数理解析研究所講究録
259巻 1976年 158-164

フローグラフの分枝数について

早大理工　夜久竹夫

はじめにグラフ（有向グラフ）の分枝数、ついで生成出－樹木の概念を拡張して生成出－グラフを定義する．この小論では与えられたグラフに対する分枝数最小の生成出－グラフについて論じる。

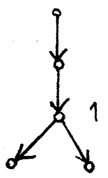
<u>グラフ</u>を G＝（N，E）であらわす，ここで N は <u>node</u> の集合，E は <u>edge</u> の集合である． <u>path</u>， <u>cycle</u>，<u>semi-path</u>， <u>semicycle</u> などの用語は Harary [1] による．node v に対して v に入る（を去る）edge の数を <u>入（出）－次数</u>（in (out)-degree）といい $id(G,v)$（$od(G,v)$）とかく．

定義． G＝（N，E）をグラフとする．node v の <u>分枝数</u> Branch(G,v) は (i) $\mathrm{Branch}(G,v) = od(G,v) - 1$（$od(G,v) \neq 0$ のとき） 又 (ii) $\mathrm{Branch}(G,v) = 0$（$od(G,v) = 0$ のとき）と定める。G の <u>分枝数</u> Branch(G) は

$$\mathrm{Branch}(G) = \sum_{v \in N} \mathrm{Branch}(G,v).$$

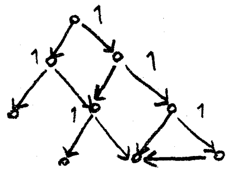
例

G_1



Branch$(G_1) = 1$

G_2

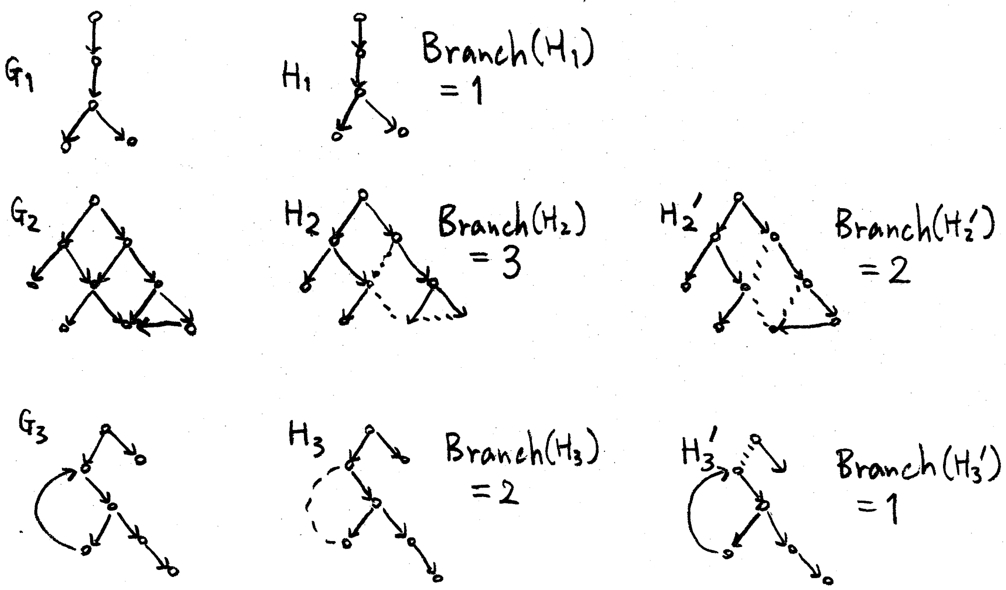


Branch$(G_2) = 5$

生成出－樹木[1]の概念をつぎのように拡張する.

定義. グラフ$H=(N, F)$がグラフ$G=(N, E)$の<u>生成出－グラフ</u>であるとは $id(G, v) \neq 0$であるような全てのGのnode vに対してユニークなedge(u, v) $(u \in N)$がHに存在することである.

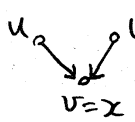
例.



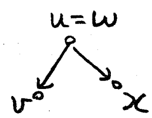
edge の間に次のような関係を導入する。 この関係によるグラフの分割と、分枝数最小の生成出ー樹木との関連を述べる。

定義. $G=(N,E)$ をグラフとする。 G の edge (u,v) と (w,x) が *alternately adjacent* である ($(u,v)\sim(w,x)$ とかく) とは (i) $(u,v)\neq(w,x)$ であって (ii) $u=w$ 又は $v=x$. とする。

図

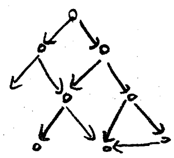


又は



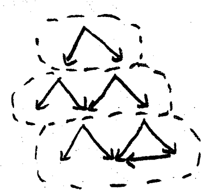
記号 $\overset{*}{\sim}$ により $\sim$ の反射推移閉包をあらわす。グラフ $H=(N,F)$ が *alternate* であるとは任意の E の edge e と e' に対して $e \overset{*}{\sim} e'$ とする。H がグラフ $G=(N,E)$ の*極大な* alternate 部分グラフであるとは F の edge と alternately adjacent な edge が $E-F$ に存在しないことである。

例



G_2

G_2 の極大な alternate 部分グラフの全て



Gの semipath $p=(u_1,v_1)\cdots(u_n,v_n)$ が __alternate__ であるとは

(i) $(u_i, v_i)\sim(u_{i+1}, v_{i+1})$ $\quad (1\le i<n)$

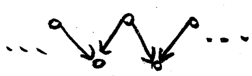
又(ii) $\begin{cases} u_i=u_{i+1} \Rightarrow v_{i+1}=v_{i+2} \\ v_i=v_{i+1} \Rightarrow u_{i+1}=u_{i+2} \end{cases}$ $\quad (1\le i<n-1)$

とする. 又 p が __alternate__ __semicycle__ であるとは上の(i), (ii)に加えて $(u_1,v_1)\sim(u_n,v_n)$ であり次のいずれかが成り立つことである.

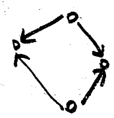
(iii) $v_1\ne v_2$ かつ $v_{n-1}\ne v_n$,

(iii)′ $u_1\ne u_2$ かつ $u_{n-1}\ne u_n$.

例



,



.

__定理1.__ $G_1, G_2, \cdots, G_n$ をグラフGの全ての極大な alternate 部分グラフとし、H_i を G_i の生成出ーグラフとする $(i\le n)$. このとき $\bigcup_{i\le n} H_i$ はGの生成出ーグラフである.

定理2. $G_1, G_2, \cdots, G_n$ をグラフGの全ての極大な alternate 部分グラフとし H_iをG_iの生成出一グラフとする。このとき G_iの任意の生成出一グラフH_i'に対して Branch$(H_i) \leq$ Branch(H_i') ならば

$$\mathrm{Branch}(\bigcup_{i \leq n} H_i) \leq \mathrm{Branch}(H')$$

である。ただし H' はGの任意の生成出一グラフとする。

つぎに 分枝数最小の生成出一グラフを得るアルゴリズムを示す。

アルゴリズムA. Input: グラフ $G=(N,E)$. ただし出次数は最大2(フローグラフ).

Output: グラフ $H=(N,F)$.

Method: 初め $F=\phi$ とする.

```
While G has edges remaining do;
    if G has a node u of out-degree one
      then add the unique edge (u,v) to H and
      delete all edges of the form (w,v) from G;
    else if G has alternate semicycle C
        then find any edge (u,v) in C, add it to H,
        and delete all edges of the form (w,v) from G;
      else find a node v of indegree one, add the
        unique edge (u,v) to H and delete it from G;
```

定理3. $H=(N,F)$ をアルゴリズムAにより出次数最大2のグラフ $G=(N,E)$ から構成されたグラフとする。このときHはGの生成出-グラフで、Gの任意の生成出-グラフ H' に対し

$$\mathrm{Branch}(H) \leqq \mathrm{Branch}(H').$$

Gが alternate であるとき定理が成り立つことが証明できる。したがって任意のグラフに対しても、定理1, 2より証明できる。さらに入次数も最大2のフローグラフについては以下が成り立つ。つぎのアルゴリズムは semi cycle の searching を必要としない。

アルゴリズム B. Input：出次数，入次数とも最大2のグラフ $G=(N,E)$, Out put：グラフ H, Method：初め $H=(N,\phi)$

While G has edges remaining do;
  if G has a node u of out-degree one
    then add the unique edge (u,v) to H, and delete all edges of the form (x,v) from G;
  else find any edge (u,v) in G, add it to H, and delete all edges of the form (x,v) from G;

定理4. 出次数，入次数とも最大2のグラフGからアルゴリズムBにより構成されるグラフをHとする。このときHはGの生成出-グラフでGの任意の生成出-グラフH'に対し

$$\mathrm{Branch}(H) \leqq \mathrm{Branch}(H') .$$

アルゴリズムAおよびBのオーダーはそれぞれ $o(n^3)$，$o(n)$ である，ただし n は node の数。なお、"alternate subgraph" の概念は [2] でプログラムの問題に使われている.

文献

1. F. Harary, "Graph Theory", Addison-Wesley, Reading, MA, 1968.
2. 岩田茂樹，「goto 文最少のプログラムについて」，本講究録，1975.