数理解析研究所講究録
258巻 1975年 113-121

コルモゴロフ, ペトロフスキー, ピスクノフ型の非線型拡散方程式

大阪市立大, 理, 亀高 惟倫

非線型拡散方程式に対する初期値問題

$$(1)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2\right] u = f(u), \quad 0 \le u \le 1 & (x,t) \in R^1 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in R^1 \end{cases}$$

を考える。以下の仮定をおく。

仮定； $f(\xi) \in C^\infty[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) > 0 > f'(1)$,
$f(\xi) > 0$, $f'(0)\xi - f(\xi) \ge 0 \qquad \xi \in (0,1)$.

この仮定の下で (1) はコルモゴロフ, ペトロフスキー, ピスクノフ型とよぶ事にする。 $u = w(x + ct)$ を (1) に代入して w について

$$(2)\qquad w'' - cw' + f(w) = 0, \quad 0 \le w \le 1 \qquad x \in R^1$$

を得る。 (2) は常に自明な解 $w \equiv 0$ と $w \equiv 1$ を持つ。

又 (2) は $(x, \lambda) \to (-x, -\lambda)$ なる変換で不変であるから $\lambda \geq 0$ と限ってよい。(2) の自明でない解を (1) の進行波解とよぶ。1937年コルモゴロフ，ペトロフスキー，ピスクノフ [1] は次の事を示した。

(i) $0 \leq \lambda < \lambda_0 \equiv \sqrt{f'(0)}$ ならば (2) の解は $w \equiv 0$ と $w \equiv 1$ の自明な解のみ。

(ii) $\lambda \geq \lambda_0$ ならば (2) と規格化条件 $w(0) = \frac{1}{2}$ は唯一つの解 $w_\lambda(x)$ を定める。$w_\lambda'(x) > 0 \quad x \in R^1$, $w_\lambda(-\infty) = 0$, $w_\lambda(+\infty) = 1$ が成り立つ。

(iii) 初期値 $u_0(x) = 1 \ (x > 0), \ = 0 \ (x < 0)$ から出発した (1) の解 $u(x,t)$ に対して $t \uparrow \infty$ とする時

$$(\operatorname{sgn} x)\left\{u(x + u^{-1}(\xi,t), t) - w_{\lambda_0}(x + w_{\lambda_0}^{-1}(\xi))\right\} \searrow 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u^{-1}(\xi,t) \longrightarrow -2\lambda_0$$

である。上の収束は $x \in R^1$ について一様収束 $\xi \in (0,1)$ についてコンパクト一様収束である。ここで $u^{-1}(\xi,t)$, $w_{\lambda_0}^{-1}(\xi)$ は $u(u^{-1}(\xi,t), t) = \xi$, $w_{\lambda_0}(w_{\lambda_0}^{-1}(\xi)) = \xi$ によって陰に定義される。($\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) > 0$ に注意)

(iii) は次の事を意味する。ヘビサイドの階段函数から出発した (1) の解 $u(x,t)$ は高さ一定 ($u = \xi$) の点にはり付いた観測者がながめると時間の経過とともに一番おそい進行波

に波形が整って行くように見える。　又観測者の移動速度は一番おそい進行波の速度 $-2\lambda_0$ に近づいて行く。

以上の結果を改良する事が目的である。

(3)　$M = \{u(x);\ u'(x) > 0 \quad x \in R^1,\ u(-\infty) = 0,\ u(+\infty) = 1\}$

とする。　$u(x,t)$ はなめらかで、任意に固定した $t \geq 0$ に対して　$u(x,t) \in M$　とする。

(4)　$u(u^{-1}(\xi,\tau),\tau) = \xi \qquad (\xi,\tau) \in (0,1) \times [0,\infty)$

(5)　$\hat{u}(\xi,\tau) = u'(u^{-1}(\xi,\tau),\tau) \qquad$ 〃 $\qquad (' = \frac{\partial}{\partial x})$

によって変換 "∧" を定義する。(仮に KPP 変換と呼んでおく)。

(6)　$\begin{cases} \xi = u(x,t) \\ \tau = t \end{cases}$　又は　$\begin{cases} x = u^{-1}(\xi,\tau) \\ t = \tau \end{cases}$

は微分同型　$R^1 \times [0,\infty) \ni (x,t) \longrightarrow (\xi,\tau) \in (0,1) \times [0,\infty)$

を与える。　以下　$u'(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$,　$\dot{u}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$

$\hat{u}'(\xi,\tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{u}(\xi,\tau)$,　$\dot{\hat{u}}(\xi,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{u}(\xi,\tau)$　のように略記する。

<u>定理 1</u>　$\lambda \geq \lambda_0$ とする。(2) の進行波解 $w_\lambda(x)$ の KPP 変換 $\hat{w}_\lambda(\xi) = w_\lambda'(w_\lambda^{-1}(\xi))$ は次の性質を持つ。

(7)　$\hat{w}_\lambda(\xi) \in C^1[0,1] \cap C^\infty(0,1]$

(8)　$\hat{w}_\lambda(\xi) > 0 \qquad \xi \in (0,1)$

(9)　$\hat{w}_\lambda(0) = \hat{w}_\lambda(1) = 0$

$$\hat{w}_\lambda'(0) = \sigma_-(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - \lambda_0^2} > 0$$

$$\hat{w}_\lambda'(1) = \tau_-(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - f'(1)} < 0$$

(10) $$\lim_{\xi \to +0} \xi \sqrt{-\log \xi}\; \hat{w}_\lambda''(\xi) = 0$$

(11) $$\hat{w}_{\lambda_2}(\xi) < \hat{w}_{\lambda_1}(\xi) \qquad \xi \in (0,1) \qquad \lambda_2 > \lambda_1 \geq \lambda_0$$

(12) $$\lim_{\lambda \to \lambda_1} \sup_{0<\xi<1} \left| \hat{w}_\lambda(\xi) - \hat{w}_{\lambda_1}(\xi) \right| = 0$$

(13) $$\lim_{\lambda \to +\infty} \sup_{0<\xi<1} \hat{w}_\lambda(\xi) = 0$$

次の定理は本質的には[1]で示されている。

<u>定理2.</u>　(1)の解 $u(x,t)$ は初期値 $u_0(x) \in M$ を持つとする。次のような $\hat{u}_\infty(\xi)$ の存在を仮定する。

(14) $$\lim_{\tau \to \infty} \hat{u}(\xi,\tau) = \hat{u}_\infty(\xi) \qquad \xi \in (0,1)$$

又補助条件として次のような $\lambda_1 \geq \lambda_0$ 及び $W(x) \in M$ があるものとする。

(15) $$\hat{w}_{\lambda_1}(\xi) \leq \hat{u}(\xi,\tau) \leq \hat{W}(\xi) \qquad (\xi,\tau) \in (0,1) \times [0,\infty)$$

このとき $\lambda \geq \lambda_0$ があって次の事が成り立つ。

(16) $$\lim_{\tau \to +\infty} \sup_{x \in R^1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k u(x + u^{-1}(\xi,\tau), \tau) - \right.$$

$$\left. - (2\lambda)^k \left(\frac{d}{dx}\right)^{j+k} w_\lambda (x + w_\lambda^{-1}(\xi)) \right| = 0$$

$$j = 0,1,2,\cdots, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

(17) $\quad \lim_{\tau\to+\infty} (u^{-1})^{\cdot}(\xi,\tau) = -2\lambda$

さらに

(18) $\quad \hat{\lambda}(\xi,\tau) \le 0 \quad$ (又は ≥ 0) $\quad (\xi,\tau)\in(0,1)\times[0,\infty)$

が成り立てば $\tau \uparrow +\infty$ とすると

(19) $\quad (\mathrm{sgn}\, x)\{u(x+u^{-1}(\xi,\tau),\tau) - w_\lambda(x+w_\lambda^{-1}(\xi))\} \searrow 0$

(又は $\nearrow 0$)

である。

この定理からわかるように重要な点は (14), (15) を保障する条件を初期値 $u_0(x)$ に対する条件として与える事にある。先ず（変形）誤差函数 $E(x)$ を次式で定義する。

(20) $$E(x) = \int_{-\infty}^{x} H(y,1)\,dy$$

$$H(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

適当な $\delta_0 > 0$ があって $0<\delta\le\delta_0$ なる任意の δ に対して

(21) $$u_0(x) = E(x/\sqrt{\delta}) \qquad x\in R^1$$

で与えられる $u_0(x)$ は $\hat{u}_0(\xi) > \hat{w}_{\lambda_0}(\xi)$ と

$\{\hat{u}_0{}'(\xi) + f(\xi)/\hat{u}_0(\xi)\}' \le 0 \qquad \xi\in(0,1)$ を満す。

<u>定理 3.</u> (1) の解 $u(x,t)$ が (21) で与えられる初期値 $u_0(x)$ を持つとき次の事が成り立つ。

$$(22)\qquad \hat{u}(\xi,\tau) \geq \hat{w}_{\lambda_0}(\xi) \qquad (\xi,\tau)\in(0,1)\times[0,\infty)$$

$$(23)\qquad \mathring{\hat{u}}(\xi,\tau) \leq 0 \qquad\qquad "$$

$$(24)\qquad \lim_{\tau\to+\infty}\ \sup_{0<\xi<1} \left|\hat{u}(\xi,\tau) - \hat{w}_{\lambda_0}(\xi)\right| = 0$$

さらに定理2の(16)(17)が λ を λ_0 で置き代えて成り立つ。特に $\tau\uparrow+\infty$ とするとき

$$(25)\qquad (\operatorname{sgn} x)\left\{u(x+u^{-1}(\xi,\tau),\tau) - w_{\lambda_0}(x+w_{\lambda_0}^{-1}(\xi))\right\} \searrow 0$$

が成り立つ。

<u>定理 4.</u> $u(x,t)$ と $u_0(x)$ は定理3でのべたものとする。(1)の解 $v(x,t)$ が初期値 $v_0(x)\in M$ を持ち、

$$(26)\qquad \hat{w}_{\lambda_0}(\xi) \leq \hat{v}_0(\xi) \leq \hat{u}_0(\xi) \qquad \xi\in(0,1)$$

が成り立つとする。このとき

$$(27)\qquad \hat{w}_{\lambda_0}(\xi) \leq \hat{v}(\xi,\tau) \leq \hat{u}(\xi,\tau) \qquad (\xi,\tau)\in(0,1)\times[0,\infty)$$

が成り立ち、さらに定理2の結論(16)(17)が $u(x,t)$ を $v(x,t)$ で λ を λ_0 で置き代えて成り立つ。

次の定理をのべる準備として、函数のクラス N を次のように定義する。すなわち $u_0(x)\in N$ は次の事を意味する。$u_0(x)\in M$ であって

$$(28)\qquad \begin{cases} \hat{u}_0(\xi) \in C^1[0,1]\cap C^2(0,1) \\ \hat{u}_0(0) = \hat{u}_0(1) = 0 \qquad \hat{u}_0'(0) > 0 > \hat{u}_0'(1) \\ \xi(1-\xi)\,\hat{u}_0''(\xi) \text{ は } \xi\in(0,1) \text{ に対し有界} \end{cases}$$

定理 5　任意に $\lambda \geq \lambda_0$ を固定する。(1) の解 $u_k(x,t)$ $(k=1,2)$ が初期値 $u_{k0}(x) \in N$ を持つとする。次の事を仮定する。

(29) $\hat{u}_{10}'(0) = \hat{u}_{20}'(0) = \sigma_-(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - \lambda_0^2}$

(30) $\hat{u}_{20}'(1) > \tau_-(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - f'(1)} > \hat{u}_{10}'(1)$

(31) $\{\hat{u}_{20}' + f(\xi)/\hat{u}_{20}\}' \geq 0 \geq \{\hat{u}_{10}' + f(\xi)/\hat{u}_{10}\}'$ $\xi \in (0,1)$

このとき次の事が成り立つ。

(32) $\dot{\hat{u}}_2(\xi,\tau) \geq 0 \geq \dot{\hat{u}}_1(\xi,\tau)$ $(\xi,\tau) \in (0,1) \times [0,\infty)$

(33) $\hat{u}_{10}(\xi) > \hat{w}_\lambda(\xi) > \hat{u}_{20}(\xi)$ $\xi \in (0,1)$

(34) $\displaystyle \lim_{\tau \to +\infty} \sup_{\substack{0<\xi<1 \\ k=1,2}} |\hat{u}_k(\xi,\tau) - \hat{w}_\lambda(\xi)| = 0$

さらに定理 2 の (16) (17) が $u(x,t)$ を $u_k(x,t)$ で置き代えて成り立つ。特に $\tau \uparrow +\infty$ とするとき

(35) $(-1)^{k-1}(\mathrm{sgn}\, x)\{u_k(x + u_k^{-1}(\xi,\tau),\tau) - w_\lambda(x + w_\lambda^{-1}(\xi))\} \downarrow 0$

が成り立つ。

定理 6　任意に $\lambda \geq \lambda_0$ を固定する。$u_k(x,t)$ と $u_{k0}(x)$ $(k=1,2)$ は定理 5 にのべたものとする。(1) の解 $v(x,t)$ が初期値 $v_0(x) \in M$ を持ち

(36) $\hat{u}_{10}(\xi) \geq \hat{v}_0(\xi) \geq \hat{u}_{20}(\xi)$ $\xi \in (0,1)$

が成り立つとする。このとき

(37) $\hat{u}_1(\xi,\tau) \geq \hat{v}(\xi,\tau) \geq \hat{u}_2(\xi,\tau)$ $(\xi,\tau) \in (0,1) \times [0,\infty)$

が成り立ち、さらに定理2の(16)(17)が $u(x,t)$ を $v(x,t)$ で置き代えて成り立つ。

以上の結論の証明には次の3つの関係式が基本的な役割を演ずる。

(38) $$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - c_1(x,t)\right]\left(u' - \hat{w}_\lambda(u)\right) = 0 \\ c_1(x,t) = f'(u) + \left(u' + \hat{w}_\lambda(u)\right)\hat{w}_\lambda''(u) \end{cases}$$

(39) $$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - c_2(x,t)\right]\mathring{u}(u(x,t),t) = 0 \\ c_2(x,t) = f'(u) + 2\left\{u'''/u' - (u''/u')^2\right\} \\ \mathring{u}(u(x,t),t) = u''' + (u'')^2/u' - f(u)u''/u' + f'(u)/u' \end{cases}$$

(40) $$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - c_3(x,t)\right]\left\{\hat{u}_k(v(x,t),t) - v'(x,t)\right\} = 0 \\ c_3(x,t) = f'(v) + \left(v' + \hat{u}_k(v,t)\right)\hat{u}_k''(v,t) \end{cases}$$

又定理5において(29)～(31)をみたす $u_{k0}(x) \in N$ がある事は別に保障しなければならないが、ここでは省略した。詳しくは[2]を参照して下さい。

References

[1] Kolmogorov, A., I. Petrovskii and N. Piskunov, Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a un probleme biologique, Bulletin de l'Universite d'Etat a Moscou, Serie International. Vol. I Section A (1937), 1-25.

[2] Kametaka, Y., On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov type, (to appear in Osaka J. Math.)