存在するこれを $\mathfrak{M}$ とする。更に A が reductive より、$\mathfrak{M}$ は A^* でも invariant である。ここで $\mathfrak{M}$ は invariant であるがしかし reducing でないような operator $Q \in B(H)$ をとり、$A+\frac{1}{n}Q$ (n は任意の自然数) を考える。

$\mathfrak{M}$ は $A+\frac{1}{n}Q$ で invariant であるが $A^*+\frac{1}{n}Q^*$ で invariant でない．従って $A+\frac{1}{n}Q$ は reductive でない．$n\to\infty$ のとき $A+\frac{1}{n}Q\to A$ であるから $A\notin\mathbb{R}$ の interior である．

系．$\mathbb{R}$ の開核は空集合である．

証明．まず $\{T;T\in B(H)$ s.t. $\sigma_p(T)\neq\phi\}$ なる集合は $B(H)$ の中で dense であることを示す．任意の $A\in B(H)$ に対して $\partial\sigma(A)\subset\sigma_{ap}(A)$ であるから $\sigma_{ap}(A)\neq\phi$ である．次に任意の $\lambda\in\sigma_{ap}(A)$，$\varepsilon>0$ に対して，$\|Ae-\lambda e\|<\varepsilon$ なるような単位ベクトル e が存在する．e への projection を P とし，$A_0=A-(I-P)AP$ とおく．$A_0e=(Ae,e)e$ であるから $\sigma_p(A_0)\neq\phi$ である．ところで任意の $f\in H$ に対して

$$\|(A-A_0)f\|=\|(I-P)APf\|\leqq|(f,e)|\,\|(I-P)Ae\|$$
$$\leqq\|f\|\,\|Ae-(Ae,e)e\|\leqq2\varepsilon\|f\|$$

従って $\|A-A_0\|\leqq2\varepsilon$．さて，eigenvalue をもつということは transitivity が成立しないから上に示したことより $\mathbb{T}$ の interior は空集合である．前に示した定理より系が得られる．

$\mathbb{R}$ の complement は dense であるばかりでなく，その interior は non-empty である．

定理．U を non-invertible isometry operator，$A\in\mathbb{R}$ とするとき，$\|U-A\|\geqq1$ が成立つ．

証明．もし $\|U-A\|<1$ とする．$\|U^*-A^*\|<1$ となるが，

まず $\mathrm{Ker}\,A^* \neq \{0\}$を示す。 $\|U^*U - A^*U\| < 1$ 即ち $\|1 - A^*U\| < 1$ であるから A^*U が invertibleとなる. ここで $\mathrm{ran}\,A^* = H$ 即ち $\mathrm{Ker}\,A^* = \{0\}$とする. closed graph theorem より A^* が invertible. 従って U が invertible となり仮定に反する. ゆえに $\mathrm{Ker}\,A^* \neq \{0\}$ である. 次に A が reductive であるから $\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Ker}\,A^*$ 従って $Af = 0$ なるような $f \neq 0$ が存在する. しかし

$$\|f\| = \|Uf\| = \|(U-A)f\| \leqq \|U-A\|\|f\| < \|f\|$$

となり矛盾が生ずる。従って $\|U-A\| \geqq 1$ でなければならぬ。

この定理より. 任意の non-invertible isometry operator と $\mathbb{R}$との距離は1であることがわかる.

次に reductivity と polar decomposition との関係について考えてみる。

<u>補題</u>. $A \in \mathbb{R}$ としその polar decomposition を $A = UP$ とする. そうすれば sub-space $\mathfrak{M} \subset H$ が存在して、$H = \mathfrak{M}^\perp \oplus \mathfrak{M}$ に関して

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表わされる. 但し、$\mathrm{Ker}\,A_1 = \mathrm{Ker}\,P_1 = \{0\}$, U_1 は unitary operator である.

証明. $\mathfrak{M} = \mathrm{Ker}\,A$ とおく. $A \in \mathbb{R}$ より $\mathfrak{M}$はAを reduce するから A の行列表現は左辺のようになる. 但し $A_1 = A|\mathfrak{M}^\perp$. ここで $A_1 = U_1P_1$ を $\mathfrak{M}^\perp$ における polar decomposition とする. $\mathrm{Ker}\,A_1 = \{0\}$であるから decomposition の定義より $\mathrm{Ker}\,U_1 = \mathrm{Ker}\,P_1$

$=\{0\}$ である．更に A_1 が reductive であるから $\mathrm{Ker}\,A_1^*=\mathrm{Ker}\,A_1$ 従って $\mathrm{Ker}\,U_1^*=\{0\}$ となる．partial isometry で．$\mathrm{Ker}\,U_1=\mathrm{Ker}\,U_1^*=\{0\}$ であるから U_1 は unitary operator である．次に $U_1\oplus O=U$, $P_1\oplus O=P$ を示せばよい．$U_1\oplus O$ は partial isometry であり，$P_1\oplus O$ は positive でありその上 $\mathrm{Ker}\,U_1=\mathrm{Ker}\,P_1$ より $\mathrm{Ker}(U_1\oplus O)=\mathrm{Ker}(P_1\oplus O)$ である従って polar decomposition の一意性より $U=U_1\oplus O$, $P=P_1\oplus O$ が成立つことがわかる。

定理． $A\in\mathbb{R}$ で．$\mathrm{Ker}\,A=\{0\}$ とし．polar decomposition を $A=UP$ とするならば $\mathrm{Lat}\,A\subset\mathrm{Lat}\,U^*\cap\mathrm{Lat}\,P$ が成立つ．

証明． $A\in\mathbb{R}$ 及び 1-1 より U は unitary かつ P は 1-1 となる．任意の $\mathfrak{M}\in\mathrm{Lat}\,A$ に対して $A^*\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ であるから $A^*A=P^2$ で $\mathfrak{M}$ は invariant になる．ところで $\mathrm{Lat}\,P^2\subset\mathrm{Lat}\,P$ であるから $\mathfrak{M}\in\mathrm{Lat}\,P$ がいえる．次に任意の $f\in\mathfrak{M}$ に対して $U^*f=g+h$, $g\in\mathfrak{M}$, $h\in\mathfrak{M}^\perp$ とする．$A\in\mathbb{R}$ より $A^*f\in\mathfrak{M}$ 即ち $A^*f=PU^*f=Pg+Ph\in\mathfrak{M}$．しかも $P^*=P$ より $Pg\in\mathfrak{M}$, $Ph\in\mathfrak{M}^\perp$ であり、更に $Pg+Ph\in\mathfrak{M}$ であったから $Ph=0$ となる．P は 1-1 より $h=0$、即ち $U^*f\in\mathfrak{M}$ が得られる。

この定理は実はもっと強い形で成立つのである．

定理． $A\in B(H)$ で，polar decomposition を $A=UP$ とするとき．次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i) $A\in\mathbb{R}$,

(ii) $\mathrm{Lat}\,A \subset \mathrm{Lat}\,U^* \cap \mathrm{Lat}\,P$,

(iii) $\mathrm{Lat}\,A = \mathrm{Lat}\,U \cap \mathrm{Lat}\,U^* \cap \mathrm{Lat}\,P$.

証明. (i)⇒(ii) 今Qを $\mathrm{Lat}\,A$ に属する sub-space への projection とする. $A \in \mathbb{R}$ より $AQ = QA$ である. $f \in \mathrm{Ker}\,A$ に対して $AQf = QAf = 0$ であるから $Qf \in \mathrm{Ker}\,A$ となる. ここで $\mathfrak{M} = \mathrm{Ker}\,A$ とおくならば, $\mathfrak{M}$ 及び $\mathfrak{M}^\perp \in \mathrm{Lat}\,Q$ となる. $A_1 = A|\mathfrak{M}^\perp$ とし, $A_1 = U_1P_1$ とする.(補題をみよ). そして $\mathfrak{N} \in \mathrm{Lat}\,A$ で $QH = \mathfrak{N}$ としておく. $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2$, 但し $\mathfrak{N}_1 \in \mathfrak{M}^\perp$ かつ $\mathfrak{N}_2 \in \mathfrak{M}$ と表わせる. 前定理より $\mathfrak{N}_1 \in \mathrm{Lat}\,U_1^* \cap \mathrm{Lat}\,P_1$ である. よって $\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2$ は $U^* = U_1^* \oplus 0$ 及び $P = P_1 \oplus 0$ で invariant である. 即ち $\mathrm{Lat}\,A \subset \mathrm{Lat}\,U^* \cap \mathrm{Lat}\,P$ がいえた。

(ii)⇒(i). sub-space がAで invariant であれば, 仮定より U^* 及び Pで invariant である. 従って $A^* = PU^*$ で invariant となる. 即ち $A \in \mathbb{R}$ である。

(iii)⇒(ii) 明らか。

(i)又は(ii)⇒(iii) (ii)から出発して $\mathrm{Lat}\,A$に属する space の orthogonal complement を考えることにより $\mathrm{Lat}\,A^* \subset \mathrm{Lat}\,U \cap \mathrm{Lat}\,P$ を得る. (i)により $\mathrm{Lat}\,A = \mathrm{Lat}\,A^*$ であるから $\mathrm{Lat}\,A \subset \mathrm{Lat}\,U \cap \mathrm{Lat}\,U^* \cap \mathrm{Lat}\,P$ を得る. 次に U及びP で invariant であれば A で invariant になるから $\mathrm{Lat}\,A =$

Lat $\mathcal{U}$ ∩ Lat $\mathcal{U}^*$ ∩ Lat P が得られる。

§2. reductive operator が normal となる十分条件

operator $A, B \in B(H)$ に対して，1対1 かつ dense range をもつような operator X, Y が存在して，$AX = XB$ 及び $YA = BY$ が成立つとき，A と B は quasi-similar であるという．この quasi-similarity と hyperinvariant sub-space に関しては，次の定理が成立つ．（Sz.-Nagy, C. Foiaş: c.f. [9, 11, 13]）．

定理．A と B が quasi-similar であるとする．もし A が自明でない hyper-invariant sub-space を持つならば，B も又自明でない hyper-invariant sub-space を持つ．

更に V. Lomonosov により次の定理が証明された．（もとの論文[7]では注に書いてある）（c.f. [7, 11, 13]）．

定理．non-zero な compact operator と可換な non-scalar operator $A \in B(H)$ は自明でない hyper-invariant sub-space を持つ．

ここで $\leftrightarrow$ で可換，$\sim$ で quasi-similar を表わすならば，上に示した2つの定理を考慮することにより次のような diagram を考えることができる．

$$K(\neq 0) \longleftrightarrow A(\neq \lambda I) \sim B \longleftrightarrow C$$

$C \in B(H)$ が自明でない invariant sub-space をもつことがわかる．K が non-zero compact operator という条件のもとで動いたとき，

Cは B(H) の中でどんな集合を作るか？ これが解ければよいのですが今のところよく解らない．しかしながら quasi-similar という概念は重要な働きをしていることがわかる．しかし unbounded operator を仲立ちにしているので割りと取り扱い難い．最近 similar な operator に関してはいくつかの結果が得られている（例えば L.A.Fialkow, D.A.Herrero 等）．

以下において quasi-similarity と normality に関連して，H.Radjavi, P.Rosenthal [13] (p.197) にある問題に対して，C.K.Fong [4] が肯定的に解決を与えた。

<u>定理.</u> normal operator と quasi-similar な operator のすべての hyper-invariant sub-space が reducing なら，その operator は normal である．

証明． normal operator を N とし，これと quasi-similar な operator を $T \in B(H)$ とする．1対1かつ dense range を持つような X, Y なる operator が存在して $TX = XN$ 及び $NY = YT$ が成り立っているわけである．N の spectral measure を E としておく．任意の Borel set σ に対して $E(\sigma)H$ は N の hyper-invariant sub-space となる．ここで $\mathcal{L}$ を N の hyper-invariant sub-space としたとき，$g(\mathcal{L}) = \vee \{ \overline{AX\mathcal{L}} : AT = TA \}$ とおくならば次のことが成立することが示される（see [9 : chap II §5]）．

(i) $g(\mathcal{L})$ は T の hyper-invariant sub-space になっている．

(ii) $\overline{\mathcal{Y}\mathfrak{g}(\mathcal{L})} = \mathcal{L}$,

(iii) $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ ならば $\mathfrak{g}(\mathcal{L}) \subset \mathfrak{g}(\mathcal{L}')$ である,

(iv) $\bigvee_\alpha \mathfrak{g}(\mathcal{L}_\alpha) = \mathfrak{g}(\bigvee_\alpha \mathcal{L}_\alpha)$,

(v) $\mathfrak{g}(\{0\}) = \{0\}$, $\mathfrak{g}(H) = H$.

定理の仮定と(i)より $\mathfrak{g}(\mathcal{L})$ が T を reduce することがわかる. ここで $P = P_{\mathfrak{g}(\mathcal{L})}$, $Q = P_{\mathfrak{g}(\mathcal{L}^\perp)}$ なる orthogonal projection P, Q を定義する. reducing より $TP = PT$ が得られる. ところで $\mathfrak{g}(\mathcal{L}^\perp)$ は T で hyperinvariant であるから P で invariant である即ち $QPQ = PQ$. 従って $PQ = QP$ である. 他方(ii)より

$$\overline{\mathcal{Y}\mathfrak{g}(\mathcal{L})} \cap \overline{\mathcal{Y}\mathfrak{g}(\mathcal{L}^\perp)} = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp = \{0\}.$$

ゆえに $\mathfrak{g}(\mathcal{L}) \cap \mathfrak{g}(\mathcal{L}^\perp) = \{0\}$ である. また次の関係

$$\overline{\mathfrak{g}(\mathcal{L}) + \mathfrak{g}(\mathcal{L}^\perp)} \supset \overline{X\mathcal{L} + X\mathcal{L}^\perp} = \overline{X(\mathcal{L}+\mathcal{L}^\perp)} = H$$

が成り立つから $P = I - Q$ 、あるいは $\mathfrak{g}(\mathcal{L}^\perp) = \mathfrak{g}(\mathcal{L})^\perp$ であることがわかった. 任意の Borel set σ, τ , $\sigma \cap \tau = \phi$ に対しては $E(\sigma)H \perp E(\tau)H$ 又は $E(\sigma)H \subset \{E(\tau)H\}^\perp$ であるから (ii)より $\mathfrak{g}(E(\sigma)H) \subset \mathfrak{g}(\{E(\tau)H\}^\perp) = \mathfrak{g}(E(\tau)H)^\perp$ 即ち $\mathfrak{g}(E(\sigma)H) \perp \mathfrak{g}(E(\tau)H)$ である. ここで任意の Borel set σ に対して

$$F(\sigma) = P_{\mathfrak{g}(E(\sigma)H)}$$

とおく. $\sigma \cap \tau = \phi$ ならば $F(\sigma)F(\tau) = F(\tau)F(\sigma) = 0$ であり, (i), (v)より F が spectral measure になることがわかる. ここで

$$M = \int z \, dF_z$$

により normal operator M を定義する．T と M が一致することを示せばよい．そのためにまず $E(\sigma)Y = YF(\sigma)$ を示す．(ii)より $\overline{YF(\sigma)H} = E(\sigma)H$ が成立する．ここで $F(\sigma)y = y$ なる y は $F(\sigma)H$ に属する．従って $Yy \in E(\sigma)H$ ゆえに $E(\sigma)Yy = Yy = YF(\sigma)y$ である．次に $F(\sigma)y = 0$ なる y は $F(\sigma^c)y$ と一致し，$\overline{YF(\sigma^c)H} = E(\sigma^c)H$ を考慮すれば $E(\sigma^c)Yy = Yy$ or $E(\sigma)Yy = 0$ となる．以上より任意の $y \in H$ に対して $E(\sigma)Yy = YF(\sigma)y$ 即ち $E(\sigma)Y = YF(\sigma)$ が得られる．また $E(\sigma) = 0$ と $F(\sigma) = 0$ は同値であるから N と M は同じ spectrum を持つ．その spectrum 上 $|f(z) - z|$ が十分小さくなるような step function を f とする．そうすれば $\|f(N) - N\|$ 及び $\|f(M) - M\|$ 両方とも small でありしかも $f(N)Y = Yf(M)$ が成り立つ．従って $NY = YM$ 即ち $YT = YM$ である．ところで Y は1対1であるから $M = T$ となり，T が normal operator であることが示された．

最後に invariant subspace の問題と同値な命題を1つ述べておくことにする．(H. Radjavi, P. Rosenthal [12], T.P. Wiggen [16]).

<u>定理</u>. 次の (i), (ii) は同値である．

(i) A が reductive operator であるならば normal である．

(ii) A が reductive operator であれば $A \oplus A$ も reductive operator（$H \oplus H$上の）である．

証明．(i)⇒(ii)：AとIにより生成されるweakly closed algebraを$W(A)$とおく．$W(A)$がstar-algebraであれば$W(A \oplus A)$もstar-algebraになるからSarasonの定理[15]より(i)⇒(ii)の成り立つことわかる．

(ii)⇒(i)：$\mathfrak{M}$をAのgraphとする．即ち$\mathfrak{M} = \{x \oplus Ax ; x \in H\}$とおけば$\mathfrak{M}$は$A \oplus A$でinvariantになる．従って$A \oplus A$がreductiveならば$(A^* \oplus A^*)(x \oplus Ax) = A^*x \oplus A^*Ax \in \mathfrak{M}$が任意の$x \in H$に対して成り立つから$A^*Ax = AA^*x$が得られ，$A$がnormalであることわかる．

参考文献

[1] T. Andô, Note on invariant subspaces of a compact normal operator, Arch. Math., 14(1963), 337-340

[2] E. A. Azoff & F. Gilfeather, Measurable choice and the invariant subspace problem, Bull. AMS, 80(1974), 893-895

[3] J. A. Dyer, E. A. Pedersen & P. Porcelli, An equivalent formulation of the invariant subspace conjecture, Bull. AMS, 78(1972), 1020-1023

[4] C. K. Fong, A sufficient condition that an operator be normal, Michigan Math. J., 21(1974), 161-162

[5] P. R. Halmos, Irreducible operators, Michigan Math. J., 15(1968), 215-223

[6] K. Kitano, Some conditions on a reductive operator implying normality or spectrality, (to appear)

[7] V. Lomonosov, On invariant subspace of families of operators commuting with a compact operator, Fankcional. Anal. i

Prilozen, 7(1973), 55-56

[8] R. L. Moore, Properties of reductive operators, (preprint)

[9] B. Sz.-Nagy & C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North-Holland, Amsterdam, 1970

[10] E. Nordgren, H. Radjavi & P. Rosenthal, On operators with reducing invariant subspaces, (to appear)

[11] C. Pearcy & A. Shields, A survey of the Lomonosov technique in the theory of invariant subspaces, Math. Surveys, 13, Amer. Math. Soc., 1974

[12] H. Radjavi & P. Rosenthal, A Sufficient condition that an operator algebra be selfadjoint, Canad. J. Math., 23(1971), 588-597

[13] H. Radjavi & P. Rosenthal, Invariant subspaces, Springer-Verlag, New-York, 1973

[14] T. Saitô, Some remarks on Andô's theorem, Tohoku Math. J., 18(1966), 404-409

[15] D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pacific J. Math., 17(1966), 511-517

[16] T. P. Wiggen, On direct sums of reductive operators, Proc. AMS, 45(1974), 313-314