数理解析研究所講究録
257巻 1975年 66-78

余次元1の葉層構造について

東北大 理　　西森敏之

目的は余次元1の葉層構造の葉が他の葉にまきつく状態を調べることである。

$\mathcal{F}$を向きづけ可能なC^r級閉多様体M上の向きづけ可能なC^r級余次元1葉層構造とする。$\mathcal{F}$の2つの葉F_1, F_2に対して，$F_1 \leqq F_2$であるとは$F_1 \subset \overline{F_2}$であることと定義する。$F_1 \leqq F_2$であって$F_1 \neq F_2$のとき$F_1 < F_2$とかく。

$$d(F) = \sup\{k \mid \exists F_1 < F_2 < \cdots < F_k = F\}$$
$$d(\mathcal{F}) = \sup\{d(F) \mid F \text{は} \mathcal{F} \text{の葉}\}$$

とおきそれぞれFまたは$\mathcal{F}$の<u>depth</u>と呼ぶ。$\mathcal{F}$のすべての葉からなる集合を$M/\mathcal{F}$とかく。

葉Fの多様体としての位相とMの部分集合としての位相が一致するときFを<u>proper</u>とよび，葉Fの閉包がMの内点を含むとき<u>局所稠密</u>とよぶ。properでも局所稠密でもない葉を<u>例外的</u>とよぶ。

関係≦は明らかに反射的かつ推移的であるが反対称的でない場合も多い。$(M/\mathcal{F},\leqq)$が順序集合になるのは次のような場合である。

<u>PROPOSITION 1.</u> (1) $d(\mathcal{F})$が有限ならば，$(M/\mathcal{F},\leqq)$は順序集合である。(2) $\mathcal{F}$のすべての葉が*proper*ならば，$(M/\mathcal{F},\leqq)$は順序集合である。

$\mathcal{F}$の不変集合とは$\mathcal{F}$のいくつかの葉の和集合のことである。

<u>PROPOSITION 2.</u> $(M/\mathcal{F},\leqq)$が順序集合ならば，任意のコンパクトな不変集合はコンパクトな葉を含む。とくにMは不変集合であるから$\mathcal{F}$はコンパクトな葉をもつ。

次にいくつかの問題を述べる。

<u>問題1</u>　$d(\mathcal{F})$が有限になるのはいつか？

<u>問題2</u>　$d(F)$が有限のときFは*proper*であるか？

<u>問題3</u>　$(M/\mathcal{F},\leqq)$が順序集合であり$d(\mathcal{F})=\infty$となる余次元1葉層構造があるか？

<u>問題4</u>　$(M/\mathcal{F},\leqq)$が順序集合のとき$\mathcal{F}$のすべての葉は*proper*であるか？

d

$d(\mathcal{F})=1,2$であるような余次元1葉層構造は次のようなものであることがわかる。

定理1 (1) $d(\mathcal{F})=1$ であるための必要十分条件は$\mathcal{F}$のすべての葉がコンパクトであることである。(2) $d(\mathcal{F})=2$ であるための必要十分条件は,$(M/\mathcal{F}, \geqq)$ が順序集合であってさらに$\mathcal{F}$が"ほとんどホロノミーを持たない"こと,すなわち,$\mathcal{F}$のコンパクトでない葉のホロノミー群はtrivialであることである。

$d(\mathcal{F})=2$ であるような余次元1葉層構造をもつ閉多様体は次に示すことによりたくさんあることがわかる。

定理2 *Tamura* [4], *Mizutani-Tamura* [1] で構成された余次元1葉層構造は *depth* 2 である。

次に問題1と問題2を考えるが,問題3と問題4については今のところ何もわかっていない。

さて問題1を扱うために準備をする。

$P(F)$ ですべての連続写像 $\omega: [0,1] \longrightarrow F$ から成る集合をあらわし,$P(\mathcal{F}) = \bigcup \{P(F) \mid F$は$\mathcal{F}$の葉$\}$ とおく。$LD_0(\mathbb{R}, 0)$ ですべての向きを保つC^r級微分同相 $f: (D(f), 0) \longrightarrow (R(f), 0)$ からなる集合をあらわすことにする。ただし $D(f)$, $R(f)$ は0を含む開区間である。$\mathcal{F}$に transverse な流れ $\phi: M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ を1つとる。

定義 $(\mathcal{F}, \phi)$の大域的ホロノミーとは次のように定められる

写像$\Phi : P(\mathcal{F}) \longrightarrow LD_0(\mathbb{R}, 0)$のことである。各$\omega \in P(\mathcal{F})$に対して，合成写像

$$[0,1] \times \mathbb{R} \xrightarrow{\omega \times id} M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} M$$

によって$[0,1] \times \mathbb{R}$上に$\mathcal{F}$より induce される葉層構造を$\mathcal{F}_\omega$とかく。$(0, x)$と$(1, y)$を含む$\mathcal{F}_\omega$の葉が存在するとき$y = \Phi(\omega)(x)$と定める。従って定義域$D\Phi(\omega)$は$(0, x)$を通る$\mathcal{F}_\omega$の葉が$\{1\} \times \mathbb{R}$と交わるような$x \in \mathbb{R}$からなる。

列$\omega_1, \cdots, \omega_n \in P(\mathcal{F})$が条件$\omega_i(1) = \omega_{i+1}(0)$, $i = 1, \cdots, n-1$をみたすとき，$\omega_1 \# \cdots \# \omega_n \in P(\mathcal{F})$を

$$\omega_1 \# \cdots \# \omega_n(t) = \omega_i(nt - i + 1), \quad \frac{i-1}{n} \leqq t \leqq \frac{i}{n}$$

により定める。

PROPOSITION 3　$\Phi(\omega_1 \# \cdots \# \omega_n) = \Phi(\omega_n) \circ \cdots \circ \Phi(\omega_1)$

定義　$(\mathcal{F}, \varphi)$の大域的ホロノミーが可換であるとは，

$$\omega_1(0) = \omega_1(1) = \omega_2(0) = \omega_2(1)$$

をみたす任意のω_1, ω_2に対して

$$\Phi(\omega_1 \# \omega_2)(t) = \Phi(\omega_2 \# \omega_1)(t) \quad \text{for } \forall t \in D\Phi(\omega_1 \# \omega_2) \cap D\Phi(\omega_2 \# \omega_1)$$

がなりたつことである。

PROPOSITION 4　$d(\mathcal{F}) \leqq 2$ ならば，任意の transverse な流れ$\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$に対して$(\mathcal{F}, \varphi)$の大域的ホロノミーは可換である。

$d(\mathcal{F})$に関して次の定理がなりたつ。

<u>定理3</u>　$\mathcal{F}$を向きづけ可能なC^2級閉多様体M上の向きづけ可能なC^2級余次元1葉層構造とし，dを正整数とする。$(M/\mathcal{F}, \leqq)$は順序集合になっているとする。次の(1),(2)をみたす$\mathcal{F}$にtransverseな流れ$\varphi: M\times\mathbb{R}\to M$があるとする。

(1)　$(\mathcal{F}, \varphi)$の大域的ホロノミーは可換。

(2)　任意の$x\in M$に対して$s>0$, $t<0$が存在して$\varphi(x,s)$, $\varphi(x,t)$はそれぞれdepth $\leqq d$の葉の上にある。

以上の仮定のもとに$d(\mathcal{F})\leqq d+1$がなりたつ。

定理3において大域的ホロノミーが可換であるという条件は次に示すようにおとせない。

<u>定理4</u>　S_2を種数2の閉曲面とするとき，任意の正整数dに対して$S_2\times[0,1]$上のC^∞級余次元1葉層構造$\mathcal{F}$で次の(1)～(3)をみたすものが存在する。

(1)　$\mathcal{F}$のすべての葉はproperで，$\{x\}\times[0,1]$にtransverse。

(2)　$d(\mathcal{F})=d$。

(3)　$\mathcal{F}$のすべてのホロノミー群は可換。

次に示すのは非可換なホロノミー群をもつ余次元1葉層構造のうちで$d(\mathcal{F})$が最小のものである。(PROP.4と比較せよ。)

定理5. $S_2\times[0,1]$ 上の C^0 級余次元1葉層構造で次の(1)〜(3)をみたすものがある。

(1) $\mathcal{F}$ のすべての葉は proper で，$\{x\}\times[0,1]$ に transverse。

(2) $d(\mathcal{F})=3$。

(3) 葉 $S_2\times\{0\}$ のホロノミー群は非可換。

さて次に問題2に移ると次のことがなりたつ。

定理6. $\mathcal{F}$ を向きづけ可能な C^2 級閉多様体 M 上の向きづけ可能な C^2 級余次元1葉層構造とし，$\mathcal{F}$ のすべてのホロノミー群は可換とする。F を $d=d(F)$ が有限な $\mathcal{F}$ の葉とする。このとき F は proper でさらに次のことがなりたつ。

(1) $F'<F$ をみたす任意の葉 F' に対して，$\mathcal{F}$ の葉の列 $F_1, F_2, \cdots, F_d$ で，$F_{d(F')}=F'$，$F_d=F$，$F_1<F_2<\cdots<F_d$ となるものがある。

(2) F の任意の end ε に対して，葉 F' が存在して

$$L_\varepsilon(F)=\bigcup\{F''\mid F''\leqq F'\}=\overline{F'}$$

(3) $F'<F$ をみたす葉 F' に対して，F の end ε が存在して

$$L_\varepsilon(F)=\bigcup\{F''\mid F''\leqq F'\}=\overline{F'}$$

そのような ε は $d(F')<d-1$ のときは可算無限個あり，$d(F')=d-1$ のときはただひとつある。

ただし $L_\varepsilon(F)$ は end ε の極限集合である。(Nishimori [2])

PROPOSITION 1, 2, 3, 4 と定理 1, 2, 6 の証明は省略する。

<u>定理3の証明</u>

まずいくつかの記号を導入する。Aをコンパクトな多様体とし，Bを向きづけられた法バンドルをもつ余次元1 ~~連結~~部分多様体とする。C(A−B)で A−B にBの2つのコピー B_1, B_2 をはりつけてできるコンパクトな多様体をあらわす。ただし法バンドルの向きに従って添え字をつける。$f: [0,\varepsilon]\to[0,\delta]$ を，$f(0)=0$, $\delta<\varepsilon$ をみたす C^∞級微分同型とする。

$C(A, B)\times[0,\varepsilon]$ 上に

$(x_1,t)\sim(x_2,t)$ if $t\in[0,\varepsilon]$, $x_1\in B_1$, $x_2\in B_2$, Bの元として $x_1=x_2$

により定まる同値関係∼を考える。

$$X(A, B, f) = C(A, B)\times[0,\varepsilon]/\sim$$

とおくと $X(A,B,f)$ は境界に角をもつコンパクト多様体である。$C(A,B)\times[0,\varepsilon]$ 上の余次元1葉層構造で

$$C(A,B)\times\{t\},\quad t\in[0,\varepsilon]$$

を葉とするものから *induce* される $X(A,B,f)$ 上の葉層構造を $\mathcal{F}(A,B,f)$ であらわす。

定理3の証明には次の定理が必要である。

<u>定理7</u>（Nishimori [3] の Theorem 1） $\mathcal{F}$ を向きづけ可能な C^2級閉多様体M上の向きづけ可能な余次元1 C^2級葉層構造とし，

Fを$\mathcal{F}$のコンパクトな葉とする。TをFの管状近傍としU_+をT−Fの一方の連結成分とFの和集合とする。$\mathcal{F}|U_+$によって定まるFの片側ホロノミー群が可換と仮定する。このとき次の(1)〜(3)のうち1つだけが起る。

(1) Fのすべての近傍Vに対して$\mathcal{F}|V\cap U_+$はF以外のコンパクトな葉をもつ。

(2) Fのすべての近傍Vに対してFの近傍$V_1\subset V$が存在して$\mathcal{F}|V_1\cap U_+$のF以外の葉は$V_1\cap U_+$で*dense*.

(3) Fの向きづけ可能な余次元1~~連結~~部分多様体N, すべての$t\in(0,\varepsilon]$に対して$f(t)<t$をみたすC^r級微分同型$f:[0,\varepsilon]\longrightarrow[0,\delta]$, そして$C^r$級うめこみ$h:X(F,N,f)\longrightarrow U_+$が存在して

$$h(F\times\{0\})=F,\qquad h^*\mathcal{F}=\mathcal{F}(F,N,f)$$

となる。

さて定理3の条件をみたす$\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$について考える。

PROP.2により$\mathcal{F}$はコンパクトな葉をもつ。もし$\mathcal{H}$のすべての葉がコンパクトならば$d(\mathcal{F})=1=d$となり証明は終る。$\mathcal{F}$がコンパクトでない葉をもつとせよ。Ω^1を

$$M-\bigcup\{F\mid F\text{は}\mathcal{F}\text{のコンパクトな葉}\}$$

の1つの連結成分とする。$\overline{\Omega^1}$でΩ^1に境界をはりつけて得ら

れるコンパクトな多様体をあらわすと $\overline{\Omega}^1$ は M に自然に immerse されている。$\mathcal{F}|\overline{\Omega}^1$ で $\mathcal{F}$ より $\overline{\Omega}^1$ 上に induce される葉層構造をあらわす。すべての連結成分 Ω^1 に対して $d(\mathcal{F}|\Omega^1) \leqq d$ を示せば十分である。

$F_1, \cdots, F_k$ を $\mathcal{F}|\overline{\Omega}^1$ のコンパクトな葉すなわち $\overline{\Omega}^1$ の境界の連結成分とする。各 F_i に対して定理7の条件がみたされている。$\overline{\Omega}^1$ の定義のしかたにより (1) は起らない。もし (2) が起れば，$(M/\mathcal{F}, \leqq)$ は順序集合にならない。従って各 F_i において定理7の (3) が起り，$i = 1, \cdots, k$ に対して N_i, f_i : $[0, \varepsilon_i] \longrightarrow [0, \delta_i]$，そして $h_i : X(F_i, N_i, f_i) \longrightarrow \overline{\Omega}^1$ が得られる。

$$\overline{\Omega}_0^1 = \overline{\Omega}^1 - \bigcup_{i=1}^{k} h_i(\mathrm{Int}\, X(F_i, N_i, f_i)) - \bigcup_{i=1}^{k} F_i$$

とおくと，$\overline{\Omega}_0^1$ は境界に角をもつコンパクトな多様体である。

$(\overline{\Omega}_0^1/(\mathcal{F}|\overline{\Omega}_0^1), \leqq)$ もやはり順序集合になっていて PROP. 2 により $\mathcal{F}|\overline{\Omega}_0^1$ はコンパクトな葉をもつ。$\mathcal{F}|\overline{\Omega}_0^1$ のすべての葉がコンパクトならば $d(\mathcal{F}|\Omega^1) = 1$ となり証明は終る。$\mathcal{F}|\overline{\Omega}_0^1$ がコンパクトでない葉をもつと仮定して定理7を使って同じ操作をつづける。ただし PROP. 2 と定理7の仮定は厳密にはみたされていないが，今の場合に適用できるように PROP. 2 と定理7は拡張できることを注意しておく。

Ω^{i+1} で，ある Ω^i に対して

$$\overline{\Omega}_0^i - \bigcup\{F \mid F \text{は} \mathcal{F}|\overline{\Omega}_0^i \text{のコンパクトな葉}\}$$

の連結成分をあらわす。Ω^d を得るまで上の操作がつづいた場合を考えればよい。なぜなら，Ω^dを得る前に操作が終ったとすると $d(\mathcal{F}) \leqq d$ となり，この場合は明らかに定理3が成立するからである。

$F_1, \cdots, F_k$ を $\mathcal{F}|\overline{\Omega}^d$ のコンパクトな葉とする。F_iを含む$\mathcal{F}$の葉は depth d であり，$\overline{\Omega}^d$ の内部を通る$\mathcal{F}$の葉は depth $> d$であることに注意せよ。必要ならば φ の向きを逆にすることにより，各$x \in F_1$に対して適当な$\varepsilon > 0$をとれば

$$\varphi(\{x\}\times(0,\varepsilon)) \subset \Omega^d$$

となると仮定してよい。$i = 2, \cdots, k$に対して

$$K_i = \left\{ x \in F_1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } t > 0 \text{ に対して} \\ \varphi(\{x\}\times(0,t)) \subset \Omega^d,\ \varphi(x,t) \in F_i \end{array} \right\}$$

とおくと，$K_2, \cdots, K_k$は互いに交わらないF_1の開集合である。定理3の条件(2)により，任意の$x \in F_1$に対してxから出発する orbit はΩ^dの外に出ていかなければいけない。F_1を通って出て行くことは不可能だから $F_1 = K_2 \cup \cdots \cup K_k$ となる。F_1の連結性により，K_iのうちの唯1つだけが空でないから，番号をつけかえて，$K_2 \neq \phi$とする。

$$\Omega = \left\{ \varphi(x,t) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in F_1,\ t \in [0,\infty) \\ \varphi(\{x\}\times(0,t)) \subset \Omega^d \end{array} \right\}$$

とおくと，Ωは$\overline{\Omega}^d$の開集合で同時に閉集合であることが示

せるので，結局 $\overline{\Omega}^d$ は $F_1\times[0,1]$ と微分同型になる。従って $k=2$ ということになる。

$(\mathcal{F},\varphi)$ の大域的ホロノミーが可換であることより，Nishimori [3] の Theorem 1* が適用できて，Int $\overline{\Omega}^d$ を通る $\mathcal{F}$ の葉は depth が $d+1$ であることがわかる。以上により $d(\mathcal{F})\leqq d+1$ となり定理3の証明は完了した。

定理4，5 の証明

まず最初に与えられた向きを保つ C^r 級微分同型 $f_1, f_2:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ から $S_2\times[0,1]$ 上にすべての葉が C^∞ 級部分多様体であって $\{x\}\times[0,1]$ に transverse であるような余次元1葉層構造を構成する方法を述べる。

$S_2-(C_1\cup C_2)$ が連結であるような互いに交わらない2つの1次元球面 C_1, C_2 をとる。T_1, T_2 を互いに交わらない C_1, C_2 の閉管状近傍とする。C^∞ 級微分同型 $h_i: C_i\times[-1,1]\longrightarrow U_i,\ i=1,2$ が存在する。$\alpha:[-1,1]\longrightarrow[0,1]$ を，-1 の近傍では 0，1 の近傍では 1 であるような C^∞ 級写像とする。$U_i\times[0,1]$ 上の余次元1葉層構造でその葉が，

$$\left\{(h_i(x,s),t)\ \middle|\ \begin{array}{l} x\in C_i,\ s\in[-1,1] \\ t=\alpha(s)t_0+(1-\alpha(s))f_i(t_0)\end{array}\right\},\quad t_0\in[0,1]$$

であるようなものを $\mathcal{F}_i$ であらわす。$(S_2-\mathrm{Int}(U_1\cup U_2))\times[0,1]$

上の葉層構造でその葉が

$$(S_2 - \mathrm{Int}(U_1 \cup U_2)) \times \{t\}, \quad t \in [0, 1]$$

であるものを $\mathcal{F}_0$ であらわす。$\mathcal{F}_0$ と $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ をはりあわせることによって $S_2 \times [0, 1]$ 上の葉層構造 $\mathcal{F}$ を得る。

$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ を, $f(t) < t$, $t \in (0,1)$ をみたす C^∞ 級微分同型とする。$h : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$h(f^n(x)) = h(x) - n \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$$

をみたす C^∞ 級微分同型とする。次に C^∞ 微分同型 $g_4, g_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を構成し, $\overline{g_4}, \overline{g_5} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ を

$$\overline{g_i}(0) = 0,\ \overline{g_i}(1) = 1,\ \overline{g_i}\,|(0,1) = h^{-1} \circ g_i \circ h$$

により定義するとき, $\overline{g_4}$ が C^∞ 微分同型で $\overline{g_5}$ が同相写像となり, f と $\overline{g_i}$ からつくられる葉層構造が定理 i の例になるようにする。

数列 $a_1, a_2, \cdots, a_\infty$, $b_1, b_2, \cdots, b_\infty$ を

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_\infty < b_\infty < \cdots < b_2 < b_1 < 1$$

となるようにとる。

$g_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ として次のようなものをとる。

(1) $g_4(x) = x$ （$x \leqq a_1$ または $d-1+b_{d-1} \leqq x$ のとき）

(2) $g_4(x) = x$ （$n = 1, \cdots, d-2$ に対して $n + b_n \leqq x \leqq n+1+a_{n+1}$ のとき）

(3) $g_4(x) < x$ （$n = 1, \cdots, d-1$ に対して $n + a_n < x < n + b_n$ のとき）

$g_4(n + b_{n+1}) = n + a_{n+1}$

g_5 を定義するために，C^∞級微分同型 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で

$$g|(-\infty, 0] \cup [1, \infty) = id$$

$$g(x) < x, \quad x \in (0, 1)$$

をみたすようなものをとる。$g_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のようにとる。

(1) $2n \leqq x \leqq 2n+1$ のとき $g_5(x) = x$

(2) $2n+1 < x < 2n+2$ のとき $g_5(x) = 2n+1+g(x-2n-1)$

以上に得られた $\bar{g}_4, \bar{g}_5 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ が必要な条件をみたしていることを check することは省略する。

REFERENCES

[1] T. MIZUTANI and I. TAMURA, *Foliations of even dimensional manifolds*, Proceedings of the International Conference on Manifolds and Related Topics in Topology, Tokyo, 1973, 189-194.

[2] T. NISHIMORI, *Isolated ends of open leaves of codimension one foliations*, Quart. J. Math. Oxford (3), 26 (1975), 159-167

[3] T. NISHIMORI, *Compact leaves with abelian holonomy*, Tôhoku Math. J. 27 (1975), 259-272

[4] I. TAMURA, *Specially spinnable manifolds*, Proceeding of the International Conference on Manifolds and Related Topics in Topology, Tokyo, 1973, 181-187