数理解析研究所講究録
256巻 1975年 27-32

Hyponormal operator の factorization について

東北大 教養　吉野 崇

1. Hilbert space H 上の bounded linear operator S が $\|Sx\| \geq \|S^*x\|$, for all $x \in H$ なる条件を満す時, hyponormal という。

この作用素は1950年に Halmos [5] によって導入されて以来、多くの人々によって研究されて来たが、その典型的性質の一つとして、Andô 氏 [1] による、その operator norm と spectral radius とが一致するという性質が知られている。又、この性質に基づく種々の結果が得られているが、ここでは、それらは省略する。

operator の構造を調べる時、良く知られている operator による factorization が大切な役割を果たす。良く知られている factorization として polar decomposition があるが、最近、特殊な factorization を持つ operator が invariant subspace を持つ事が Suzuki 氏 [7] 及び、Radjavi and Rosenthal [6] 等によって示されている。

hyponormal operator のその adjoint operator による factorization が、Douglas [2] 及び Embry [4] によって知られているが、ここでは、[8] で示したように hyponormal operator は contraction と密接な関係があり、その意味で、contraction との関連による factorization について報告する。

2. T を H 上の contraction とすると、$\{T^{*k}T^k\}$ は non-negative contraction に強収束し、その square root を A_T とすると、$T^*A_T^2T = A_T^2$ だから、A_TT は hyponormal である。

逆に、H 上の hyponormal operator S が与えられた時、或る contraction T が存在して、$S = A_TT$ と表わせるか？という問題を生ずる。これに対して、

定理 1. S を H 上の invertible, hyponormal operator とすると、或る、A_C が invertible な contraction C が存在し、又、A_CC の polar decomposition を V_CA_C とするとき、V_C と可換な positive operator Y が存在し、$S = (A_CYA_C)^{\frac{1}{2}}C$ と表わせる。

証明、$S = V|S|$ を polar decomposition とすると、V は unitary である。$C = |S|^{-1}V|S|$ とすると、$|S|C = V|S| = S$, $C^*|S| = |S|V^* = S^*$ だから、$\forall x \in H$ に対して、$\|C^*x\| = \|C^*|S||S|^{-1}x\| = \|S^*|S|^{-1}x\| \leqq \|S|S|^{-1}x\| = \|V|S||S|^{-1}x\| = \|Vx\| = \|x\|$ 従って、C は contraction である。$C^n = |S|^{-1}V^n|S|$ だから $C^{*n} = |S|V^{*n}|S|^{-1}$ $\therefore$ $C^{*n}C^n = |S|V^{*n}|S|^{-2}V^n|S|$,

$mI \leqq |S|^2 \leqq MI$ とすると、$\frac{1}{M}I \leqq |S|^{-2} \leqq \frac{1}{m}I$ 従って、$\frac{m}{M}I \leqq C^{*n}C^n \leqq I$ ($\because$ C は contraction)。$\{C^{*n}C^n\} \downarrow A_C^2$ だから、$\frac{m}{M}I \leqq A_C^2 \leqq I$。故に A_C は invertible。又、$C^*|S|^2C = |S|V^*V|S| = |S|^2$ だから、Douglas [3] によって、$|S|^2 = A_C Y A_C$ と表わせる。但し、$A_C C = V_C A_C$ を polar decomposition とするとき、$V_C^* Y V_C = Y$ で $\|Y\| = \||S|^2\|$。ここで V_C は unitary だから、$YV_C = V_C Y$ 又、$|S|^2$ は positive だから Y も positive。故に、$S = (A_C Y A_C)^{\frac{1}{2}} C$ なる表現が出来る。

V_C と可換な任意の non-negative な operator Z に対して、$(A_C Z A_C)^{\frac{1}{2}} C$ は hyponormal であり、特に $Z = I$ のときが、$A_C C$ なる形の hyponormal operator であることがわかる。

次に、S を H 上の invertible operator とすると、S が hyponormal であることと、$S^{*-1}S$ が contraction であることとが同値である。そこで $S^{*-1}S = C$ とすると次の factorization を得る。

定理2. 或る normal operator N が存在して、$S = A_C N A_C$ と表わせる。

証明. $C = S^{*-1}S$ とすると、$\forall x \in H$ に対して、$\|Cx\| = \|S^{*-1}Sx\| \leqq \|S^{-1}Sx\| = \|x\|$ だから C は contraction であり、$S = S^*C$ より、$C^*S = S^*$ $\therefore$ $S = C^{*k}SC^k$, for all $k = 1, 2, 3, \cdots$。$\forall x \in H$ に対して、$\|Sx\| = \|C^{*k}SC^kx\| \leqq \|S\|\|C^kx\|$ で S は invertible だから、A_C は

invertible。 $C^*A_C^2C = A_C^2$ だから、$S^*S^{-1}A_C^2S^{*-1}S = A_C^2$ 従って、$S^{-1}A_C^2S^{*-1} = S^{*-1}A_C^2S^{-1}$ ∴ $(A_CS^{-1}A_C)(A_CS^{*-1}A_C) = (A_CS^{*-1}A_C)(A_CS^{-1}A_C)$ 即ち $(A_CS^{-1}A_C)(A_CS^{-1}A_C)^* = (A_CS^{-1}A_C)^*(A_CS^{-1}A_C)$ 故に $A_CS^{-1}A_C$ は normal である。従って、$A_C^{-1}SA_C^{-1} = N$ とおくと、$S = A_CNA_C$ と表わせる。

定理２で、normal operator N の polar decomposition を $U|N|$ とすると、$U = V_C^{1/2}$ である。何故なら、$S^* = A_CN^*A_C$ より $S^{*-1} = A_C^{-1}N^{*-1}A_C^{-1}$ ∴ $C = S^{*-1}S = A_C^{-1}N^{*-1}NA_C$ となり $A_CC = N^{*-1}NA_C$ 一方 $A_CC = V_CA_C$ だから $N^{*-1}N = V_C$ ∴ $N = N^*V_C$ 従って、$U|N| = |N|U^*V_C$　$N = U|N| = |N|U$ だから、$U = U^*V_C$ ∴ $V_C = U^2$ i.e., $U = V_C^{1/2}$ である。

そこで P を $V_C^{1/2}$ と可換な任意の non-negative operator とすると、$V_C^{1/2}P$ は normal であり、$A_CV_C^{1/2}PA_C$ は hyponormal operator である。何故なら、$Y = A_CV_C^{1/2}PA_C$ とすると、$Y^*Y - YY^*$

$= A_CPV_C^{1/2*}A_C^2V_C^{1/2}PA_C - A_CPV_C^{1/2}A_C^2V_C^{1/2*}PA_C = A_CPV_C^{*1/2}\{A_C^2 - V_CA_C^2V_C^*\}V_C^{1/2}PA_C$ で $A_CC = V_CA_C$ は hyponormal だから $A_C^2 - V_CA_C^2V_C^* \geq 0$ ∴ $Y^*Y - YY^* \geq 0$ よって Y は hyponormal である。

従って、特に $P = I$ の時、即ち $A_CV_C^{1/2}A_C$ は hyponormal である。この事から、定理２に於て、A_C を他の non-negative operator ととりかえることによって、N の代りに unitary operator にとれるか？という問題を生ずる。この問題は、次の如く肯定的に解ける。

定理3. SをH上のinvertible, hyponormal operatorとすると, 或るpositive operator Q及び、或るunitary operator Wが存在して、$S = QWQ$と表わせる。

証明、定理2より $S = A_c U |N| A_c = (A_c|N|A_c)(A_c^{-1} U A_c)$ だから、$A_c^{-1} U A_c = (A_c|N|A_c)^{-1} S$ 一方、$S^{*-1}S = A_c^{-1} N^{*-1} N A_c = A_c^{-1} V_c A_c$
$= A_c^{-1} U^2 A_c = (A_c^{-1} U A_c)^2$ だから、$S^{*-1}S = (A_c|N|A_c)^{-1} S (A_c|N|A_c)^{-1} S$
$\therefore S^{*-1} = (A_c|N|A_c)^{-1} S (A_c|N|A_c)^{-1}$ 従って、$S^*(A_c|N|A_c)^{-1}S = A_c|N|A_c$
$\therefore \{(A_c|N|A_c)^{-\frac{1}{2}} S^* (A_c|N|A_c)^{-\frac{1}{2}}\}\{(A_c|N|A_c)^{-\frac{1}{2}} S (A_c|N|A_c)^{-\frac{1}{2}}\} = I$ 故に、
$(A_c|N|A_c)^{-\frac{1}{2}} S (A_c|N|A_c)^{-\frac{1}{2}}$ はunitaryである。故に $(A_c|N|A_c)^{\frac{1}{2}} = Q$ とおき、$Q^{-1} S Q^{-1} = W$ とおくと、求める表現 $S = QWQ$ が得られる。このとき、$W = (A_c|N|A_c)^{\frac{1}{2}} (A_c^{-1} U A_c)(A_c|N|A_c)^{-\frac{1}{2}}$ である。何故なら、$S^{*-1}S = Q^{-1} W^2 Q$ より $W^2 = Q S^{*-1} S Q^{-1} = Q (A_c^{-1} U A_c)^2 Q^{-1}$
$= \{Q A_c^{-1} U A_c Q^{-1}\}^2 \quad \therefore W = Q A_c^{-1} U A_c Q^{-1} = (A_c|N|A_c)^{\frac{1}{2}} (A_c^{-1} U A_c)(A_c|N|A_c)^{-\frac{1}{2}}$
である。

参考文献

[1] T. Andô, On hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 14 (1963) 290-291.

[2] R. G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966) 413-415.

[3] R.G. Douglas, On the operator equation $S^*XT = X$ and related topics, Acta. Sci. Math., 29 (1969) 19-32.

[4] Mary R. Embry, Factorization of hyponormal operators, The Journal of the Australian Math. Soc., 13-3 (1972) 323-326.

[5] P.R. Halmos, Normal dilations and extensions of operators, Summa. Brasiliensis Math., 2 (1950) 125-134.

[6] H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces for products of hermitian operators, Proc. Amer. Math. Soc., 43 (1974) 483-484.

[7] N. Suzuki, Reduction theory of operators on Hilbert space - The invariant subspace problem -, Indiana Univ. Math. Journ., 20-10 (1971) 953-958.

[8] T. Yoshino, Hyponormal operators in von Neumann algebras, Tôhoku Math. Journ., (to appear).