数理解析研究所講究録
256巻 1975年 78-96



# Similarity of Operators

東北大 教養　齋藤 偵四郎

§1. 以下考えるのはすべて Hilbert space 上の bounded linear operators で，単に operators と呼ぶことにする．Hilbert space $H$ 上の operators 全体を $B(H)$ と書く．operator $T \in B(H)$ に対して，その spectrum を $\sigma(T)$，その numerical range を $W(T)$ で表わし，$W(T)$ の closure を $\overline{W}(T)$ と書くことにする．operators $A, B \in B(H)$ に対して，

$$\exists X \in B(H) \text{ invertible} : B = X^{-1} A X$$

のとき，$A$ と $B$ は similar であるという．また，

$$\exists X \in B(H) \text{ invertible} : B = X A X^*$$

のとき，$A$ と $B$ は congruent であるという．$U \in B(H)$ を unitary operator とするとき，$U$ が cramped であるとは，

$$\exists \theta_0 : \sigma(U) \subset \{ e^{i\theta} : \theta_0 < \theta < \theta_0 + \pi \}$$

のときである．operator $T \in B(H)$ が

$$\|T\| = r(T) \ (= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}).$$

を満たすとき normaloid，

$$\overline{W}(T) = \mathrm{co}\,\sigma(T) \ (= \text{the convex hull of } \sigma(T))$$

のとき convexoid であると言う．

operators の similarity の研究の1つの発端となったのは，次の Beck-Putnam-Berberian の結果である．

定理 A. operator $T \in B(H)$ に対して cramped unitary operator $U \in B(H)$ が存在して，

$$U^{-1}TU = T^*$$

ならば，$T$ は self-adjoint operator である．

この定理に関連して，次の問題が考えられた [11], [9], [4], [2], [8].

問題 1. $T, S \in B(H)$, $0 \notin \overline{W}(S)$ で

$$S^{-1}TS = T^*$$

のとき，$T$ の self-adjoint 性についてどんな情報が得られるか．$0 \notin \overline{W}(S)$ を $0 \notin \sigma(S)$ でおきかえられるか．

問題 2. $T, S \in B(H)$, $T$ が invertible, $0 \notin \overline{W}(S)$ で

$$S^{-1}T^{-1}S = T^*$$

のとき，$T$ の unitary 性についてどんな情報が得られるか．また，$0 \notin \overline{W}(S)$ を $0 \notin \sigma(S)$ でおきかえられないか．

後で述べる様に，次の3条件は同値である（定理 2）．

(1) $T \in B(H)$ は self-adjoint operator と similar.

(2) $T = PA$, $P \geq 0$ invertible, $A$ self-adjoint.

(3) $S^{-1}TS = T^*$, $0 \notin \overline{W}(S)$.

上の (2) の性質が invariant subspace の問題に関係することは，次の Radjavi－Rosenthal [5] の結果から分る．

定理 B. $T \in B(H)$, $T \neq \lambda I$ が positive operator と self-adjoint operator の積であれば，T は non-trivial hyperinvariant subspace を持つ．

これに関連して，次の問題がおこる．

問題 3. $T \in B(H)$ が $T^*$ と similar であることと，T が 2 つの self-adjoint operators の積に書けることとの間の関係についてはどんな情報が得られるか．

これについては，次の予想がある [6].

問題 4. 次の予想は正しいか： invertible operator $T \in B(H)$ が 2 つの self-adjoint operators の積となる必要十分条件は T と $T^*$ が similar なることである．

関連して，T と $T^*$ の similarity を T と $T^{-1}$ の（または $T^{-1}$ と $T^*$ の） similarity に代えたらどうなるか．また，similarity を unitary equivalence に代えたらどうか，という問題もおこる．

ここでは，これらの問題に関する Williams [11] 以後の

諸結果について述べる.

§2. 問題1, 2に関して Williams [11] とその他の人々によって得られた結果は, 次の定理に含まれる.

定理 1 [9] (see [8]). $B(H)$ 上の linear transformation $J$ が

$$J(X^*) = J(X)^* \quad \text{for } X \in B(H)$$

を満たし, 更に

$$\exists\, S \in B(H) : \ 0 \notin \overline{W}(S),\ J(S) = 0$$

であれば,

$$\exists\, P \geq 0 \text{ invertible} : J(P) = 0 .$$

証明. $0 \notin \overline{W}(S)$, $J(S) = 0$ とする. $\overline{W}(S)$ は convex であるから, 必要があれば $S$ を $e^{i\theta}S$ でおきかえて

$$\overline{W}(S) \subset \{z : \operatorname{Re} z \geq \varepsilon\},\ \varepsilon > 0$$

と仮定してよい. このとき, $P = (S + S^*)/2$ とおけば,

$$\overline{W}(P) = \operatorname{Re} \overline{W}(S) \subset \{z \in \mathbb{R} : z \geq \varepsilon\} .$$

故に $P$ は positive, invertible で

$$J(P) = \{J(S) + J(S^*)\}/2 = 0 .$$

系 1.1. [7], [11] $T$, $S \in B(H)$ で

$$S^{-1} T S = T^*,\ 0 \notin \overline{W}(S)$$

ならば, $T$ は self-adjoint operator と similar である. 従って, $T$ が convexoid であれば

$$S^{-1}TS = T^*,\ 0 \notin \bar{W}(S) \Rightarrow T \text{ は self-adjoint}$$

が成り立つ.

証明. $J(X) = i(TX - XT^*)$ for $X \in B(H)$ は定理1の仮定をみたす. 故に

$\exists P \geq 0$ invertible : $J(P) = 0$ (i.e. $TP = PT^*$)

いま, $P^{-1/2}TP^{1/2} = P^{1/2}T^*P^{-1/2}$ とおけば, これはTとsimilarな self-adjoint operator である.

Tが convexoid で $S^{-1}TS = T^*$, $0 \notin \bar{W}(S)$ であれば,

$$\bar{W}(T) = \mathrm{co}\,\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$$

であるから, Tは self-adjoint operator である.

注意 (1) 系1.1の逆が成り立つ.

(2) 系1.1で $0 \notin \bar{W}(S)$ を $0 \notin \sigma(S)$ でおきかえることは出来ない.

(3) 系1.1でTに条件がなければ, Tの self-adjoint 性は保障されない.

系1.2.[8]. $T, S \in B(H)$ で

$$T^*ST = S,\ 0 \notin \bar{W}(S)$$

ならば, Tは isometry と similar である.

証明. $J(X) = T^*XT - X$ for $X \in B(H)$ は定理1の仮定をみたす. 故に

$$\exists P \geq 0 \text{ invertible};\ T^*PT = P$$

$V = P^{1/2} T P^{-1/2}$ とおけば，$V$ は isometry で $T$ と similar である．

上の系の特別の場合として

系 1．3．[4]，[9] (see [8])　(i) $T \in B(H)$ が left inverse $T_1$ をもち

$$S^{-1} T_1 S = T^*, \quad 0 \notin \overline{W}(S)$$

ならば，$T$ は isometry と similar である．

(ii)　$T \in B(H)$ が invertible で

$$S^{-1} T^{-1} S = T^*, \quad 0 \notin \overline{W}(S)$$

ならば，$T$ は unitary operator と similar である．

注意　(1)　系 1．3 の逆が成り立つ．

(2)　系 1．3 で $0 \notin \overline{W}(S)$ を $0 \notin \sigma(S)$ でおきかえることは出来ない．

ここで，問題 2 のあとで述べた結果を証明しておこう．

定理　2．[6]　$T \in B(H)$ について，次の 3 つの命題は同値である．

(1)　$T$ は self-adjoint operator と similar である．

(2)　$T = PA$，$P \geqq 0$ invertible，$A$ self-adjoint．

(3)　$\exists S$ ; $S^{-1} T S = T^*$，$0 \notin \overline{W}(S)$．

証明　(1) $\Leftrightarrow$ (3) は系 1．1 とその後の注意による。

(2) $\Rightarrow$ (3)　殆んど明らかである．

(3) ⇒ (2)　$S^{-1}TS = T^*$, $0 \notin \overline{W}(S)$ とすると，系 1.1 の証明から

$$\exists P \geqq 0 \text{ invertible} : TP = PT^*$$

このとき $P^{-1}T = T^*P^{-1}$ でこれは self-adjoint である．かつ，$T = P(P^{-1}T)$.

系 1.2，1.3 において $T$ が実際に isometry（または unitary）となるための $T$ または $S$ の条件は何かという問題が起る．これについての 1 つの解答は

定理　3 [4]．$T \in B(H)$ が left inverse $T_1$ を持ち，$T$ と $T_1$ が共に normaloid であるとする．もし

$$T^* = S^{-1}T_1S, \quad 0 \notin \overline{W}(S)$$

ならば，$T$ は isometry である．

これは次の補題を使えば容易に分る．

補題　1．$A, B, S \in B(H)$ で $p$ を正整数とする．$\lambda$, $\mu$ を夫々 $A$, $B$ の approximate eigenvalues で共通の approximate eigenvectors を持つとする．もし

$$S^{-1}B^pS = A^*, \quad 0 \notin \overline{W}(S)$$

であれば，$\bar{\lambda} = \mu^p$ が成り立つ．

補題　2．$T \in B(H)$ が left inverse $T_1$ を持ち

$$T^* = S^{-1}T_1^pS, \quad 0 \notin \overline{W}(S)$$

であれば，$\sigma(T)$ の non-zero boundary point は unit circleの上に横たわる.

いずれの補題も[4]の議論を用いればよいので証明は省略する.

定理3の証明. 補題2より, $r(T) = r(T_1) = 1$. $T_1$, $T$は共にnormaloidであるから $\|T_1\| = \|T\| = 1$.

$\therefore \|x\| = \|T_1 T x\| \leqq \|Tx\| \leqq \|x\|$, $\|Tx\| = \|x\|$ $(x \in H)$.

注意. 上の定理で, $T_1$ のnormaloid性を落すことはできない[4].

また, 次の定理が成り立つ.

定理 4[2]. $T \in B(H)$ がinvertibleで

$$S^{-1} T^{-1} S = T^*, \quad 0 \notin \overline{W}(S)$$

とする. (1) $T$はconvexoidまたはnormaloid (2) $T^{-1}$はconvexoidまたはnormaloidならば, $T$はunitary operatorである.

証明. 系1, 3より$T$はunitary operatorとsimilar, 従って $r(T) = 1$である. $T$がconvexoidならば,

$$\overline{W}(T) \subseteq \{z : |z| \leqq 1\},$$

$T$がnormaloidならば, $\|T\| = r(T) = 1$, 従って

$$\overline{W}(T) \subseteq \{z : |z| \leqq 1\}.$$

$T^{-1}$もunitaryとsimilarであるから, 上と同様にして

$$\overline{W}(T^{-1}) \subseteq \{z : |z| \leqq 1\}.$$

故に，次の Stampfli の結果 [10] の特別の場合から，T は unitary である．

補題 3．　$T \in B(H)$ が $\sigma(T) \subseteq \{z : |z| = 1\}$ で，

$$W(T),\ W(T^{-1}) \subseteq \{z : |z| \leqq 1\}$$

ならば，T は unitary である．

この結果に関連して，次のことは予想するのはそれ程不自然ではないと思う；$T \in B(H)$ が left inverse $T_1$ を持ち，$\bar{W}(T) \subseteq \{z : |z| \leqq 1\}$，$\|T_1\| \leqq 1$ ならば T は unitary である．

系 4．1．　$T \in B(H)$ が left inverse $T_1$ を持ち，$T^*$ または $T_1$ が paranormal(*) とする．もし

$$S^{-1} T_1 S = T^*,\quad 0 \notin \bar{W}(S)$$

ならば，T は unitary である．

証明．　一般に right invertible paranormal operator は invertible であることが簡単に分る．従って $T^*$ または $T_1$ が paranormal の時は，T が invertible で $T^{-1} = T_1$ である．paranormal operator の inverse がまた paranormal であるから，いずれの場合も $T, T^{-1}$ が normaloid である．故に定理 4 から T は unitary である．

(*)　$A \in B(H)$ が $\|Ax\|^2 \leqq \|A^2 x\|\,\|x\|$，$x \in H$ を満たす時，A を paranormal operator という．

次の結果は定理Aに対応する．

定理 5 [9]．$T \in B(H)$ が invertible，$U \in B(H)$ が cramped unitary operator で

$$U^{-1}T^{-1}U = T^*$$

ならば，T は unitary である．

証明．$T = VP$ を polar decomposition とする．ここで，V は unitary，P は positive invertible とする．

$$T^* = U^{-1}T^{-1}U, \quad 0 \notin \overline{W}(U)$$

であるから

$$T^* = PV^{-1} = U^{-1}(VP)^{-1}U = (U^{-1}P^{-1}U)(U^{-1}V^{-1}U).$$

polar decomposition の一意性から，

$$P = U^{-1}P^{-1}U, \quad 0 \notin \overline{W}(U).$$

$P^{-1}$ は self-adjoint であるから，系4．1より P は unitary である．一方 $P \geqq 0$ であるから，$P = I$，従って $T = V$，unitary である．

§3．系1．3の1つの一般化について述べておく．

定理 6 [4] (see [8])．$T \in B(H)$ が left inverse $T_1$ を持ち，positive integer p に対して

$$T^* = S^{-1}T_1^pS, \quad 0 \notin \overline{W}(S), \quad S \text{ self-adjoint}$$

であるとする．この時，T は isometry と similar である．特に，$T_1 = T^{-1}$ のときは T は unitary と similar である．

証明. $p=1$ の時は系1.3であるから, $p \geq 2$ とする. $S$ は positive, invertible と仮定してよい. この時,

$$A = S^{-1/2} T S^{1/2}, \quad B = S^{-1/2} T_1 S^{1/2}$$

とおけば, $BA = S^{-1/2} T_1 T S^{1/2} = I$. また

$$A^* = S^{1/2} T^* S^{-1/2} = S^{1/2}(S^{-1} T_1{}^p S) S^{-1/2} = (S^{-1/2} T_1 S^{1/2})^p$$
$$= B^p$$

$$\therefore \quad A^*A = B^p A = B^{p-1} BA = B^{p-1}$$

故に, $B^{p-1}$ は self-adjoint で,

$$I = B^{p-1} A^{p-1} = A^{*p-1} B^{p-1},$$

$$A^{p-1} = (A^{*p-1} B^{p-1}) A^{p-1} = A^{*p-1}(B^{p-1} A^{p-1}) = A^{*p-1}.$$

すなわち, $A^{p-1}$ は self-adjoint invertible で, $(A^{p-1})^{-1} = B^{p-1}$, 従って $A$ は invertible で

$$B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = A^{-1}$$

$$A^* = B^p = A^{-p},$$

$$A^*A = A^{-p}A = AA^{-p} = AA^*, \quad A \text{ normal}.$$

$$\therefore \quad r(A) = \|A\| = \|A^*\| = \|A^{-p}\| = \|A^{-1}\|^p.$$

補題2より, $\sigma(T) \subset \{z : |z| \leq 1\}$, $r(T) = 1$ である.

$$\therefore \quad \sigma(A) \subset \{z : |z| \leq 1\}, \quad r(A) = 1.$$

$$\therefore \quad \|A\| = \|A^{-1}\|^p = 1, \quad \|A\| = \|A^{-1}\| = 1.$$

故に $A$ は $T$ と similar な unitary operator である.

系6.1. 定理6において, $p \geq 2$ でかつ $T$ が paranormal であれば, $T$ は unitary である.

証明. 定理6の証明において $A = S^{-1/2} T S^{1/2}$ は unitary であるから, $\sigma(T) \subset \{z : |z| = 1\}$ である. paranormal operator で spectrum が unit circle 上に横って いるときは unitary である (see [3]) から, $T$ は unitary である.

注意. $p = 1$ の時, 系6.1 が成り立つかどうかは恐らくまだ知られていない. (系4.1 参照)

§4. similarity と operator の factorization の関係について, 若干の結果を述べる.

定理 7 [6] (see [1]). (i) operator $T \in B(H)$ が adjoint $T^*$ と unitary 同値であるための必要十分条件は

$$T = JA, \quad J \text{ symmetry}, \quad A \text{ self-adjoint}$$

となることである.

(ii) invertible operator $T \in B(H)$ が $T^{-1}$ と unitary 同値であるための必要十分条件は

$$T = JV, \quad J \text{ symmetry}, \quad V \text{ involutory}$$

となることである. ここで $V$ が involutory であるとは $V = V^{-1}$ となることである.

証明. ($\Leftarrow$) $T = JA$, $J = J^* = J^{-1}$, $A = A^*$ とすると

$$JTJ = AJ = T^*$$

$T = JV$, $J = J^* = J^{-1}$, $V = V^{-1}$ とすると,

$$JTJ = VJ = V^{-1}J^{-1} = T^{-1}$$

で (i), (ii) とも十分性は明らか.

(⇒) $TU = UT^*$ (resp. $TU = UT^{-1}$), $U$ unitary と仮定すると, Fuglede の定理で

$$TU^* = U^*T^* \quad (\text{resp. } TU^* = U^*T^{-1})$$

$$\therefore \quad T^*U = UT \quad (\text{resp. } T^{-1}U = UT).$$

故に,

$$TU^2 = (TU)U = \begin{Bmatrix} UT^*U \\ UT^{-1}U \end{Bmatrix} = U^2T$$

$U^2$ のスペクトル表現 $U^2 = \int e^{i\theta} dE_\theta$ を考え,

$$V = \int e^{i\theta/2} dE_\theta$$

とおけば, $V$ は unitary operator で

$$V^2 = U^2, \quad VU = UV, \quad VT = TV.$$

このとき, $J = V^{-1}U$ とおけば

$$J^* = U^{-1}V = VU^{-1} = V^{-1}U = J = J^{-1}$$

(i) $T^*U = UT$ より

$$(JT)^* = T^*J = T^*V^{-1}U = V^{-1}T^*U = V^{-1}UT = JT$$

で $JT$ は self-adjoint であり, $T = J(JT)$.

(ii) $T^{-1}U = UT$ より

$$(JT)^{-1} = T^{-1}J = T^{-1}V^{-1}U = V^{-1}T^{-1}U = V^{-1}UT = JT.$$

で $JT$ は involutory であり, $T = J(JT)$.

系7.1. (i) $T$ が $T^*$ と similar な normal operator ならば，$T$ は２つの self-adjoint operators の product

(ii) $T$ が $T^{-1}$ と similar な unitary operator ならば，$T$ は２つの symmetry の product.

証明. similar な normal operators は unitary 同値であるから (i) は定理7は明らか.

また (ii) のときは，定理7より

$$T = JV, \quad J = J^* = J^{-1}, \quad V = V^{-1}.$$

このとき，

$$T^{-1} = T^* = V^{-1}J^{-1} = VJ = (JV)^* = V^*J$$

$$\therefore \quad V^* = V^*JJ = VJJ = V, \quad V^* = V^{-1} = V.$$

$V$ も symmetry である.

系7.2.[6]. $S^{-1}TS = T^*$ で $S$ が normal operator と congruent ならば，$T$ は２つの self-adjoint operators の product である.

証明. $S = RNR^*$, $R$ invertible, $N$ normal とする. $T_0 = R^{-1}TR$ とおけば，$TS = ST^*$ より $T_0N = NT_0^*$. $N = UP$ を $N$ の polar decomposition とすると，$UP = PU$ であるから，$T_0N = NT_0^*$ より

$$(P^{-1/2}T_0P^{1/2})U = U(P^{-1/2}T_0P^{1/2})^*.$$

$U$ は unitary operator であるから，定理7より

$$P^{-1/2} T_0 P^{1/2} = A_1 B_1 \ ; \quad A_1, B_1 \text{ self-adjoint}.$$

故に，$T_0 = (P^{1/2} A_1 P^{1/2})(P^{-1/2} B_1 P^{-1/2})$ で，$P^{1/2} A_1 P^{1/2}$ および $P^{-1/2} B_1 P^{-1/2}$ は self-adjoint である．$R = VQ$ を polar decomposition とすると

$$T = R T_0 R^{-1} = VQ(P^{1/2} A_1 P^{1/2})(P^{-1/2} B_1 P^{-1/2}) Q^{-1} V^{-1}$$
$$= V(QP^{1/2} A_1 P^{1/2} Q) V^{-1} V (Q^{-1} P^{-1/2} B_1 P^{-1/2} Q^{-1}) V^{-1}.$$

$A = VQP^{1/2} A_1 P^{1/2} Q V^{-1}$，$B = VQ^{-1} P^{-1/2} B_1 P^{-1/2} Q^{-1} V^{-1}$ は共に self-adjoint operators である．

注意．いかなる invertible operator が normal operator と congruent となるかについては知られていない．

系 7．3．$S^{-1}TS = T^{-1}$ で $S$ が unitary operator と similar ならば，$T$ は 2 つの involutory operators の product である．

証明．系 7．2 の証明と殆んど同じであるから省略する．

系 7．4 [6]．$T^* = S^{-1}TS$ のとき，$S$ に関する次の條件は同値である．

(i) $ST = T^*S$　(ii) $S^2T = TS^2$　(iii) $S^*ST = TS^*S$

更に，上のいずれかが満たされれば，$T$ は 2 つの self-adjoint operators の積に書ける．

証明．(i)，(ii)，(iii) の同値性は簡単であるから，後の

部分を証明する．

$S=VP$ を $S$ の polar decomposition とする．ここで $V$ は unitary で $P$ は positive，invertible とする．

$S^*S=P^2$，$P^2T=TP^2$，$\therefore\ PT=TP$，$T^*P=PT^*$

$$\therefore\quad TVP=TS=ST^*=VPT^*=VT^*P$$

$P$ は invertible であるから

$$TV=VT^*,\quad V^{-1}TV=T^*$$

定理7より $T$ は symmetry と self-adjoint operator の積である．

注意．$S^{-1}TS=T^{-1}$ の場合に系7．4に対応するものはどうなるのかは完全には分らない．しかし，次のことは分る：$S^{-1}TS=T^{-1}$ の時 (i) $ST=T^{-1}S$ (ii) $S^2T=TS^2$ は同値で，そのいずれかが満されて $S$ が self-adjoint の時は $T$ は2つの involution の積である．

実際 (i)，(ii) の同値性は簡単に分る．また，上の条件がみたされて，$S$ が self-adjoint であれば，polar decomposition

$S=VP$，$V$ unitary，$P\geqq 0$ invertible

において

$$S=VP=PV^{-1}\ (=S^*)$$

$$P^2T=PV^{-1}VPT=S^2T=TS^2=TPV^{-1}VP=TP^2$$

$$\therefore\quad PT=TP,\quad T^{-1}P=PT^{-1}.$$

さて，$TS = TVP$, $ST^{-1} = VPT^{-1} = VT^{-1}P$ で $P \geqq 0$ は invertible であるから，

$$TVP = VT^{-1}P \Rightarrow TV = VT^{-1} \Rightarrow T^{-1} = V^{-1}TV.$$

故に，定理7より $T$ は symmetry と involutory の積である．

定理8 [6]．$T \in B(H)$ に関する次の条件は同値である．

(i) $T$ は2つの invertible self-adjoint operators の積である．

(ii) symmetry $J$ と positive invertible operator $P$ が存在して，$(PJP)^{-1}T(PJP) = T^*$

(iii) symmetry $J$ と positive invertible operator $P$ が存在して，$J(P^{-1}TP)J = (P^{-1}TP)^*$

(iv) invertible operator $R$ と normal operator $N$ が存在して，$(R^*NR)^{-1}T(R^*NR) = T^*$.

(v) ある invertible operator $S$ が存在して $S^{-1}TS$ はその adjoint と unitary 同値である．

証明　(iv) ⇐ (ii) ⇔ (iii) ⇒ (v) は明らかである．

(v) ⇒ (i) ：$S^{-1}TS$ と $(S^{-1}TS)^*$ が unitary 同値であれば，定理7より

$$\exists A, B \text{ self-adjoint} : S^{-1}TS = AB$$

$S = UP$ ($U$ unitary, $P \geqq 0$) を polar decomposition

とすると

$$T = SABS^{-1} = UPABP^{-1}U^{-1}$$
$$= (UPAPU^{-1})(UP^{-1}BP^{-1}U^{-1}),$$

で，$UPAPU^{-1}$，$UP^{-1}BP^{-1}U^{-1}$ は self-adjoint である．

(iv) $\Rightarrow$ (i)：系 7.2.

(i) $\Rightarrow$ (ii)：$T = AB$；$A$, $B$ self-adjoint invertible とする．$A = JP$, $P \geq 0$, $J$ symmetry を $A$ の polar decomposition とすると $JP = PJ$ で

$$(P^{1/2}JP^{1/2})^{-1}T(P^{1/2}JP^{1/2}) = A^{-1}TA = BA = T^*$$

注意．$U^{-1}T^{-1}U = T^*$ の場合に定理 7 に対応する結果はどうなるのかはまだ分っていない．

次の予想がある [1].

$T^*$, $T^{-1}$ が similar $\Leftrightarrow$ $\exists X$ invertible : $T = X^{*-1}X$

$T$, $T^{-1}$ が similar $\Leftrightarrow$ $T$ は 2 つの involutory operators の積.

# 参考文献

[1] Man-Duen Choi, Adjunction and inversion of invertible Hilbert-space operators, Indiana Univ. J. 23(1973), 413 - 419.

[2] C. R. DePrima, Remarks on " Operators with inverses similar to their adjoints ", Proc. Amer. Math. Soc. 43(1974), 478 - 480.

[3] V. Istraţescu, T. Saitô and T. Yoshino, On a class of operators, Tohoku Math. J. 18(1966), 410 - 413.

[4] S. M. Patel, Operators with left inverses similar to their adjoints, Proc. Amer. Math. Soc. 41(1973), 127 - 131.

[5] H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces for products of Hermitian operators, Proc. Amer. Math. Soc. 43(1974), 483 - 484.

[6] H. Radjavi and J. P. Williams, Products of self-adjoint operators, Michigan Math. J. 16(1969), 177 - 185.

[7] T. Saitô, Hyponormal operators and related topics, Lectures on Operator Algebras, Lecture Notes in Math. 247, Springer-Verlag, 1972.

[8] T. Saitô, On a theorem by S. M. Patel, to appear.

[9] U. N. Singh and Kanta mangla, Operators with inverses similar to their adjoints, Proc. Amer. Math. Soc. 38(1973), 258 - 260.

[10] J. G. Stampfli, Minimal range theorem for operators with their spectra, Pacific J. Math. 23(1967), 601 - 612.

[11] J. P. Williams, Operators similar to their adjoints, Proc. Amer. Math. Soc. 20(1969), 121 - 123.