数理解析研究所講究録
257巻 1975年 51-56

Hamiltonian system と closed geodesic.

鈴鹿工専 横山定晴

0. はじめに

Klingenberg [1] は双曲型でない閉測地線があれば計量を少し動かすことによって Birkhoff-Lewis の不動点定理が適応できることを示し、この定理によって双曲型でない閉測地線のまわりに無限個の閉測地線が存在することを証明した。ここでは非双曲型閉測地線の Morse index が不安定であることと Morse theory を通し閉測地線は topology と結びついている。このことによる安定性から γ のまわりにたくさんの閉測地線を作ることができることを示す。

1.

M を C^∞-級 compact 多様体 $\mathcal{G}(M)$ で M 上のリーマン計量全体に C^r-topology を入れたものとする。以下 $r \geq 2$ である。$\gamma(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ で M 上の閉測地線を表わし $X(t), Y(t), Z(t)$ で γ にそうベクトル場，特に $Y(t), Z(t)$ は

$(Y(0),\ Y'(0)) = (Y(1),\ Y'(1))$, $(Z(0),\ Z'(0)) = (Z(1),\ Z'(1))$ を満しているものとする。$\langle\ ,\ \rangle_g$ で計量 g による内積，$|\cdot|$ でノルムを表わす 又 γ にそうベクトル場 X，Y の内積を $\langle\!\langle X, Y \rangle\!\rangle_g = \int_0^1 \langle X(t), Y(t)\rangle dt$ ノルムを $\|\ \|$ で表わす。$R_g(\ ,\ )$ で曲率を表わす。線形作用素 A を次の様に定義する。

$$A : X \longrightarrow X'' - R(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$$

$AX = 0$ なる γ にそうベクトル場 X を jacobi 場という。γ にそう jacobi 場全体を考える。

$$P : (X(0),\ X'(0)) \longrightarrow (X(1),\ X'(1))$$

は線形写像になる。P が 固有値 1 をもつとき 閉測地線 γ を退化閉測地線といい，P が 絶対値 1 の固有値をもつとき 非双曲型閉測地線という。測地線 γ での Hessian H_g を次のように定義する。

$$\begin{aligned} H_g(X, Y) &= \int_0^1 \langle X'(t),\ Y'(t)\rangle - \langle R_g(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y\rangle_g dt \\ &= \sum \langle X(t),\ Y'(t)\rangle \Big|_{t^-}^{t^+} - \int_0^1 \langle AX, Y\rangle_g\, dt \end{aligned}$$

γ の index を次のように定義する。

$$\text{index}\ (\gamma, g) = H_g \text{ の負の固有値の数}$$

閉測地線 γ の index が安定であるとは γ 上で計量 g の 1-jet を変えずに少し計量 g を変化させても すべての自然数 n に対して γ^n 上の index が 不変なことである。

補題 1. γを(M,g)上の閉測地線とする。任意の $\delta>0$ に対して 次の条件を満足する計量g'が存在する。

1) $g-g'$の 1-jet はγ上で0

2) eを$\dot\gamma$と直交する単位ベクトルとする このとき $\langle R_g(e,\dot\gamma)\dot\gamma-R_g'(e,\dot\gamma)\dot\gamma, e\rangle > \delta$

(2)' $\langle R_g(e,\dot\gamma)\dot\gamma-R_g'(e,\dot\gamma)\dot\gamma, e\rangle < -\delta$)

証明

Fermi座標を用いれば

$$\langle R_g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_0},\frac{\partial}{\partial x_j}\rangle=\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x_i\partial x_j}$$

(a_{ij}) を正値2次形式で 単位ベクトルeに対して $e(a_{ij})^te>\delta$とする。$g_{00}'=\frac{1}{2}\sum a_{ij}x_ix_j$ とし $g'=g-g_{00}$ とおけば 1), 2) を満足する。

補題 2. Hessian H_gの固有値は下に有界である。

証明

$$S=\sup_{|e|=1}|\langle R_g(e,\dot\gamma)\dot\gamma, e\rangle| \quad \text{とおく}$$

$$\begin{aligned}H_g(X,X)&=\int_0^1\langle X',X'\rangle_g-\langle R_g(X,\dot\gamma)\dot\gamma,X\rangle_g\,dt\\&\geq-\int_0^1\langle R_g(X,\dot\gamma)\dot\gamma,X\rangle_g\,dt\\&\geq-S\int_0^1\langle X,X\rangle_g\,dt\end{aligned}$$

これより H_g の固有値は $-S$より大きい。

補題 3. $Z(t)$を $(Z(0),Z'(0))=(Z(1),Z'(1))$なる$H_g$の負の固有値に属する固有ベクトルとする。 このとき

$\left| \|Z(t_0)\|^2 - |Z(0)|^2 \right| < \sqrt{2S} \|Z\|^2$ が成り立つ。

証明

$$\|Z'\|^2 = Hg(Z, Z) + \int_0^1 \langle R(Z, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Z \rangle_g \, dt$$
$$\leqq 2S \|Z\|^2$$

$$\left| |Z(t_0)|^2 - |Z(0)|^2 \right| = \left| \int_0^t \frac{d}{dt} \langle Z, Z \rangle_g \, dt \right|$$
$$= \left| 2\int_0^t \langle Z', Z \rangle_g \, dt \right|$$
$$\leq 2\|Z\| \, \|Z'\| \leqq 2\sqrt{2S} \, \|Z\|^2$$

ここで $\|Z\| = 1$ の場合 $|Z(t)| \leq \sqrt{2S} + 1$ となることに注意。

命題 4　γ を双曲型でない閉測地線としよう。
このときの　γ の index は不安定である。

証明

$\tilde{X}$ を　$(\tilde{X}(1), \tilde{X}'(1)) = \rho(X(0), X'(0))$ $(|\rho| = 1)$ となる 複素 jacobi 場とする。このとき任意の　$\varepsilon > 0$ に対して次を満足する自然数 n と　ベクトル場　Y がある。

1) $|X^{n\prime}(0) - X^{n\prime}(1)| < \varepsilon \|X^n\|$

ここで　$X = \mathrm{Re}\,\tilde{X}$　$X^n(t) = X(nt)$

2) $\|Y\| = 1$　$(Y(0), Y'(0)) = (Y(1), Y'(1))$

$\|Y - X^n / \|X^n\| \| < \varepsilon$,　$\|Y' - X^{n\prime} / \|X^n\| \| < \varepsilon$

ここで任意に与えられた数　$a > 0$ より絶対値の小さな固有値が　γ^m 上にあれば　補題 1. によって証明は終る。
ここで　γ^n 上の Hessian の負の固有値が $-a$ 以下であったと

する。負の固有値を $\{\lambda_i\}$ とし固有ベクトルを $\{Z_i\}$ とする。
$(\|Z_i\|=1.\ (Z_i(0), Z_i'(0))=(Z_i(1), Z_i'(1)))$ $Z=C_iZ_i$ をとる。

$$
\begin{aligned}
|\langle\!\langle Y, Z\rangle\!\rangle| &= |\langle\!\langle X_1, Z\rangle\!\rangle+\varepsilon \qquad X_1=X^n/\|X^n\| \\
&= |\langle\!\langle X, \frac{c_i}{\lambda_i}AZ_i\rangle\!\rangle| + \varepsilon \\
&= |H(X, \frac{c_i}{\lambda_i}Z_i)| + \varepsilon \\
&= |\langle X_1'(1) - X_1'(0), \frac{c_i}{\lambda_i}Z(0)\rangle| + \varepsilon \\
&\leq |X_1'(1) - X_1'(0)\|\frac{c_i}{\lambda_i}Z(0)| + \varepsilon \\
&\leq \frac{2\sqrt{2s}+1}{a}\varepsilon + \varepsilon
\end{aligned}
$$

ここで ε が十分小さいとして $Y_1=(Y-\langle\!\langle Y, Z_i\rangle\!\rangle Z_i)/\|Y-\langle\!\langle Y, Z_i\rangle\!\rangle Z_i\|$ とおく このとき $H_g(Y, Y_1)$ は上から a に関係する定数と ε との積でおさえられる。よって ε を十分小さくすれば 絶対値 a 以下の固有値が存在する。

以下は閉測地線が Morse 理論を通して topology と結ばれている。これはある安定性があることを示している。以後の命題はこの安定性によっている。

任意の値 l に対し 長さ l 以下の閉測地線は 有限個しかないものとする。

命題 6. γ を (M, g) 上の閉測地線とする。g の十分小さな近傍 $U_g\subset\mathcal{G}^r(M)$ があって (M, g') 上には γ の近くに必ず閉測地線 γ' がある。このことは γ の近くの閉測地線を消すことなく 計量 g の近くの計量に変わることが

できることを示している.

補題 7　γを(M, g)上の閉測地線としそのindexが不安定であるとする．このとき$\mathcal{G}^2(M)$で計量を少し動かすことによって　閉測地線をたくさん作ることができる。

証明

$U_g \subset \mathcal{G}^2(M)$ を g の任意の近傍とする．$g' \in U_g$で　$g-g'$ の1-jetが0となるもので

$$\mathrm{index}\ (\gamma^n, g) \neq \mathrm{index}\ (\gamma^n, g')$$

となるものがある．このとき $\mathrm{index}\,(\gamma^n, g)$を補うために閉測地線$\gamma'$が　γの近くに生成される。さらに　命題 6によって　γのまわりで計量g'をgに　γ'を消すことなしにもどせる。以下同様である。

定理 8　(M, g)を　C^∞級 Compactリーマン多様体γを　その双曲型でない閉測地線とする．このとき曲率を少し動かすことによって　長さの有界な閉測地線を　任意有限個作ることができる。

証明

命題 4 と 補題 6 による．

参考文献

[1] Klingenberg, W. Closed geodesics on riemannian Manifolds, Proc 13. Sem. Can Math. Congrss. 67-92. (1972)