

Humberger 型 moment problem と
Symmetric operators

宮城教育大 板垣 芳雄

中村 [6] によれば, 有界対称作用素のスペクトル分解定理の世に知られている証明の数は 20 以上におよびているといふ。そのうちでも古い方の一つに moment problem によるものがあり [7], 現代風に整理された証明法としては C^* -algebra の表現定理によるものがある。一方, 非有界対称作用素の分解定理の証明では, 近似有界作用素列の分解表示により, たり, Cayley 変換などを介して有界作用素の分解に帰着させる方式がよく知られている。他に有界作用素の場合の証明に合わせた直接証明も調べられているようで, また恒等作用素 I と, 自己共役作用素 T のレゾルベント $(T - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(T)$ から生成される C^* -algebra などの表現を考える証明法もあるが [1], そこには有界作用素のときには見えない興味ある問題がいろいろ見られるように思われる。その一例にちなうかと思ひ, この稿では, Humberger 型

moment problemの結果を用いてスペクトル分解定理の証明のまねごとができることを注意したい(§3)。

実は、有界作用素の場合も含めて、逆に、moment problemが対称作用素のスペクトル分解によって解かれ、その解の一意性は問題に現われる対称作用素の本質的自己共役性といいかえられただけで、まず §1 でそれを紹介しておく。むしろこの部分が主で、というのは、moment problemはいわば無限未知数の連立一次方程式で、当然のことながらその証明中での Hilbert space, symmetric operator の現われ所はいろいろと示唆に富むと考えられるからである。

§1. Hamburger 型 moment problem

$\mu(t)$ を実軸 \mathbb{R} 上の regular non-negative measure で $\int_{\mathbb{R}} |t|^i d\mu(t) < \infty$, $i=0, 1, 2, \dots$ をみたすものとする。

$$(1) \quad m_i = \int_{\mathbb{R}} t^i d\mu(t), \quad i=0, 1, 2, \dots$$

とおく

(2) 任意の有限個の複素数 $d_0, d_1, d_2, \dots, d_n$ に対し

$$\sum_{i,j} m_{i+j} d_i \bar{d}_j \geq 0$$

逆に、(2) をみたす数列 $\{m_i\}$ が与えられた (1) をみたす $\mu(t)$ が存在するか、というのが Hamburger 型 moment

problemで、答は「常に存在可なり。以下 self-adjoint operator のスペクトル分解を用いたその一証明法の概要 [2]。

ℓ_F を有限項を除き全て 0 であるような複素数列 $\{d_i\}$ 全体からなる線型空間とする。 $\ell_F =$

$$(3) \quad (\alpha, \beta) = \sum m_{ij} d_i \bar{\beta}_j, \quad \alpha = \{d_i\}, \beta = \{\beta_i\}$$

で sesqui-linear form を定義する。

条件 (2) より Schwarz の不等式

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|, \quad \|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

が成立し、従って

$$l_0 = \{\alpha \in \ell_F : \|\alpha\| = 0\}$$

は linear subspace である。通常のように quotient space ℓ_F/l_0 の completion として Hilbert space H を定義する。

また ℓ_F 上の (shift) operator

$$T\{d_i\} = \{\beta_i\}, \quad \beta_0 = 0, \beta_{i+1} = d_i$$

は $(T\alpha, \beta) = (\alpha, T\beta)$ をみたし、よって $Tl_0 \subset l_0$ であるから自然に ℓ_F/l_0 上の symmetric operator \hat{T} を定義

する。以下内積等の記号は H 上にもこのまま流用することにする。

Lemma 1. \hat{T} は self-adjoint extension をもつ。

Proof. 任意の $\alpha \in \ell_F$ に対し、 $(T+iI)\alpha = (T-iI)\beta$ なる $\beta \in \ell_F$ が存在する。逆も同様、よって range に到達

§2. 関連事項

a) $\mu(\cdot)$ が一意であるための条件についてはいろいろの形で調べられている [8]. 例として十分条件として [3]

(Carleman)

$$\sum_{i=1}^{\infty} (m_{2i})^{-\frac{1}{2i}} = \infty$$

b) semi-norm (3) により $e_0, e_1 = (0, 1, 0, \dots), e_2 = \dots$ の Gram-Schmidt の直交化法により得られる orthonormal base に関して, T の operator による行列表現は対称な Jacobi 行列にたず:

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \\ & b_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a_k &= \frac{D_k'}{D_k} - \frac{D_{k-1}'}{D_{k-1}} \\ b_k &= \frac{\sqrt{D_{k-1} D_{k+1}}}{D_k} \end{aligned}$$

$T = T^*$

$$D_{-1} = 1, \quad D_k = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_k \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_k & m_{k+1} & \dots & m_{2k} \end{vmatrix}$$

$$D_{-i}' = 0, \quad D_0' = m_1, \quad D_k' = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_{k-1} & m_{k+1} \\ m_1 & m_2 & \dots & m_k & m_{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_k & m_{k+1} & \dots & m_{2k-1} & m_{2k+1} \end{vmatrix}$$

Proposition 3. $\text{supp } \mu(\cdot)$ is bounded $\Leftrightarrow \hat{T}$ is bounded operator $\Leftrightarrow \{a_k\}, \{b_k\}$ is bounded sequence

Proposition 4. $\text{supp } \mu$ が bounded で 集積点が 0 のみ
 である $\Leftrightarrow \hat{T}$ が compact operator

$$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0 \quad [5]$$

c) moment problem は次のように ϵ formulate される。
 可なり (1) の $\{m_i\}$ が与えられると $\omega = \omega$ は, \mathbb{R} 上の複
 素係数多項式の $*$ -algebra \mathcal{O}_0 , involution は $p(t) \mapsto \overline{p(t)}$,
 ω の positive linear functional φ が与えられると $\omega =$
 とである。 $\omega = \omega$ positivity (2) は

(4) 任意の $p(t) \in \mathcal{O}_0$ $\varphi(\overline{p(t)} p(t)) \geq 0$
 となる。 $\omega = \omega$ と $\omega = \omega$ の証明は \mathcal{O}_0 の φ に関する GNS-
 construction に他ならない, \mathcal{O}_0 の generator $p(t) \equiv t \in \mathcal{O}_0$
 ω operator が \hat{T} , $p(t) \equiv 1 \in \mathcal{O}_0$ に関するベクトルは cyclic
 vector e_0 である。

d) 2次元の場合の moment problem は $\{m_{i,j}\}$ が与
 えられる

$$(5) \quad m_{i,j} = \int_{\mathbb{R}^2} s^i t^j d\mu(s,t)$$

ある positive measure $\mu(s,t)$ の存在を問う $\omega = \omega$ となる。

2変数の多項式の可なり $*$ -algebra \mathcal{O}_0 上の linear functional
 φ が $\omega = \omega$ \mathbb{R}^2 上の

$$(6) \quad \text{任意の } p(s,t) \in \mathcal{O}_0 \quad \varphi(\overline{p(s,t)} p(s,t)) \geq 0$$

をみたせば, (5) の解 $\mu(\cdot)$ は存在可子か。

この答は否定的である。これは \mathbb{R}^2 上 $f(s, t) \geq 0$ であるが、有限個の多項式 p_i で $f(s, t) = \sum_i |p_i(s, t)|^2$ とは表わされない多項式 $f(s, t)$ が存在するからである [4]。

条件 (6) より真に強い。

$$(7) \quad \mathbb{R}^2 \text{ 上 } f(s, t) \geq 0 \quad \text{ならば} \quad \int f(s, t) \mu(s, t) \geq 0$$

なり = とか $\mu(\cdot)$ が存在するための必要十分条件になり。

e) 一般に、無限次元の場合、非可換 algebra の場合を研究されており、これは Wightman axiom の algebraic formulation を考える上でも自然に現われる問題のようである。(§4 に拡張例を記す。)

§3. スペクトル分解定理の証明 (部分的)

T を separable Hilbert space \mathcal{H} 上の self-adjoint operator, $\mathfrak{D} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}(T^i)$ とおくと

$$T^i x = \int_{\mathbb{R}} t^i dE_t x, \quad x \in \mathfrak{D}$$

は spectral measure E_t が存在する。

この moment problem の結果を用いて証明。任意の $x \in \mathfrak{D}$ に対し, $m_i = (T^i x, x)$ とおくと

$$\begin{aligned} \sum_{i, j=0}^n m_{i+j} d\alpha_j &= \sum_{i, j} (T^{i+j} x, x) d\alpha_j \\ &= \sum (\alpha_i T^i x, \alpha_j T^j x) \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i T^i x, \sum_{i=0}^n \alpha_i T^i x \right) \geq 0$$

よ、 \mathbb{R} 上の non-negative measure $\mu(\cdot, x)$ が存在し

$$(8) \quad (T^i x, x) = \int_{\mathbb{R}} t^i d\mu(t, x)$$

従、 \mathbb{R} 任意の多項式 $p(t) \in \mathbb{R}[t]$

$$(p(T)x, x) = \int_{\mathbb{R}} p(t) d\mu(t, x)$$

す、 \mathbb{C} の $\bar{x}_1 (\neq 0)$ をとる。 $\{p(T)x_1 : p \text{ は多項式}\}$

が \mathcal{H} で dense になるとき、 $\forall p \in \mathbb{R}[t] \quad (p(T)x_1, x_2) = 0$

とある 0 ではない $x_2 \in \mathcal{H}$ がとれる。故に T は self-adjoint で

あるから $x_2 \in \mathbb{C}$ 。また任意多項式 $q(t) \in \mathbb{R}[t]$

$$(p(T)x_1, q(T)x_2) = (q(T)^* p(T)x_1, x_2) = (\overline{q}(T) p(T)x_1, x_2) = 0.$$

次に、 $p(T)x_1$ と $q(T)x_2$ とを直交する $x_3 (\neq 0) \in \mathbb{C}$ をとる。

以下同様にして x_4, x_5, \dots をとる。作らねばならぬ有限個で

$\sum_i p_i(T)x_i$ と表わせた \bar{x} 全体 \mathbb{C}_0 は \mathcal{H} で dense である。

\mathbb{C}_0 の $\bar{x} = \sum_i p_i(T)x_i$, $y = \sum_i q_i(T)x_i \in \mathbb{R}[t]$ (8) で

定めた μ を用いて

$$\mu(t, x, y) = \sum p_i(t) \overline{q_i(t)} \mu(t, x_i)$$

と表すと

$$\begin{aligned} (p(T)x, y) &= \left(\sum_i p_i(T) p_i(T)x_i, \sum_i q_i(T)x_i \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} p(t) d\mu(t, x, y) \end{aligned}$$

しかして $\mu(\cdot, x, y)$ は \mathbb{C}_0 上 x, y による sesqui-linear

で、また $\mu(\cdot, x, x) = \mu(\cdot, x)$ は non-negative measure である。

よ, \mathbb{R} から

$$0 \leq \mu(\Omega, x, x) = \int_{\Omega} d\mu(t, x, x) \leq \int_{\mathbb{R}} d\mu(t, x, x) = \mu(\mathbb{R}, x, x) \\ = (x, x)$$

ゆえに $\mu(\Omega, x, y)$ は \mathcal{L} 上の continuous sesqui-linear form である。よ, \mathcal{L} は全体に拡張でき, ある positive operator $E(\Omega)$ により

$$\mu(\Omega, x, y) = (E(\Omega)x, y)$$

と書ける。

§ 4. 拡張された moment problem

\mathcal{J}_{2n} を $2n$ 変数の急減少無限回可微分関数の空間とする。

有限項を除き 0 であるような関数列

$$f = \{ f_0, f_1(x_1), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n), \dots \}$$

$$f \in \mathcal{L} \quad f_n(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{J}_{2n}, \quad x = (x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$$

全体からなる空間を考之, 通常のように \mathbb{R} から一倍, 和を定義する。この線形空間に, 次式により積と involution を導入する。

$$f \times g = \{ \dots, (f \times g)_n, \dots \}$$

$$(f \times g)_n = \sum_{i=0}^n f_i(x_1, \dots, x_i) g_{n-i}(x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$f^* = \{ \bar{f}_0, \overline{f_1(x_1)}, \dots, \overline{f_n(x_1, \dots, x_n)}, \dots \}$$

この "field algebra" に, 非負 2 重数列 $\{a_n\}$ により,

次の semi-norm により topology を導入する。

$$\|f\|_p = \sum_{n=0}^{\infty} \sup_x |f_n^{(d)}(x_1, \dots, x_n)| a_{np}$$

$$f_n^{(d)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq \alpha \leq d} |D^\alpha f_n(x_1, \dots, x_n)|$$

以下では $a_{np} = (np)^n$ とする。この $\{a_{np}\}$ により定まる topological space を Σ , その dual を Σ' と記すことにする。 Σ' の元 W は

$$W = \{W_0, W_1, \dots, W_n, \dots\}$$

$$W_n \in J'_{4n} \quad ; \quad \text{dual of } J_{4n}$$

と表わされ, f のとき の値は

$$W(f) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(f_n)$$

Σ は countably normed space であり, その dual は

$$\|W\|_p = \sup_n \frac{|W_n(f_n)|}{(a_{np})} < \infty$$

なる p 個の functional W 全体を Σ'_p とすれば

$$\Sigma' = \bigcup_{p=1}^{\infty} \Sigma'_p$$

である。

いま, Σ' の元 W が positive とする:

$$\begin{aligned} W(f \times f^*) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i \bar{f}_{n-i} \right) \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{n+m} (f_n \bar{f}_m) \geq 0, \quad \forall f \in \Sigma \end{aligned}$$

このとき, §1 の analogy で, $W_1 \rightarrow u$ 2 Hilbert space \mathcal{H} が構成され, 次の $T(f_1)$ から定義される \mathcal{H} 上の作用素 $\hat{T}(f_1)$ は self-adjoint extension をもつ。 $f_1(x)$ は実の関数として

$$T(f_1) f = f_1 \times f = \{0, f_1(x_1) f_0, \dots, f_1(x_1) f_n(x_2, \dots, x_n), \dots\}$$

$$f_1 = \{0, f_1(x), 0, \dots\}$$

例として, Cauchy problem

$$\frac{dw(t)}{dt} = i \overline{\hat{T}(f_1)} w(t), \quad w(0) = f \in \Sigma$$

の解の一意存在を示すことによつて

$\hat{T}(f_1)$ は essentially self-adjoint であることが証明される。

対応して, 一般化された moment problem は次のようになる。

実関数 f_1 上で定義された汎関数列 $\{W_n\}$ (Σ' の元) が与えられたとき

$$W_n(f_1) = W_n(f_n), \quad f_n = f_1(x_1) f_1(x_2) \cdots f_1(x_n)$$

どのような条件のもとで

$$W_n(f_1) = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu(t; f_1)$$

となる non-negative measure $\mu(\cdot; f_1)$ が存在するか?

先に述べたことから, $W = \{W_n\}$ が Σ 全体で positive

たよよに extend できれば存在し,

$$|W_n(f_1)| \leq C^n n^n$$

たよ定数 C が存在すれば, 仮に $p = \infty$ で $W \in \Sigma_p'$ とたよ
から, このとき $\mu(\cdot; f_1)$ は一意に定まる。

以上は Borchers and Zimmermann (1964) の結果:
 $|W_n(f_1)| \leq C^n n!$, の Gačok による改良の紹介であるが,
その後 Berezanskiy 等の多くの研究があり, 最近の Comm.
math. phys 誌にも関連する内容の論文が載っている。

参照 文献

1. R. Beals, Topics in operator theory, The University of Chicago Press. 1971.
2. N. Dunford and J.T. Schwartz, Linear operators II, Interscience Publishers. 1964
3. M. Dubois-Violette, A generalization of the classical moment problem on \ast -algebras with applications to relativistic quantum theory I. preprint.
4. I.M. Gelfand and N.Ya. Vilenkin, Generalized function IV, Academic Press. 1964.
5. M. Krein, Some questions in the theory of moment, Translations of Mathematical Monographs.

6. 中村 正弘, 関数解析入門, 碩書堂. 1968.
7. F. Riesz and B. Sz-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publ. Co., 1955.
8. J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, *The problem of moment*, American Mathematical Society, 1963.