数理解析研究所講究録
260巻 1976年 59-106

$SL(n;\mathbb{C})$ の Eisenstein 級数と概均質ベクトル空間

東大 理院 佐藤文広

Eisenstein級数の函数等式について、Langlandsの展開した理論が存在している。いま、その函数等式を数論的な方法で得ることを考えてみよう。$SL(2,\mathbb{R})$, $SL(2,\mathbb{C})$ などについては、よく知られている。rankの高い群については、$SL(n;\mathbb{R})$ に関して、Selbergの仕事を受けて Maass, A.Terras [6][10][11] の研究がなされている。ここでは、Maassの方法を概均質ベクトル空間の立場から見直して、ある種の多変数Dirichlet 級数の函数等式と解析接続を証明する。(p24. 定理) その最も標準的な場合として、$SL(n;\mathbb{C})$ の不連続群 $SL(n;O_K)$ (O_K は類数1の虚二次体の整数環) に関する Eisenstein 級数の函数等式が得られる。

概均質ベクトル空間のZeta函数の理論は、既約な相対不変式が唯一つに限られる(勿論、定数倍を無視し)場合を除いて、一般的な議論は存在していない。ここで扱う多変数のDirichlet 級数は、複

数の既約な相対不変式をもつ空間のZeta函数の一例となっている。

§1. 概均質ベクトル空間 $(G_{\mathbb{P}}, V)$ の定義

m, n $(1 \leq m < n)$ を自然数。$M(\nu, \mathbb{C}) \ni A$ に対し、$|A| = \det A$, $\|A\| = |\det A|$。$M(\nu; \mathbb{C}) \ni A$, $M(\nu, \mu; \mathbb{C}) \ni B$ に対し、$A[B] = {}^t\bar{B}AB$。

ν 個の自然数の組 $\mathbb{P} = (p_1, \cdots, p_\nu)$ は、$p_1 + \cdots + p_\nu = m$ のとき、(rank ν の) m の分割という。$\mathfrak{S}_\nu$ を ν 次対称群として、$\mathfrak{S}_\nu$ の $\mathbb{P}$ への作用を、

$$^{\sigma}\mathbb{P} = (p_{\sigma(1)}, \cdots, p_{\sigma(\nu)}) \quad \left(\sigma = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & \nu \\ \sigma(1), & \sigma(2), & \cdots, & \sigma(\nu) \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\nu\right)$$

で定める。

$$k_{\mathbb{P}}^{(i)} = p_1 + \cdots + p_\nu, \quad k_{\mathbb{P}}^{*(i)} = p_{\nu-i+1} + \cdots + p_\nu \quad (i = 1, \cdots, \nu)$$

$$E_{\mathbb{P}}^{(i)} = \begin{pmatrix} E_{k_{\mathbb{P}}^{(i)}} \\ O^{(k_{\mathbb{P}}^{(i)}, m-k_{\mathbb{P}}^{(i)})} \end{pmatrix}, \quad E_{\mathbb{P}}^{*(i)} = \begin{pmatrix} O^{(k_{\mathbb{P}}^{*(i)}, m-k_{\mathbb{P}}^{*(i)})} \\ E_{k_{\mathbb{P}}^{*(i)}} \end{pmatrix}$$

とおく。ただし、E_ν で ν 次単位行列、$O^{(\nu, \mu)}$ で ν 行 μ 列の零行列を表わした。

$GL(m; \mathbb{C})$ の parabolic 部分群 $B_{\mathbb{P}}$ を次のようにとる。

$$B_{\mathbb{P}} = \left\{ \begin{pmatrix} b_{11} & & O \\ \vdots & \ddots & \\ b_{\nu 1} & \cdots & b_{\nu\nu} \end{pmatrix} \in GL(m; \mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{matrix} b_{ij} \in M(p_i, p_j; \mathbb{C}) \\ b_{ij} = 0 \ (i < j) \end{matrix} \right\}$$

H を n 次正定値 Hermete 行列、$U(H)$ を H の unitary 群、すなわち、

$$U(H) = \{ g \in GL(m; \mathbb{C}) \mid {}^t\bar{g} H g = H \}$$

$\tilde{U}(H)=\{(g,h)\in GL(n;\mathbb{C})\times GL(n;\mathbb{C}) \mid {}^t h H g = H\}$とおくと，$\tilde{U}(H)\cong GL(n;\mathbb{C})$で，

$$U(H)\ni g \longmapsto (g,\bar{g})\in \tilde{U}(H)$$

によって，$U(H)$は$\tilde{U}(H)$の$\mathbb{R}$-有理点のなすLie群とみなせる。

さて，我々の扱う概均質ベクトル空間は，次の空間である。

$G_{\mathbb{P}}=\tilde{U}(H)\times B_{\mathbb{P}}\times B_{\mathbb{P}}$，$V=M(n,m;\mathbb{C})\times M(n,m;\mathbb{C})$

$G_{\mathbb{P}}$のV上の表現ρを

$\rho(h_1,h_2,b_1,b_2)(x_1,x_2)=(h_1x_1{}^tb_1,\ h_2x_2{}^tb_2)$

$\quad((h_1,h_2)\in\tilde{U}(H),\ b_1,b_2\in B_{\mathbb{P}},\ x_1,x_2\in M(n,m;\mathbb{C}))$

で定義すれば，$(G_{\mathbb{P}},\rho,V)$は，正則概均質ベクトル空間となっている。

$i=1,\cdots,\nu$に対して，

$P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x_1,x_2)=|{}^tx_2Hx_1[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]| \qquad (x_1,x_2)\in V$

$\chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(g)=|b_1[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|\cdot|b_2[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]| \quad g=(h_1,h_2,b_1,b_2)\in G_{\mathbb{P}}$

とおけば，

$$P_{\mathbb{P}}^{(i)}(\rho(g)(x_1,x_2))=\chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(g)P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x_1,x_2)$$

が成立つ。すなわち，$P_{\mathbb{P}}^{(i)}$は，指標$\chi_{\mathbb{P}}^{(i)}$に対応する相対不変式であり，さらに，任意の相対不変式は，$P_{\mathbb{P}}^{(1)},\cdots,P_{\mathbb{P}}^{(\nu)}$の積として表わされる。

特異点集合は，

$$S_{\mathbb{P}} = \bigcup_{i=1}^{k} S_{\mathbb{P}}^{(i)}, \quad S_{\mathbb{P}}^{(i)} = \{(x_1, x_2) \in V \mid P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x_1, x_2) = 0\}$$

で与えられる。言いかえれば、$V - S_{\mathbb{P}}$ は、$G_{\mathbb{P}}$ の単一の軌道である。

V 上に内積

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}({}^t x_1 \cdot y_2 + {}^t x_2 \cdot y_1)$$

を考え、この内積で、V と双対空間 V^* とを同一視する。このとき反傾表現 ρ^* は、

$$\rho^*(h_1, h_2, b_1, b_2)(y_1, y_2) = ({}^t h_2^{-1} y_1 b_2^{-1}, {}^t h_1^{-1} y_2 b_1^{-1})$$

$$(h_1, h_2) \in \widehat{U}(H), \quad b_1, b_2 \in B_{\mathbb{P}}, \quad y_1, y_2 \in M(n, m; \mathbb{C})$$

となる。すなわち、

$$\langle \rho(g)(x_1, x_2), \rho^*(g)(y_1, y_2) \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle$$

$$g \in G_{\mathbb{P}}, \quad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$$

を満足する。($G_{\mathbb{P}}, \rho^*, V$) も正則概均質ベクトル空間であり、$i = 1, \cdots, k$ に対し、

$$Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(y_1, y_2) = |{}^t y_2 H^{-1} y_1 [E_{\mathbb{P}}^{*(i)}]| \quad (y_1, y_2) \in V$$

$$\chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}(g) = |b_1[E_{\mathbb{P}}^{*(i)}]|^{-1} |b_2[E_{\mathbb{P}}^{*(i)}]|^{-1} \quad g = (h_1, h_2, b_1, b_2) \in G_{\mathbb{P}}$$

とおけば、

$$Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(\rho^*(g)(y_1, y_2)) = \chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}(g) Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(y_1, y_2)$$

が成立ち、任意の相対不変式は、$Q_{\mathbb{P}}^{(1)}, \cdots, Q_{\mathbb{P}}^{(i)}$ の積として表わされる。

$$S_{\mathbb{P}}^{*} = \bigcup_{i=1}^{\nu} S_{\mathbb{P}}^{*(i)}, \quad S_{\mathbb{P}}^{*(i)} = \{ (Y_1, Y_2) \in V \mid Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(Y_1, Y_2) = 0 \}$$

が、$(G_{\mathbb{P}}, \rho^*, V)$ の特異点集合である。

相対不変式に対応する指標の間には、

$$\chi_{\mathbb{P}}^{(i)} \cdot (\chi_{\mathbb{P}}^{*(\nu-i)})^{-1} = \chi_{\mathbb{P}}^{(\nu)} = (\chi_{\mathbb{P}}^{*(\nu)})^{-1} \quad (i = 1, \cdots, \nu-1)$$

の関係がある。

$G_{\mathbb{P}}, V$ の real structure を、

$$(G_{\mathbb{P}})_{\mathbb{R}} = U(H) \times B_{\mathbb{P}} \ni (h, b) \longmapsto (h, \bar{h}, b, \bar{b}) \in G_{\mathbb{P}}$$

$$V_{\mathbb{R}} = M(n, m; \mathbb{C}) \ni X \longmapsto (X, \bar{X}) \in V$$

で定める。このとき、$(G_{\mathbb{P}}, \rho, V)$, $(G_{\mathbb{P}}, \rho^*, V)$ は、$\mathbb{R}$ 上定義された概均質ベクトル空間と考えられる。表現、相対不変式、指標の $\mathbb{R}$-有理点の空間への制限も同じ記号で表わすことにする。すなわち、

$$\rho(h, b) X = h \cdot X \cdot {}^t b, \quad \rho^*(h, b) Y = {}^t \bar{h}^{-1} Y \bar{b}_2^{-1}$$

$$P_{\mathbb{P}}^{(i)}(X) = H[X \cdot E_{\mathbb{P}}^{(i)}], \quad Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(Y) = H^{-1}[Y \cdot E_{\mathbb{P}}^{*(i)}]$$

$$\chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(h, b) = \| b [E_{\mathbb{P}}^{(i)}] \|^2, \quad \chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}(h, b) = \| b [E_{\mathbb{P}}^{*(i)}] \|^{-2}$$

$$(X, Y \in M(n, m; \mathbb{C}), \ (h, b) \in U(H) \times B_{\mathbb{P}})$$

又、内積 $\langle \, , \, \rangle$ の $V_{\mathbb{R}}$ への制限は、

$$\langle X, Y \rangle = \langle (X, \bar{X}), (Y, \bar{Y}) \rangle = \mathrm{Re}\, \mathrm{Tr}({}^t X \cdot \bar{Y})$$

$$(X, Y \in M(n, m; \mathbb{C}))$$

であり、これで、$V_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{R}}^*$ とが同一視できる。特異点集合につい

では、

$$(S_{\mathbb{P}})_{\mathbb{R}} = (S_{\mathbb{P}}^{*})_{\mathbb{R}} = (S_{\mathbb{P}}^{(K)})_{\mathbb{R}} = (S_{\mathbb{P}}^{*(K)})_{\mathbb{R}}$$

$$= \{ X \in M(n, m : \mathbb{C}) = V_{\mathbb{R}} \mid \operatorname{rank} X \lneq m \}$$

となる。これは、$\mathbb{P}$に依存しないので、単にSと書こう。

以下では、$\mathbb{R}$－有理点の空間のみを考えるから、$(\ )_{\mathbb{R}}$を省略する。

§2、ここでは、後に必要となる幾かの積分計算について述べる。

$H^{\circ} = \{ W \in M(m : \mathbb{C}) \mid {}^{t}\overline{W} = W > 0 \}$ 。

$\pi : V - S \longrightarrow H^{\circ}$ (resp. $\pi^{*} : V - S \longrightarrow H^{\circ}$) を $\pi(X) = H[X]$ (resp. $\pi^{*}(X) = H^{-1}[X]$) と定義する。

$H^{\circ} \ni W = (w_{ij})$ に対し、$dW = \prod_{i=1}^{m} dw_{ii} \prod_{i>j} d\mathrm{Re}\, w_{ij} \cdot d\mathrm{Im}\, w_{ij}$ 。

$H^{\circ} \ni W_0$ を定めたとき、$dX = \Theta_{W_0} \wedge \pi^{-1}(dW)$ (resp. $dX = \Theta_{W_0}^{*} \wedge \pi^{*-1}(dW)$) となる form Θ_{W_0} (resp. $\Theta_{W_0}^{*}$) が、$\pi^{-1}(W_0)$ (resp. $\pi^{*-1}(W_0)$) 上に unique に定まる。Θ_{W_0} (resp. $\Theta_{W_0}^{*}$) で定まる $\pi^{-1}(W_0)$ (resp. $\pi^{*-1}(W_0)$) 上の measure を、$|\Theta_{W_0}|$ (resp. $|\Theta_{W_0}^{*}|$) と記す。

<u>補題1.</u> (i) $$\int_{\pi^{-1}(W_0)} |\Theta_{W_0}| = |H|^{-m} \cdot |W_0|^{n-m} \cdot \frac{\pi^{\frac{m(2n-m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(n-m+i)}$$

(ii) $$\int_{\pi^{*-1}(W_0)} |\Theta_{W_0}^{*}| = |H|^{m} |W_0|^{n-m} \cdot \frac{\pi^{\frac{m(2n-m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(n-m+i)}$$

この積分計算はよく知られている。例えば、Siegel [9] で、対称行列について行っている計算法を応用する。詳細は略す。

$b\in B_{\mathbb{P}}$ を

$$b=\begin{pmatrix} b_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & b_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{p_1} & & 0\\ & \ddots & \\ b_{ij} & & E_{p_r}\end{pmatrix} \quad b_i=b_{ij}\in GL(p_i:\mathbb{C}),\ b_{ij}\in M(p_i,p_j:\mathbb{C})$$

と分解する。b_{ij} $(i\geqq j)$ を $b_{ij}=(b^{(k_{ij},\ell_{ij})})$ と成分表示して、

$$db=\prod_{i=1}^{r}\|b_i\|^{-2m+4k_{\mathbb{P}}^{(i-1)}}\prod_{i\geqq j}db_{ij}$$

$$db_{ij}=\prod_{\substack{1\leqq k_{ij}\leqq p_i\\ 1\leqq \ell_{ij}\leqq p_j}} d\,\mathrm{Re}\, b^{(k_{ij},\ell_{ij})}\, d\,\mathrm{Im}\, b^{(k_{ij},\ell_{ij})}$$

$$k_{\mathbb{P}}^{(0)}=0$$

とおくと、db は、$B_{\mathbb{P}}$ の right invariant measure を与える。

$W_0\in\mathcal{H}^0$ に対し、

$$(B_{\mathbb{P}})_{W_0}=\{\,b\in B_{\mathbb{P}} \mid \bar{b}\,W_0\,{}^tb=W_0\,\}$$

$$(B_{\mathbb{P}})^{*}_{W_0}=\{\,b\in B_{\mathbb{P}} \mid {}^tb\,W_0\,\bar{b}=W_0\,\}$$

とおく。$(B_{\mathbb{P}})_{W_0}$ (resp. $(B_{\mathbb{P}})^{*}_{W_0}$) は、$(B_{\mathbb{P}})_{E_m}$ (resp. $(B_{\mathbb{P}})^{*}_{E_m}$) と共役である。簡単な計算で、

$$(B_{\mathbb{P}})_{E_m}=(B_{\mathbb{P}})^{*}_{E_m}=\left\{\begin{pmatrix} A_1^{(p_1)} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_r^{(p_r)}\end{pmatrix}\ \middle|\ A_i\in U(E_{p_i})\right\}$$

$$\cong U(E_{p_1})\times\cdots\times U(E_{p_r}) \qquad 。$$

$B_{\mathbb{P}}$ を $\mathcal{H}^0$ に、$W\longmapsto \bar{b}\,W\,{}^tb$ (resp. $W\longmapsto {}^tb^{-1}\,W\,\bar{b}^{-1}$) と作用させる。$\mathcal{H}^0$ 上の $B_{\mathbb{P}}$-相対不変測度を

$$\widetilde{dW}=\prod_{i=1}^{r-1}|W[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{-p_i-p_{i+1}}\cdot|W|^{-p_r}\,dW$$

(resp. $\widetilde{dW}^* = \prod_{i=1}^{k-1} |W[E_{\mathbb{P}}^{*(i)}]|^{-p_{k-i}-p_{k-i+1}} \cdot |W|^{-l_1} dW$)

と定める。このとき，compact群 $(B_{\mathbb{P}})_{W_0}$ (resp. $(B_{\mathbb{P}})^*_{W_0}$) の Haar measure $d\nu_{W_0}$ (resp. $d\nu^*_{W_0}$) を

$$db = \widetilde{dW} \cdot d\nu_{W_0} \quad (\text{resp. } db = \widetilde{dW}^* \cdot d\nu^*_{W_0})$$

を満足するように正規化できる。

補題2.
$$\int_{(B_{\mathbb{P}})_{W_0}} d\nu_{W_0} = \int_{(B_{\mathbb{P}})^*_{W_0}} d\nu^*_{W_0} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} p_i^2 + \frac{m}{2}}}{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)} \quad (W_0 \in \mathcal{H}^0)$$

(∵) 積分値が W_0 のとり方によらないことは，db, $\widetilde{dW}$, $\widetilde{dW}^*$ の，$B_{\mathbb{P}}$-相対不変性からの結論である。よって，$W_0 = E_m$ としてよい。

$\pi_i : M(p_i; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_0^{(p_i)} = \{ W \in M(p_i; \mathbb{C}) \mid {}^t\overline{W} = W > 0 \}$ を，$\pi_i(X) = \overline{X}{}^t X$ で定義し，$dX = \theta_i \wedge \pi_i^{-1}(dW)$ $(X \in M(p_i; \mathbb{C}),\ W \in \mathcal{H}_0^{(p_i)})$ なる form θ_i によって $U(E_{p_i})$ 上の measure $|\theta_i|$ を定める。

$(B_{\mathbb{P}})_{E_m} = (B_{\mathbb{P}})^*_{E_m} = U(E_{p_1}) \times \cdots \times U(E_{p_k})$ で，実は，

$$d\nu_{E_m} = d\nu^*_{E_m} = |\theta_1| \cdots |\theta_k|$$

である。従って，補題1によって求める積分値を得る。 //

$V - S$ 上の $G_{\mathbb{P}}$-相対不変測度，$\omega_{\mathbb{P}}(X)$, $\omega^*_{\mathbb{P}}(X)$ を，

$$\omega_{\mathbb{P}}(X) = \prod_{i=1}^{k} P_{\mathbb{P}}^{(i)}(X)^{-p_i - p_{i+1}} dX \qquad (p_{k+1} = n-m)$$

$$\omega^*_{\mathbb{P}}(X) = \prod_{i=1}^{k} Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(X)^{-p_{k-i}-p_{k-i+1}} dX \qquad (p_0 = n-m)$$

$$X = (x_{ij}) \in M(n, m; \mathbb{C}), \quad dX = \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} d\mathrm{Re}\, x_{ij}\, d\mathrm{Im}\, x_{ij}$$

とする。

補題3

(i) $$\int_{V-S} \prod_{i=1}^{k} P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i} \cdot e^{-\pi \mathrm{tr} H[X]} \omega_{\mathbb{P}}(x)$$
$$= \frac{\pi^{-\sum_{i=1}^{k} k_{\mathbb{P}}^{(i)} s_i + mn}}{|H|^m \cdot \prod_{i=1}^{m} \Gamma(n-m+i)} \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=0}^{p_i-1} \Gamma(s_i+\cdots+s_k - k_{\mathbb{P}}^{*(k-i)} - j)$$

(ii) $$\int_{V-S} \prod_{i=1}^{k} Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i}\, e^{-\pi \mathrm{tr} H^{-1}[x]} \omega_{\mathbb{P}}^{*}(x)$$
$$= \frac{|H|^m \cdot \pi^{-\sum_{i=1}^{k} k_{\mathbb{P}}^{*(i)} s_i + mn}}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(n-m+i)} \cdot \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=0}^{p_{k-i+1}-1} \Gamma(s_i+\cdots+s_k - k_{\mathbb{P}}^{(k-i)} - j)$$

(ii) 全く同様だから(i)のみ示す。

$\omega(x) = |W|^{m-n}\, \widetilde{dW} \cdot |\theta_W|$。補題1によって、

$$積分 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}m(2n-m+1)}}{|H|^m \cdot \prod_{i=1}^{m}\Gamma(n-m+i)} \int_{\mathcal{H}^\circ} e^{-\pi \mathrm{tr} W} \prod_{i=1}^{k} |W[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{s_i}\, \widetilde{dW}$$

$\mathcal{H}^\circ \ni W$ を、$W = \begin{pmatrix} W^{(m-1)} & 0 \\ 0 & w_m \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} E_{m-1} & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ ($\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{m-1}, w_m \in \mathbb{R}_+$, $W^{(m-1)} = {}^t\overline{W^{(m-1)}} > 0$) と分解すると、$p_k \geqq 2$ ならば、

$$\widetilde{dW} = |W^{(m-1)}| \cdot \widetilde{dW^{(m-1)}} \cdot d\mathbf{a} \cdot w_m^{-p_k}\, dw_m \quad 。$$

ここで、$\widetilde{dW^{(m-1)}}$ は、$m-1$ の分割 $(p_1, \cdots, p_{k-1}, p_k - 1)$ に関して、$\widetilde{dW}$ と同様に構成する。又、$\mathbf{a} = {}^t(a_1, \cdots, a_{m-1})$ に対し、$d\mathbf{a} = \prod_{i=1}^{m-1} d\mathrm{Re}\, a_i\, d\mathrm{Im}\, a_i$ とした。

$$\therefore \int_{\mathcal{H}^\circ} e^{-\pi \mathrm{tr} W} \prod_{i=1}^{k} |W[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{s_i}\, \widetilde{dW}$$

$$= \int_{\mathcal{H}_0^{(m-1)}} e^{-\pi \operatorname{tr} W^{(m-1)}} \prod_{i=1}^{m} |W^{(m-1)}[E_{\mathbb{P}'}^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dW}^{(m-1)}$$

$$\times \int_{\mathbb{C}^{m-1}} e^{-\pi \operatorname{tr} W^{(m-1)}[a]} \cdot |W^{(m-1)}| \, da \cdot \int_0^\infty w_m^{s_k - p_k} e^{-\pi w_m} dw_m$$

$$= \pi^{-(s_k - p_k + 1)} \Gamma(s_k - p_k + 1) \int_{\mathcal{H}_0^{(m-1)}} e^{-\pi \operatorname{tr} W^{(m-1)}} \prod_{i=1}^{k} |W^{(m-1)}[E_{\mathbb{P}'}^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dW}^{(m-1)}$$

ただし、$\mathbb{P}' = (p_1, \cdots, p_{k-1}, p_k - 1)$。

$p_k = 1$ の場合には、同様の考察で、$\mathbb{P}' = (p_1, \cdots, p_{k-1})$ に対し、

$$\int_{\mathcal{H}^0} e^{-\pi \operatorname{tr} W} \prod_{i=1}^{k} |W[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dW}$$

$$= \pi^{-s_k} \Gamma(s_k) \int_{\mathcal{H}_0^{(m-1)}} e^{-\pi \operatorname{tr} W^{(m-1)}} \prod_{i=1}^{k-2} |W^{(m-1)}[E_{\mathbb{P}'}^{(i)}]|^{s_i} \cdot |W^{(m-1)}|^{s_{k-1} + s_k - 1} \widetilde{dW}^{(m-1)}$$

この2つの漸化式によって、帰納的に(i)が得られる。 //

§3. 相対不変式の複素巾の満足する函数等式

この節では、$\prod_{i=1}^{\nu} P_{\mathfrak{p}}^{(i)}(x)^{s_i}$, $\prod_{i=1}^{\nu} Q_{\mathfrak{p}}^{(i)}(x)^{s_i}$ $((s_1, \cdots, s_\nu) \in \mathbb{C}^\nu)$ が、2つ Type の函数等式を持つことを示す。第一の Type は、Fourier 変換に基くものであり、オ二の Type は、本質的には、$SL(n; \mathbb{C})$ の帯球函数の函数等式である。

$\mathcal{S}(V)$ を V 上の急減少函数の空間とする。$s = (s_1, \cdots, s_\nu) \in \mathbb{C}^\nu$、$f \in \mathcal{S}(V)$ に対して、

$$\Phi_{\mathfrak{p}}(s, f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^{\nu} P_{\mathfrak{p}}^{(i)}(x)^{s_i} f(x)\, \omega_{\mathfrak{p}}(x)$$

$$\Phi_{\mathfrak{p}}^{*}(s, f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^{\nu} Q_{\mathfrak{p}}^{(i)}(x)^{s_i} f(x)\, \omega_{\mathfrak{p}}^{*}(x)$$

と定義すれば、$\Phi_{\mathfrak{p}}(s, f)$ (resp. $\Phi_{\mathfrak{p}}^{*}(s, f)$) は、$Re(s_i) > p_i + p_{i+1}$ (resp. $Re(s_i) > p_{\nu-i} + p_{\nu-i+1}$) $(i = 1, \cdots, \nu)$ で絶対収束し、さらに、$\mathbb{C}^\nu$ 全体に有理型函数として解析接続される (cf. [~~?~~ 1])。

$f \in \mathcal{S}(V)$ の Fourier 変換を、

$$\hat{f}(x) = \int_V f(y)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle}\, dy$$

で定義する。

<u>命題1</u>. 次の函数等式が成立つ。

$$\Phi_{\mathfrak{p}}(s, \hat{f}) = |H|^{m}\, \pi^{-2\sum_{i=1}^{\nu} k_{\mathfrak{p}}^{(i)} s_i + m(n-1)}$$
$$\times \prod_{i=1}^{\nu} \prod_{j=0}^{p_i - 1} \sin \pi(s_i + \cdots + s_\nu - m k_{\mathfrak{p}}^{(i)} - j)\, \Gamma(s_i + \cdots + s_\nu - n + k_{\mathfrak{p}}^{(i)} - j)\, \Gamma(s_i + \cdots + s_\nu - k_{\mathfrak{p}}^{*(\nu-i)} - j)$$
$$\times \Phi_{\mathfrak{p}}^{*}(s_{\nu-1}, \cdots, s_1, n - s_1 - \cdots - s_\nu : f)$$

この Type の函数等式は、[4]、[7] で論じられている。空間 (G_P, V) は、そこでの仮定を満足しないが、[7] の第2章の議論を修正して、$\Phi_P(s; \hat{f}) = c(s)\, \Phi_P^*(s_{r-1}, \cdots, s_1, n-s_1-\cdots-s_r ; f)$ なる $c(s)$ の存在を示せる。([7] p 158、例9は関係が深い)。$c(s)$ の具体的な決定は、補題3の積分を利用すれば、

$$\int_V e^{-\pi \mathrm{tr}\, T(y)} e^{2\pi i \langle x, y\rangle} dy = |H|^{m} e^{-\pi \mathrm{tr}\, T(x)}$$

により実行できる。

Micro local calculus の方法によって、(G_P, V) を含む一般的な空間について、相対不変式の複素巾の Fourier 変換を求めることは、室氏によって研究されている([5])。

第二の Type の函数等式を記述するため、次の変数変換を行う。

$$(\sharp)\begin{cases} s_1 = z_2 - z_1 + \dfrac{p_1+p_2}{2} \\ s_2 = z_3 - z_2 + \dfrac{p_2+p_3}{2} \\ \cdots\cdots \\ s_{r-1} = z_r - z_{r-1} + \dfrac{p_{r-1}+p_r}{2} \\ s_r = \quad -z_r + \dfrac{p_r+n-m}{2} \end{cases} \qquad (\flat)\begin{cases} s_1 = z_r - z_{r-1} + \dfrac{p_{r-1}+p_r}{2} \\ s_2 = z_{r-1} - z_{r-2} + \dfrac{p_{r-2}+p_{r-1}}{2} \\ \cdots\cdots \\ s_{r-1} = z_2 - z_1 + \dfrac{p_1+p_2}{2} \\ s_r = z_1 \quad + \dfrac{p_1+n-m}{2} \end{cases}$$

$\Phi_P(s, f)$ (resp $\Phi_P^*(s; f)$) を変数変換 ($\sharp$) (resp ($\flat$)) によって、$z_1, \cdots, z_r$ の函数とみたとき、$\Phi_P(z_1, \cdots, z_r ; f)$ (resp. $\Phi_P^*(z_1, \cdots, z_r ; f)$) と記すことにする。

命題2.

$\widetilde{C}_0^\infty(V-S)=\{f\in C_0^\infty(V-S)\mid \mathrm{supp}\, f$ は compact, $f(x^t k)=f(x)$, ${}^\forall x\in V-S,\ k\in U(E_m)\}$

とおく。$f\in\widetilde{C}_0^\infty(V-S)$ ならば、任意の $\sigma=\begin{pmatrix}1, & \cdots, & k\\ \sigma(1), & \cdots, & \sigma(k)\end{pmatrix}\in\mathfrak{S}_k$ について、

$$\Phi_P(z_1,\cdots,z_k:f)=\Phi_{P^\sigma}(z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(k)}:f)$$

$$\Phi_P^*(z_1,\cdots,z_k:f)=\Phi_{P^\sigma}^*(z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(k)}:f)$$

が成立つ。

証明のため、次の2つの補題を用意する。

補題4 (Harish-Chandra)

$A=\left\{\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}a_i\in\mathbb{R}_+\\ a_1\cdots a_m=1\end{matrix}\right\}$. $A\ni a=\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m\end{pmatrix}$ に対し、$e^{\rho(\log a)}=\prod_{i=1}^m a_i^{-(m-2i+1)}$ とする。$N=\left\{\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ n_{ij} & & 1\end{pmatrix}\;\middle|\; n_{ij}\in\mathbb{C}\right\}$. N 上の measure を $dn=\prod_{i>j} d\mathrm{Re}\, n_{ij}\, d\mathrm{Im}\, n_{ij}$ で定める。

$SL(m:\mathbb{C})$ 上の台が compact な連続函数 f について、

$$F_f(a)=e^{\rho(\log a)}\int_N f(an)\,dn \qquad a\in A$$

とおく。このとき、f が、任意の $k\in SU(m)$ に対し、

$$f(kgk^{-1})=f(g) \qquad g\in SL(m:\mathbb{C})$$

を満足すれば、

$$F_f(a^\sigma)=F_f(a) \qquad \sigma\in\mathfrak{S}_m$$

但し、$\sigma=\begin{pmatrix}1, & \cdots, & m\\ \sigma(1), & \cdots, & \sigma(m)\end{pmatrix}$ について、

$$a=\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}a_{\sigma(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{\sigma(m)}\end{pmatrix}=a^\sigma$$

(∵) 半単純 Lie 群についての一般的な定理 (例えば [3] Ch.X. Theorem 1.15) を $SL(m;\mathbb{C})$ について書き下しただけである。//

<u>補題5</u>. $f \in \tilde{C}_0^\infty(V-S)$. $V-S \ni X_0$ を $H[X_0]=E_m$ ととる。dh を $U(H)$ 上の Haar measure とし、$\int_{U(H)} dh = 1$ と正規化する。

このとき $f_t(g) = \int_{U(H)} f(hX_0{}^t g \cdot t)\,dh \quad (t \in \mathbb{R}_+,\ g \in SL(m;\mathbb{C}))$ と定義すると、$f_t(g)$ は、$SL(m;\mathbb{C})$ 上の台が compact な連続函数で $f_t(kgk^{-1}) = f(g) \quad (k \in SU(m),\ g \in SL(m;\mathbb{C}))$ を満足する。

(∵) f_t が連続であることは明らか。$U(H)\cdot \mathrm{supp} f = C$ とおくと C は $V-S$ の compact set で

$$\mathrm{supp}(f_t) \subset \{ g \in SL(m;\mathbb{C}) \mid X_0 t\, {}^t g \in C \}$$

この右辺は compact. ∴ $\mathrm{supp}(f_t)$ も compact。

$$f_t(kgk^{-1}) = \int_{U(H)} f(hX_0{}^t k^{-1}{}^t g \cdot t\, {}^t k)\,dh.$$

$k \in SU(m)$ より $H[X_0{}^t k^{-1}] = E_m$。よって $h_0 X_0 = X_0{}^t k^{-1}$ となる $h_0 \in U(H)$ が存在する。

$$\therefore f_t(kgk^{-1}) = \int_{U(H)} f(hh_0 X_0{}^t g \cdot t\, {}^t k)\,dh$$
$$= \int_{U(H)} f(hX_0{}^t g \cdot t)\,dh = f_t(g)$$

//

命題2の証明にかえる。

$\mathbb{R}_+$ を、$\mathbb{R}_+ \ni t = \begin{pmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & t \end{pmatrix}$ と同一視する。

$$B^+(m) = \mathbb{R}_+ \times A \cdot N = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ n_{ij} & & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} t \in \mathbb{R}_+ \quad a_1 \cdots a_m = 1 \\ a_i \in \mathbb{R}_+ \quad n_{ij} \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

積分 $\Phi_{\mathbb{P}}(z:f)$ を群 $B^+(m)$ 上の積分に書きかえよう。

任意の $h \in U(H)$ に対して、

$$\Phi_{\mathbb{P}}(s_1, \cdots s_r : f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^{r} P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i} \cdot f(hx)\, \omega_{\mathbb{P}}(x)\text{。}$$

$U(H)$ 上で積分すると、

$$\Phi_{\mathbb{P}}(s_1, \cdots, s_r : f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^{r} P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i - p_i - p_{i+1}} \int_{U(H)} f(hx)\, dh\, dx.$$

被積分函数は $U(H)$-不変であるから、

$$\int_{U(H)} f(hx)\, dh = f_1 \circ \pi(x) \qquad (x \in V-S)$$

を満たす $f_1 \in C_0^\infty(\mathcal{H}_0)$ が存在し、補題1より、

$$\Phi_{\mathbb{P}}(s_1, \cdots s_r : f) = |H|^{-m} \cdot \frac{\pi^{\frac{m}{2}(2n-m+1)}}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(n-m+i)} \int_{\mathcal{H}^0} \prod_{i=1}^{r} |w[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{s_i} f_1(w)\, \widehat{dw}$$

さて、$\psi : B^+(m) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0$ なる homeomorphism を $\psi(b) = \bar{b}^t b$ で定義する。$d^\times t = \dfrac{dt}{|t|}$、$da = \prod_{i=1}^{m-1} \dfrac{da_i}{|a_i|}$ を、それぞれ $\mathbb{R}_+$、A 上の Haar measure とする。このとき、

$$\psi^*(\widehat{dw}) = 2^m \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i - 1} a_{k_{\mathbb{P}}^{(i)} - j}^{-2(k_{\mathbb{P}}^{*(r-i)} + k_{\mathbb{P}}^{*(r-i+1)})} d^\times t\, da\, dn\text{。}$$

又、

$$\prod_{i=1}^{r} |w[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{s_i} = t^{-2\sum_{i=1}^{r} p_i z_i + m(n+m)} \times \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i - 1} a_{k_{\mathbb{P}}^{(i)} - j}^{-2z_i + (k_{\mathbb{P}}^{*(r-i)} + k_{\mathbb{P}}^{*(r-i+1)})}$$

$$\therefore \Phi_P(z_1,\cdots,z_k : f) = \frac{2^m \pi^{\frac{m}{2}(2n-m+1)}}{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(n-m+i)} \cdot |H|^{-m} \int_{\mathbb{R}_+} t^{-2\sum_{i=1}^{k} p_i z_i + m(n+m)} d^\times t$$

$$\int_A \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_P^{(i)}-j}^{-2z_i-(k_P^{*(k-i)}+k_P^{*(k-i+1)})}\, da \int_N f_1(t\cdot a\,{}^t n\, n a t)\, dn .$$

さて、$\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_P^{(i)}-j}^{-2z_i-(k_P^{*(k-i)}+k_P^{*(k-i+1)})} \cdot e^{-\rho(\log a)}$

$$= \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_P^{(i)}-j}^{-2z_i-(k_P^{*(k-i)}+k_P^{*(k-i+1)})+\{m-2(k_P^{(i)}-j)+1\}}$$

$$= \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_P^{(i)}-j}^{-2z_i-p_i+2j} .$$

よって、f_1 の定義にもどれば、

$$\Phi_P(z_1,\cdots,z_k : f) = \frac{2^m \pi^{\frac{m}{2}(2n-m+1)}}{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(n-m+i)} \cdot |H|^{-m} \int_{\mathbb{R}_+} t^{-2\sum_{i=1}^{k} p_i z_i + m(n+m)} d^\times t$$

$$\times \int_A \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_P^{(i)}-j}^{-2z_i-p_i+2j}\, da \cdot e^{\rho(\log(a))} \int_N \int_{U(H)} f(k X_0\, {}^t n a t)\, dk\, dn$$

ここで X_0 は、$\pi(X_0) = H[X_0] = E_m$ となる $V-S'$ の元である。

補題4.5より、$e^{\rho(\log a)} \int_N \int_{U(H)} f(k X_0\, {}^t n a t)\, dk\, dn$ は、A 上の函数として $(a_1,\cdots,a_m)$ の任意の置換で不変である。いま、$\mathfrak{S}_k$ を次のようにして $\mathfrak{S}_m$ に埋めこむ。すなわち $\sigma = \begin{pmatrix} 1, & \cdots, & k \\ \sigma(1), & \cdots, & \sigma(k) \end{pmatrix}$ を

$$(\underbrace{1,2,\cdots,p_1}_{p_1}, \underbrace{p_1+1,\cdots,p_1+p_2}_{p_2}, \cdots, \underbrace{k_P^{(k-1)}+1,\cdots,m}_{p_k})$$

$$\longmapsto (\underbrace{k_P^{(\sigma(1)-1)}+1,\cdots,k_P^{\sigma(1)}}_{p_{\sigma(1)}}, \cdots, \underbrace{k_P^{(\sigma(k)-1)}+1,\cdots,k_P^{\sigma(k)}}_{p_{\sigma(k)}}) .$$

と同一視して、$\mathfrak{S}_m$ の元とみなす。言いかえれば $1\sim m$ を $p_1,\cdots,p_k$

個のk-ブロックにわけ、各ブロック内での順序を変えず、ブロックを入れかえる置換とみなす。

このとき、上の積分表示は、

$$(z_1, \cdots, z_k) \longmapsto (z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k)})$$

$$\mathfrak{p} = (p_1, \cdots, p_k) \longmapsto (p_{\sigma(1)}, \cdots, p_{\sigma(k)}) = {}^{\sigma}\mathfrak{p}$$

$$(a_1, \cdots, a_m) \longmapsto (a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(m)})$$

の変換で不変である。これは、$\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}(z_1, \cdots, z_k ; f) = \mathfrak{E}_{{}^{\sigma}\mathfrak{p}}(z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(k)} ; f)$ を意味している。$\mathfrak{E}^{*}_{\mathfrak{p}}$ についても同様である。 //

<u>Rem</u>. 以上の証明は、実質的には、球函数の函数等式の証明（例えば [3] の chap X. Proposition 6-D）を follow したことに他ならない。

§4. $(G_{\mathfrak{p}}, V)$ の Zeta 函数

K を類数1の虚二次体, $\mathcal{O}_K$ を K の整数環として, $V_{\mathbb{Q}}=M(n,m;K)$, $B_{\mathfrak{p}}(\mathbb{Q})=B_{\mathfrak{p}}\cap GL(m;K)$, $B_{\mathfrak{p}}(\mathbb{Z})=B_{\mathfrak{p}}\cap GL(m;\mathcal{O}_K)$ とおく。

$V_{\mathbb{Q}}$ の格子 L が, $GL(m;\mathcal{O}_K)$-不変とは, 任意の $\gamma\in GL(m;\mathcal{O}_K)$ に対し, $L=L\cdot\gamma$ を満足することを言う。

$\overline{H_0}=\{W\in M(m;\mathbb{C})\mid {}^t\overline{W}=W\geq 0\}$, $\overline{H_0}$ 上の連続函数の空間を, $C(\overline{H_0})$ とかく。$\pi:V\longrightarrow\overline{H_0}$, $\pi^*:V\longrightarrow\overline{H_0}$ は, $\pi(X)=H[X]$, $\pi^*(X)=H^{-1}[X]$ で定義される。

定義1. $GL(m;\mathcal{O}_K)$-不変な格子 $L\,(\subset V_{\mathbb{Q}})$, $f\circ\pi\in\mathcal{S}(V)$, (resp. $f\circ\pi^*\in\mathcal{S}(V)$) となる $f\in C(\overline{H_0})$ に対し

$$Z_{\mathfrak{p}}(s;L;f)=\int_{B_{\mathfrak{p}}/B_{\mathfrak{p}}(\mathbb{Z})}\prod_{i=1}^{k}\chi_{\mathfrak{p}}^{(i)}(b)^{s_i}\sum_{\xi\in L\cap V-S}f(H[\xi\,{}^tb])\,db$$

$$(\text{resp.})\ Z_{\mathfrak{p}}^*(s;L;f)=\int_{B_{\mathfrak{p}}/B_{\mathfrak{p}}(\mathbb{Z})}\prod_{i=1}^{k}\chi_{\mathfrak{p}}^{*(i)}(b)^{s_i}\sum_{\xi\in L\cap V-S}f(H^{-1}[\xi\cdot\overline{b}^{-1}])\,db$$

ここで, db は p.7 の如く正規化した $B_{\mathfrak{p}}$ の right-invariant measure, 又, $\chi_{\mathfrak{p}}^{(i)}$, $\chi_{\mathfrak{p}}^{*(i)}$ は $U(H)$ 上 trivial な指標だったから, 単に $B_{\mathfrak{p}}$ の指標とみなした。

定義2. L: $GL(m;\mathcal{O}_K)$-不変な格子, $L\ni\xi,\eta$ について,

$$\xi\sim\eta\iff\xi\,{}^tb=\eta\quad({}^\exists b\in B_{\mathfrak{p}}(\mathbb{Z}))$$

$$\xi\overset{*}{\sim}\eta\iff\xi\cdot\overline{b}^{-1}=\eta\quad({}^\exists b\in B_{\mathfrak{p}}(\mathbb{Z}))$$

定義3. $GL(n:\mathcal{O}_K)$-不変な格子Lについて

$$\zeta_{\mathbb{P}}(L:s_1,\cdots,s_r)=\sum_{X\in L\cap(V-S)/\sim}\prod_{i=1}^{r}P_{\mathbb{P}}^{(i)}(X)^{-s_i}$$

$$\zeta_{\mathbb{P}}^{*}(L:s_1,\cdots,s_r)=\sum_{Y\in L\cap(V-S)/\overset{*}{\sim}}\prod_{i=1}^{r}Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(Y)^{-s_i}$$

まず Maass[6]にならって. 格子 $L_0=M(n,m:\mathcal{O}_K)$ について $\zeta_{\mathbb{P}}$, $\zeta_{\mathbb{P}}^{*}$ を計算してみよう。

補題6. nの分割 $\tilde{\mathbb{P}}$, $\hat{\mathbb{P}}$ を $\tilde{\mathbb{P}}=(p_1,\cdots,p_r,p_{r+1})$, $\hat{\mathbb{P}}=(p_0,p_1,\cdots,p_r)$ $p_0=p_{r+1}=n-m$ とする。U_K で $\mathcal{O}_K$ の単数群を表わす。$a\in\mathcal{O}_K-\{0\}$ に対し, (a) で a の生成するイデアルを表わす。

(i) $L_0\cap(V-S)/\sim$ の完全代表系として, 次がとれる。

$$\left\{U\cdot\begin{pmatrix}a_1 & & a_{ij}\\ & \ddots & \\ 0 & & a_m\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{array}{l}a_i\in\mathcal{O}_K-\{0\}/U_K,\quad a_{ij}\in\mathcal{O}_K/(a_i)\\ U\in SL(n:\mathcal{O}_K)/{}^{t}B_{\tilde{\mathbb{P}}}\cap SL(n:\mathcal{O}_K)\end{array}\right\}$$

(ii) $L_0\cap(V-S)/\overset{*}{\sim}$ の完全代表系として, 次がとれる。

$$\left\{U\cdot\begin{pmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ a_{ij} & & a_m\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{array}{l}a_i\in\mathcal{O}_K-\{0\}/U_K,\quad a_{ij}\in\mathcal{O}_K/(a_i)\\ U\in SL(n:\mathcal{O}_K)/B_{\hat{\mathbb{P}}}\cap SL(n:\mathcal{O}_K)\end{array}\right\}$$

(∵(i)) Kの類数$=1$と仮定してあるから, 単因子論が使える。$V-S$ の元は, rank$=m$ であることに注意すれば, 上の Type の元と同値になることは, 易しい。ある. $b\in B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z})$ があって,

$$U\cdot\begin{pmatrix}a_1 & a_{ij}\\ 0 & a_m\end{pmatrix}\cdot{}^{t}b=U'\begin{pmatrix}a'_1 & a'_{ij}\\ 0 & a'_m\end{pmatrix}\ \text{とする。}$$

このとき. $U^{-1}U'\in{}^{t}B_{\tilde{\mathbb{P}}}\cap SL(n,\mathcal{O}_K)$ となるから $U=U'$ 。

$$\therefore \begin{pmatrix} a_1 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix} \cdot {}^t b = \begin{pmatrix} a'_1 & & a'_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & a'_m \end{pmatrix} \quad \therefore b \in B_{\mathbb{P}_0}(\mathbb{Z}) \quad \text{したがって}$$

$\mathbb{P}_0 = (\overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{m})$

$b = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ b_{ij} & & b_m \end{pmatrix}$ とおくと、$b_i \in U_K$。$a_i \in O_K - \{0\}/U_K$ より、

$a_i = a'_i$。$\therefore b_i = 1$。$a_{ij} \in O_K/(a_i)$ より以下帰納的に $b_{ij} = 0$

$(i \neq j)$ が言える。

(ii) の証明も同様だから、省略する。 //

補題7. 虚二次体Kの Dedekind Zeta を $\zeta_K(s)$ とする。

$L_0 = M(n, m; O_K)$ について、

$$\text{(i)}\quad \xi_{\mathbb{P}}(L_0; s_1, \cdots, s_r) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i - 1} \zeta_K(s_i + \cdots + s_r - k_{\mathbb{P}}^{*(r-i)} - j)$$

$$\times \sum_{U \in SL(n;O_K)/{}^t B_{\hat{\mathbb{P}}} \cap SL(n;O_K)} \prod_{i=1}^{r} |{}^t \bar{U} H U [E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{-s_i}$$

$$\text{(ii)}\quad \xi^*_{\mathbb{P}}(L_0; s_1, \cdots, s_r) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_{r-i+1} - 1} \zeta_K(s_i + \cdots + s_r - k_{\mathbb{P}}^{(r-i)} - j)$$

$$\times \sum_{U \in SL(n;O_K)/B_{\hat{\mathbb{P}}} \cap SL(n;O_K)} \prod_{i=1}^{r} |{}^t \bar{U} H^{-1} U [E_{\mathbb{P}}^{*(i)}]|^{-s_i}$$

特に、$\xi_{\mathbb{P}}(L_0; s_1, \cdots, s_r)$ (resp. $\xi^*_{\mathbb{P}}(L_0; s_1, \cdots, s_r)$) は $Re(s_i) > p_i + p_{i+1}$

$i = 1, \cdots, r$, $p_{r+1} = n - m$ (resp. $Re(s_i) > p_{r-i} + p_{r-i+1}$, $i = 1, \cdots, r$, $p_0 = n - m$)

で絶対収束する。

(∵) (i) 補題6より、

$$\xi_{\mathbb{P}}(L_0; s_1, \cdots, s_r) = \sum_{a_i \in O_K - \{0\}/U_K} \sum_{a_{ij} \in O_K/(a_i)} \sum_{U \in SL(n;O_K)/{}^t B_{\hat{\mathbb{P}}} \cap SL(n;O_K)} \quad (\#)$$

$$(\#) = \prod_{i=1}^{r} \left| H[U\cdot E_{\mathfrak{p}}^{(r)}][\begin{pmatrix} a_1 & a_{ij} \\ & \ddots \\ & & a_m\end{pmatrix}][E_{\mathfrak{p}}^{(i)}]\right|^{-S_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \chi_{\mathfrak{p}}^{(i)}\left(\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & a_m\end{pmatrix}\right)^{-S_i} \cdot \left|H[U][E_{\mathfrak{p}}^{(i)}]\right|^{-S_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i-1} \left|a_{k_{\mathfrak{p}}^{(i)}-j}\right|^{-2(S_i+\cdots+S_r)} \cdot \prod_{i=1}^{r} \left|H[U][E_{\mathfrak{p}}^{(i)}]\right|^{-S_i}$$

$$\therefore\ \zeta_{\mathfrak{p}}(L_0; S_1,\cdots,S_r) = \sum_{a_i \in \mathcal{O}_K-\{0\}/U_K} \ \sum_{a_{ij} \in \mathcal{O}_K/(a_i)} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i-1} \left|a_{k_{\mathfrak{p}}^{(i)}-j}\right|^{-2(S_i+\cdots+S_r)}$$

$$\times \sum_{U \in SL(n;\mathcal{O}_K)/{}^tB_{\mathfrak{p}}\cap SL(n;\mathcal{O}_K)} \left|{}^t\bar{U}HU[E_{\mathfrak{p}}^{(i)}]\right|^{-S_i}$$

$$= \sum_{a_i \in \mathcal{O}_K-\{0\}/U_K} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i-1} \left|a_{k_{\mathfrak{p}}^{(i)}-j}\right|^{-2(S_i+\cdots+S_r-k_{\mathfrak{p}}^{*(r-i)}-j)}$$

$$\cdot \sum_{U \in SL(n;\mathcal{O}_K)/{}^tB_{\mathfrak{p}}\cap SL(n;\mathcal{O}_K)} \left|{}^t\bar{U}HU[E_{\mathfrak{p}}^{(i)}]\right|^{-S_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{a \in \mathcal{O}_K-\{0\}/U_K} |a|^{-2(S_i+\cdots+S_r-k_{\mathfrak{p}}^{*(r-i)}-j)} \right\}$$

$$\times \sum_{U \in SL(n;\mathcal{O}_K)/{}^tB_{\mathfrak{p}}\cap SL(n;\mathcal{O}_K)} \left|{}^t\bar{U}HU[E_{\mathfrak{p}}^{(i)}]\right|^{-S_i}$$

Kが~~類数~~ 1 の虚二次体だったから、$\zeta_K(s) = \sum_{a \in \mathcal{O}_K-\{0\}/U_K} |a|^{-2s}$ であり、(i)は証明された。

(ii) も全く同様である。

$Re(S_i) > p_i + p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,r)$ のとき.

$$Re(s_i+\cdots+s_k)-k_{\mathbb{P}}^{*(k-i)}-j \geqq k_{\mathbb{P}}^{*(k-i)}+n-m \geqq 1$$

よって $\zeta_K(s_i+\cdots+s_k-k_{\mathbb{P}}^{*(k-i)}-j)$ は $Re(s_i)>p_i+p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,k)$ で絶対収束。

$\displaystyle\sum_{U\in SL(n:\mathcal{O}_K)/{}^tB_{\mathbb{P}}\cap SL(n:\mathcal{O}_K)} \prod_{i=1}^{k} |{}^t\bar{U}HU[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{-s_i}$ は、$SL(n:\mathbb{C})$ の Eisenstein 級数に他ならず、この級数が $Re(s_i)>p_i+p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,k)$ で絶対収束することは、Godement の判定条件の結論である。(cf A. Borel [2])

$\zeta_{\mathbb{P}}^*(L_0:s_1,\cdots,s_k)$ の収束も全く同様である。 //

補題 8. $GL(m:\mathcal{O}_K)$-不変な格子 L、$f\circ\pi$ (resp. $f\circ\pi^*$) $\in \mathcal{S}(V)$ なる $f\in C(\overline{H_0})$ に対し、$Z_{\mathbb{P}}(s:L:f)$, $\zeta_{\mathbb{P}}(L:s)$ (resp. $Z^*_{\mathbb{P}}(s:L:f)$, $\zeta^*_{\mathbb{P}}(L:s)$) は、$Re(s_i)>p_i+p_{i+1}$, $(i=1,\cdots,k)$ (resp. $Re(s_i)>p_{k-i}+p_{k-i+1}$ $(i=1,\cdots,k)$) で、絶対収束し、

(i) $$Z_{\mathbb{P}}(s:L:f)=\pi^{\frac{1}{2}(p_1^2+\cdots+p_k^2+m^2)-mn}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(n-m+i)}{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)}$$

$$\times|H|^{m}\cdot\zeta_{\mathbb{P}}(L:s)\cdot\Phi_{\mathbb{P}}(s:f\circ\pi)$$

(ii) $$Z^*_{\mathbb{P}}(s:L:f)=\pi^{\frac{1}{2}(p_1^2+\cdots+p_k^2+m^2)-mn}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(n-m+i)}{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)}$$

$$\times|H|^{-m}\cdot\zeta^*_{\mathbb{P}}(L:s)\cdot\Phi^*_{\mathbb{P}}(s:f\circ\pi^*)$$

(∵) $L\subset V_{\mathbb{Q}}$. したがって、$\alpha\in\mathcal{O}_K$ で、$\alpha L\subset L_0=M(n,m:\mathcal{O}_K)$ となるものが存在する。

$$\therefore \sum_{x\in L\cap V-S/\sim} \prod_{i=1}^{k} |P_{\mathfrak{p}}^{(i)}(x)|^{-R_e S_i} \leqq \sum_{x\in L_0\cap V-S/\sim} \prod_{i=1}^{k} |P_{\mathfrak{p}}^{(i)}(\alpha^{-1}x)|^{-R_e S_i}$$

$$= |\alpha|^{-2\sum_{i=1}^{k} k_{\mathfrak{p}}^{(i)} R_e S_i} \cdot \xi_{\mathfrak{p}}(L_0 : R_e(S_1), \cdots ; Re(S_k))$$

この右辺は、すでに述べたように、$Re(S_i) > p_i + p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,k)$ で絶対収束している。よって $\xi_{\mathfrak{p}}(L : S_1,\cdots S_k)$ は、同じ範囲で絶対収束する。$\xi_{\mathfrak{p}}^{*}(L : S_1,\cdots,S_k)$ についても同様である。

次に、$Z_{\mathfrak{p}}(S : L : f)$ を形式的に変形してみる。

$$Z_{\mathfrak{p}}(S : L : f) = \int_{B_{\mathfrak{p}}/B_{\mathfrak{p}}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathfrak{p}}^{(i)}(b)^{S_i} \sum_{\xi\in L\cap V-S} f(H[\xi^t b])\, db$$

$$= \sum_{\xi\in L\cap V-S/\sim} \cdot \int_{B_{\mathfrak{p}}} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathfrak{p}}^{(i)}(b)^{S_i} f(H[\xi^t b])\, db$$

$$= \sum_{\xi\in L\cap V-S/\sim} \prod_{i=1}^{k} |P_{\mathfrak{p}}^{(i)}(\xi)|^{-S_i} \cdot \int_{B_{\mathfrak{p}}} \prod_{i=1}^{k} P_{\mathfrak{p}}^{(i)}(\xi^t b)^{S_i} f(H[\xi^t b])\, db$$

よって、補題2.を利用すれば、

$$\int_{B_{\mathfrak{p}}} \prod_{i=1}^{k} P_{\mathfrak{p}}^{(i)}(\xi^t b)^{S_i} f(H[\xi^t b])\, db$$

$$= \int_{(B_{\mathfrak{p}})_{H[\xi]}} d\nu_{H[\xi]} \cdot \int_{\mathcal{H}^0} \prod_{i=1}^{k} |w[E_{\mathfrak{p}}^{(i)}]|^{S_i} f(w)\, \widetilde{dw}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} p_i^2 + \frac{m}{2}}}{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)} \cdot \int_{\mathcal{H}^0} \prod_{i=1}^{k} |w[E_{\mathfrak{p}}^{(i)}]|^{S_i} f(w)\, \widetilde{dw}$$

一方、補題1によって、

$$\Phi_{\mathbb{P}}(s;f\circ\pi)=\int_{V-S}\prod_{i=1}^{k}P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{s_i-p_i-p_{i+1}}f(H[x])\,dX$$

$$=\int_{\mathcal{A}^{\circ}}\prod_{i=1}^{k}|W[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{s_i-p_i-p_{i+1}}f(w)\,dw\cdot\int_{\pi^{-1}(w)}|\Theta_w|$$

$$=|H|^{-m}\cdot\frac{\pi^{\frac{m(2n-m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(n-m+i)}\cdot\int_{\mathcal{A}^{\circ}}\prod_{i=1}^{k}|W[E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{s_i}f(w)\,\widetilde{dw}$$

以上より、容易に(i)が得られる。$\zeta_{\mathbb{P}}$, $\Phi_{\mathbb{P}}$ の $Re(s_i)>p_i+p_{i+1}$ $(i=1,\cdots$ $k)$ での絶対収束性より、以上の計算は正当化される。(ii)に関しても同様である。 //

さて、我々の定理は次のとおりである。

<u>定理</u>. $\zeta_{\mathbb{P}}(L;s)$, $\zeta^*_{\mathbb{P}}(L;s)$ は、$\mathbb{C}^k$ 上の有理型函数として解析接続され、次の函数等式を満足する。

(1). L^* を L の双対格子、すなわち、$L^*=\{x\in V_{\mathbb{Q}}\mid\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z},\ \forall y\in L\}$。$v(L^*)=\int_{V/L^*}dx$.

$$\tilde{\zeta}_{\mathbb{P}}(L;s_1,\cdots,s_k)=|H|^{\frac{m}{2}}\pi^{-\sum_{i=1}^{k}k_{\mathbb{P}}^{(i)}s_i}\times\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p_i-1}\Gamma(s_i+\cdots+s_k-k_{\mathbb{P}}^{*(k-i)}-j)\cdot\zeta_{\mathbb{P}}(L;s_1,\cdots,s_k)$$

$$\tilde{\zeta}^*_{\mathbb{P}}(L^*;s_1,\cdots,s_k)=|H|^{-\frac{m}{2}}\pi^{-\sum_{i=1}^{k}k_{\mathbb{P}}^{*(i)}s_i}\times\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=0}^{p_{k-i+1}-1}\Gamma(s_i+\cdots+s_k-k_{\mathbb{P}}^{(k-i)}-j)\cdot\zeta^*_{\mathbb{P}}(L^*;s_1,\cdots,s_k)$$

とおけば、

$$v(L^*)^{-1}\tilde{\zeta}_{\mathbb{P}}(L;s_1,\cdots,s_k)=\tilde{\zeta}^*_{\mathbb{P}}(L^*;s_{k-1},\cdots,s_1,n-s_1-\cdots-s_k)$$

(2). D を K の判別式、$\eta_K(s) = \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\zeta_K(s)$ とおく。
$\xi_{\mathbb{P}}(L; s_1,\cdots,s_k)$ (resp. $\xi^*_{\mathbb{P}}(L; s_1,\cdots,s_k)$) を変数変換(#) (resp. (♭)) によって、$z_1,\cdots,z_k$ の函数とみたとき、$\xi_{\mathbb{P}}(L; z_1,\cdots,z_k)$ (resp. $\xi^*_{\mathbb{P}}(L; z_1,\cdots,z_k)$) と記す。

任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ に対して、$\xi_{\mathbb{P}}(L; z_1,\cdots,z_k)/\xi_{\mathbb{P}^\sigma}(L; z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(k)})$ (resp. $\xi^*_{\mathbb{P}}(L; z_1,\cdots,z_k)/\xi^*_{\mathbb{P}^\sigma}(L; z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(k)})$) は、$\eta_K(z_\nu - z_\mu + \frac{p_\mu+p_\nu}{2} - j)$ ($j=0,1,2,\cdots$) の積で書ける。
特に、巡回置換 $\sigma_0 = \begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & k\\ k, & 1, & \cdots, & k-1\end{pmatrix}$ に対しては、

$$\frac{\xi_{\mathbb{P}^{\sigma_0}}(L; z_{\sigma_0(1)},\cdots,z_{\sigma_0(k)})}{\xi_{\mathbb{P}}(L; z_1,\cdots,z_k)} = \frac{\xi^*_{\mathbb{P}^{\sigma_0}}(L; z_{\sigma_0(1)},\cdots,z_{\sigma_0(k)})}{\xi^*_{\mathbb{P}}(L; z_1,\cdots,z_k)} = \prod_{i=1}^{k-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\frac{\eta_K(z_k - z_i + \frac{p_i+p_k}{2} - j)}{\eta_K(z_i - z_k + \frac{p_i+p_k}{2} - j)}$$

互換 $\sigma_i = (i, i+1)$ $(i=1,\cdots,k-1)$ に対しては、

$$\frac{\xi_{\mathbb{P}^{\sigma_i}}(L; z_{\sigma_i(1)},\cdots,z_{\sigma_i(k)})}{\xi_{\mathbb{P}}(L; z_1,\cdots,z_k)} = \frac{\xi^*_{\mathbb{P}^{\sigma_i}}(L; z_{\sigma_i(1)},\cdots,z_{\sigma_i(k)})}{\xi^*_{\mathbb{P}}(L; z_1,\cdots,z_k)} = \prod_{j=0}^{p_i-1}\frac{\eta_K(z_{i+1} - z_i + \frac{p_i+p_{i+1}}{2} - j)}{\eta_K(z_i - z_{i+1} + \frac{p_i+p_{i+1}}{2} - j)}$$

で与えられる。

<u>Remark</u> $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = p$ となる分割 $\mathbb{P}$ については、函数等式(2)は、任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ について

$$\prod_{1\le\mu<\nu\le k}\prod_{j=1}^{p}\eta_K(z_\nu - z_\mu + j)\,\xi_{\mathbb{P}}(L; z_1,\cdots,z_k)$$

$$\prod_{1\le\mu<\nu\le k}\prod_{j=1}^{p}\eta_K(z_\nu - z_\mu + j)\,\xi^*_{\mathbb{P}}(L; z_1,\cdots,z_k)$$

は、$(z_1,\cdots,z_k)\longrightarrow(z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(k)})$ で不変という形にまとめられる。

§5. 定理の証明

§5-1：函数等式(1)の証明

$\pi: V \to \overline{\mathcal{H}_0}$ $(\pi(x)=H[x])$, $\pi^*: V\to \overline{\mathcal{H}_0}$ $(\pi^*(x)=H^{-1}[x])$ で、Hを明示しないときには、π_H, π^*_H とかくことにする。

$\varphi\in C(\overline{\mathcal{H}_0})$、$g\in GL(n;\mathbb{C})$ に対し、$\pi_{H[g]}(x)=\pi_H(gx)$, $\varphi\circ\pi_{H[g]}(x)=\varphi\circ\pi_H(gx)$ が成立つ。よって、ある n 次正定値エルミート行列 H_0 に対し、$\varphi\circ\pi_{H_0}\in\mathcal{S}(V)$ ならば、任意の n 次正定値エルミート行列 H に対し $\varphi\circ\pi_H\in\mathcal{S}(V)$ が成立つ。特に $\pi^*_H=\pi_{H^{-1}}$ だから $\varphi\circ\pi^*_H\in\mathcal{S}(V)$ でもある。

$S(\overline{\mathcal{H}_0})=\{\varphi\in C(\overline{\mathcal{H}_0}) \mid \varphi\circ\pi_H\in\mathcal{S}(V)\}$ とおく。これは、H によらない。

<u>補題9</u>：

(1) 線型写像 $\rho: S(\overline{\mathcal{H}_0})\to S(\overline{\mathcal{H}_0})$ $(\varphi\mapsto\varphi^\rho)$ が存在し、

$$\widehat{\varphi\circ\pi^*_H} = |H|^{m}\varphi^\rho\circ\pi_H \quad (\varphi\in S(\overline{\mathcal{H}_0}))\text{。}$$

(2) $0\neq\varphi\in S(\overline{\mathcal{H}_0})$ で次の条件 a), b) を満足するものが存在する。

a) $\varphi(\bar{u} w\, {}^t u)=\varphi(w)$ $\quad (u\in U(E_m),\ w\in\overline{\mathcal{H}_0})$

b) 任意の n 次正定値エルミート行列 H に対し、

$$\varphi\circ\pi^*_H\big|_S=0,\quad \widehat{\varphi\circ\pi^*_H}\big|_S=0$$

(∵)(1) $\varphi\in S(\overline{\mathcal{H}_0})$ に対し、Fourier変換の定義より、$\widehat{\varphi\circ\pi^*_{E_m}}$ は、$U(E_n)$-不変。よって $\varphi^\rho\circ\pi_{E_m}=\widehat{\varphi\circ\pi^*_{E_m}}$ となる $\varphi^\rho\in S(\overline{\mathcal{H}_0})$ が

まる。$\psi \mapsto \psi^g$ が条件を満足する。

すg ($g \in GL(n;\mathbb{C})$) とおく。

$\pi_H^*(x) = \psi \circ \pi_{E_n}^*({}^t\bar{g}^{-1}x)$

$\widehat{\cdot\,\pi_H^*}(x) = |H|^m \cdot \psi^g \circ \pi_H(x) = |H|^m \cdot \psi^g \circ \pi_{E_n}(gx)$

$= E_n$ のときに条件 b) が満たされればよい。

上の定数係数偏微分作用素 $D(x)$ を $D(x)\,e^{2\pi i\langle x,y\rangle}$

$e^{2\pi i\langle x,y\rangle}$ を満たすようにとる。$D(x)$ は、$k \in U(E_n)$

$(kx) = D(x)$ を満たすことに注意する。

) について、

$) = D(x)\cdot|{}^t\bar{x}\cdot x|^{2m+1}\int_{U(E_m)} \psi_0\circ\pi_{E_m}(x\,{}^tu)\,du$

(du は、$U(E_m)$ の Haar measure)

$(kx\,{}^tu) = \varphi_\psi(x)$ ($k \in U(E_n)$, $u \in U(E_m)$) が成立つ。

$p = \psi_0\circ\pi_{E_n}$ となる $\psi_0 \in S(\overline{\mathcal{H}_0})$ が存在するが、ψ_0 は、条件

a) は明らかである。$D(x)$ は、$2m$ 階の定係数偏微分作

$\varphi_\psi|_S = 0$ 。又、部分積分によって、

$$= \int_V D(x)\left\{|{}^t\bar{x}x|^{2m+1}\int_{U(E_m)} \psi_0\circ\pi_{E_m}(x\,{}^tu)\,du\right\} e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx$$

$$= |{}^t\bar{y}y|\cdot\int_V |{}^t\bar{x}x|^{2m+1}\int_{U(E_m)} \psi_0\circ\pi_{E_n}(x\,{}^tu)\,du\cdot e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx 。$$

$= 0$ 。 //

補題9を利用して、函数等式(1)の証明をしよう。

$\Phi \in \mathcal{S}(V)$ に、Poisson の和公式を適用すれば、

$$v(L^*)^{-1} \sum_{x \in L} \hat{\Phi}(x^t b) = \|b\|^{-2n} \sum_{y \in L^*} \Phi(y \bar{b}^{-1})$$

が成立つ。特に、補題9の(2)によって、

$$f \circ \pi^* \big|_S = 0 , \quad \widehat{f \circ \pi^*} \big|_S = |H|^m \cdot f^\rho \circ \pi \big|_S = 0$$

となる $f \in \mathcal{S}(\overline{H_0})$ をとれば、

$$v(L^*)^{-1} \sum_{x \in L \cap V - S} \widehat{f \circ \pi^*}(x^t b) = \|b\|^{-2n} \sum_{y \in L^* \cap V - S} f \circ \pi^*(y \bar{b}^{-1})$$

をうる。

$$Z_P^+(s : L : |H|^m f^\rho) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(k)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_P^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{x \in L \cap V - S} \widehat{f \circ \pi^*}(x^t b)\, db.$$

$$Z_P^-(s : L : |H|^m f^\rho) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(k)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_P^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{x \in L \cap V - S} \widehat{f \circ \pi^*}(x^t b)\, db$$

$$Z_P^{*+}(s : L^* : f) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{*(k)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_P^{*(i)}(b)^{s_i} \sum_{y \in L^* \cap V - S} f \circ \pi^*(y \bar{b}^{-1})\, db$$

$$Z_P^{*-}(s : L^* : f) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{*(k)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_P^{*(i)}(b)^{s_i} \sum_{y \in L^* \cap V - S} f \circ \pi^*(y \bar{b}^{-1})\, db$$

とおくと、補題8により、Z_P^+ は、$\{ s \in \mathbb{C}^k \mid Re(s_i) > p_i + p_{i+1} \ \ i = 1, \cdots, k-1 \}$ Z_P^- は $\{ s \in \mathbb{C}^k \mid Re(s_i) > p_i + p_{i+1} \ , i = 1, \cdots, k \}$、$Z_P^{*+}$ は、$\{ s \in \mathbb{C}^k \mid Re(s_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1} \ , i = 1, \cdots, k-1 \}$、$Z_P^{*-}$ は $\{ s \in \mathbb{C}^k \mid Re(s_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1} \ \ i = 1, \cdots, k \}$

で、絶対収束する。

$$Z_{\mathbb{P}}(S:L:|H|^m f^{g}) = Z^{+}_{\mathbb{P}}(S:L:|H|^m f^{g}) + Z^{-}_{\mathbb{P}}(S:L:|H|^m f^{g})$$

一方、Poissonの和公式によって、

$$Z^{-}_{\mathbb{P}}(S:L:|H|^m f^{g}) = \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi^{(\nu)}_{\mathbb{P}}(b)\leq 1}} \prod_{i=1}^{\nu} \chi^{(i)}_{\mathbb{P}}(b)^{s_i} \sum_{x\in L\cap V-S} \widehat{f\circ\pi^{*}}(x^{t}b)\, db$$

$$= v(L^{*}) \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi^{(\nu)}_{\mathbb{P}}(b)\leq 1}} \prod_{i=1}^{\nu-1} \chi^{(i)}_{\mathbb{P}}(b)^{s_i} \cdot \chi^{(\nu)}_{\mathbb{P}}(b)^{s_\nu - n} \sum_{y\in L^{*}\cap V-S} f\circ\pi^{*}(y b^{-1})\, db$$

$$= v(L^{*}) \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi^{*(\nu)}_{\mathbb{P}}(b)\geq 1}} \prod_{i=1}^{\nu-1} \chi^{*(i)}_{\mathbb{P}}(b)^{s_{\nu-i}} \cdot \chi^{*(\nu)}_{\mathbb{P}}(b)^{n-s_1-\cdots-s_\nu} \sum_{y\in L^{*}\cap V-S} f\circ\pi^{*}(y b^{-1})\, db$$

$$= v(L^{*})\, Z^{*+}_{\mathbb{P}}(s_{\nu-1},\cdots,s_1,n-s_1-\cdots-s_\nu : L^{*} : f) \text{。}$$

$$\therefore\ Z_{\mathbb{P}}(S:L:|H|^m f^{g})$$
$$= Z^{+}_{\mathbb{P}}(S:L:|H|^m f^{g}) + v(L^{*})\, Z^{*+}_{\mathbb{P}}(s_{\nu-1},\cdots,s_1,n-s_1-\cdots-s_\nu : L^{*} : f) \text{。}$$

この表示は、$Z_{\mathbb{P}}(S:L:|H|^m f^{g})$が、$\{S\in\mathbb{C}^{\nu} \mid \mathrm{Re}(s_i)>p_i+p_{i+1}\ \ i=1,\cdots,\nu-1\}$ 上の正則函数として延長されることを示している。

同様にして、

$$Z^{*}_{\mathbb{P}}(s_{\nu-1},\cdots,s_1,n-s_1-\cdots-s_\nu : L^{*} : f)$$
$$= Z^{*+}_{\mathbb{P}}(s_{\nu-1},\cdots,s_1,n-s_1-\cdots-s_\nu : L^{*} : f) + v(L^{*})^{-1} Z^{+}_{\mathbb{P}}(S:L:|H|^m f^{g})$$

が得られる。

従って $\{s\in\mathbb{C}^\nu \mid Re(s_i)>p_i+p_{i+1}\ \ i=1,\dots,\nu-1\}$ で、

$$v(L^*)^{-1} Z_p(s_1,\dots,s_\nu : L : |H|^m f^g) = Z_p^*(s_{\nu-1},\dots,s_1, n-s_1-\dots-s_\nu : L^* : f)\text{。}$$

補題8の(i), (ii)と、命題1とをあわせれば、容易に函数等式(1)を得る。 //

<u>Rem.</u> ここでは、$\xi_p(L:s)$ (resp. $\xi_p^*(L^*:s)$) は、$Re(s_i)>p_i+p_{i+1}$ $i=1,\dots,\nu-1$, (resp. $Re(s_i)>p_{\nu-i}+p_{\nu-i+1}$ $i=1,\dots,\nu-1$) の範囲に有理型函数として解析接続された。$\mathbb{C}^\nu$全体への解析接続は、函数等式(2)を必要とする。

§5-2：この節では、函数等式(2)の証明に必要な補題をまとめておく。

<u>補題10.</u> nの分割 $q=(q_1,\dots,q_{\nu+1})$ $(\nu\geq 1)$、n次正定値エルミート行列Hに対し、

$$E_q(H:s_1,\dots,s_\nu)=\sum_{U\in SL(n:O_K)/{}^tB_q\cap SL(n:O_K)} \prod_{i=1}^{\nu} |{}^t\bar{U}HU[E_q^{(i)}]|^{-s_i}$$

$$E_q^*(H:s_1,\dots,s_\nu)=\sum_{U\in SL(n:O_K)/B_q\cap SL(n:O_K)} \prod_{i=1}^{\nu} |{}^t\bar{U}H^{-1}U[E_q^{*(i)}]|^{-s_i}$$

とする。E_q (resp. E_q^*) は、$Re(s_i)>q_i+q_{i+1}$, $1\leq i\leq\nu$ (resp. $Re(s_i)>q_{\nu-i+1}+q_{\nu-i+2}$, $1\leq i\leq\nu$) で絶対収束して、

$$E_q(H:s_1,\dots,s_\nu)=|H|^{-s_1-\dots-s_\nu}E_q^*(H:s_\nu,\dots,s_1)$$

$;HU[E_q^{(i)}]| = |H|\cdot|\bar U^{-1} H^{-1}\,{}^t\bar U^{-1}[E_q^{*(k-i+1)}]|$

$$H:S_1,\dots,S_k) = |H|^{-S_1-\cdots-S_k}\left\{\sum_{U\in SL(n:O_K)/{}^tB_q\cap SL(n:O_K)}\ \prod_{i=1}^{k}|\bar U^{-1}H^{-1}\,{}^t\bar U^{-1}[E_q^{*(k-i+1)}]|^{-S_i}\right\}$$

$(n:O_K)/{}^tB_q\cap SL(n:O_K)$ の完全代表系を動くとき、${}^t\bar U^{-1}$ は、

$/B_q\cap SL(n:O_K)$ の完全代表系を動くことにより、

$$(H:S_1,\dots S_k) = |H|^{-S_1-\cdots-S_k}\,E_q^*(H:S_k,\dots,S_1)$$ 。

4 ですでに注意したように Godement の判定条件による。//

、命題2 の証明で利用した記号を再び使う。すなわち、

$$) = \mathbb{R}^\times\cdot A\cdot N = \left\{t\cdot\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\n_{ij}&&1\end{pmatrix}\right\}$$

$\frac{dt}{t}$, $da = \prod_{i=1}^{m-1}\frac{da_i}{a_i}$, $dn = \prod_{i>j} dRe\,n_{ij}\,dIm\,n_{ij}$ 。

$$_m) = U(E_m)\cap B_p = \left\{\begin{pmatrix}A_1&&\\&\ddots&\\&&A_k\end{pmatrix}\ \middle|\ A_i\in U(E_{p_i})\right\}\cong\prod_{i=1}^{k}U(E_{p_i})$$

のとき、$B_p = U_p(E_m)\cdot B^+(m)$ と分解される。$B_p\ni b$ の対

を、$b = u\cdot b^+$ ($u\in U_p(E_m)$, $b^+\in B^+(m)$) とする。

の right invariant measure db^+, $U_p(E_m)$ 上の Haar

du を、それぞれ、

$$db^+ = \prod_{i=1}^{m} a_i^{4i}\,d^\times t\,da\,dn$$

$$\int_{U_p(E_m)} du = 2^m\cdot\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\pi^{\frac{p_i(p_i+1)}{2}}}{\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)}\right)$$

る。このとき、

$$db = du\,db^+$$

は、p.7で与えた $B_{\mathbb{P}}$ の right invariant measure である。

特に、$\nu=1$, $\mathbb{P}=(m)$ のとき、

$$GL(m:\mathbb{C}) = U(E_m)\cdot B^+(m)$$

$$dg = \frac{\prod_{i,j} d\mathrm{Re}\, g_{ij}\, d\mathrm{Im}\, g_{ij}}{\| g\|^{2m}} = du\, db \qquad (g=(g_{ij})\in GL(m:\mathbb{C}))$$

$$\int_{U(E_m)} du = 2^m \frac{\pi^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(i)}$$

。

<u>補題11</u>. $f\in S(\overline{H_0})$ が、$f(\bar{u}w{}^tu)=f(w)$ $(u\in U(E_m), w\in\overline{H_0})$ を満足するとしよう。このとき、$GL(m:O_K)$－不変な格子 $L(C\overline{V_\mathbb{Q}})$ に対し、

(i) $\mathrm{Re}(s_i)>p_i+p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,\nu,\ p_{\nu+1}=n-m)$ で、

$$Z_{\mathbb{P}}(s:L:f) = \pi^{\frac{p_1^2+\cdots+p_\nu^2-m^2}{2}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(i)}{\prod_{i=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)}$$

$$\times\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:O_K)} \| g\|^{2s_\nu}\cdot E_{\mathbb{P}}(({}^t\bar{g}g)^{-1}:s_1,\cdots,s_{\nu-1})\sum_{\xi\in L\cap V_S'} f(H[\xi{}^tg])\,dg.$$

(ii) $\mathrm{Re}(s_i)>p_{\nu-i}+p_{\nu-i+1}$ $(i=1,\cdots,\nu,\ p_0=n-m)$ で、

$$Z_{\mathbb{P}}^*(s:L:f) = \pi^{\frac{p_1^2+\cdots+p_\nu^2-m^2}{2}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(i)}{\prod_{i=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)}$$

$$\times\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:O_K)} \| g\|^{-2s_\nu} E_{\mathbb{P}}^*(({}^t\bar{g}g)^{-1}:s_1,\cdots,s_{\nu-1})\sum_{\eta\in L\cap V_S'} f(H^{-1}[\eta\bar{g}^{-1}])\,dg$$

(ii) (i). 補題8より、$Re(s_i) > p_i + p_{i+1}$ $(i=1,\cdots k)$ で $Z_{\mathbb{P}}(s:L:f)$ は絶対収束して、以下の変形が許される。

$$Z_{\mathbb{P}}(s:L:f) = \int_{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{\xi \in L \cap V\text{-}S} f(H[\xi^t b])\, db$$

$$= \int_{B_{\mathbb{P}}} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{\xi \in L \cap V\text{-}S/\sim} f(H[\xi^t b])\, db$$

f の $U(E_m)$ - 不変性によって

$$= 2^m \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\pi^{\frac{p_i(p_i+1)}{2}}}{\prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)} \right) \cdot \int_{B^+(m)} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b^+)^{s_i} \sum_{\xi \in L \cap V\text{-}S/\sim} f(H[\xi^t b^+])\, db^+$$

$$= \pi^{\frac{p_1^2 + \cdots + p_k^2 - m^2}{2}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(i)}{\prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)}$$

$$\times \int_{GL(m:\mathbb{C})} \|g\|^{2s_k} \prod_{i=1}^{k-1} |({}^t\bar{g}g)^{-1} [E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{-s_i} \sum_{\xi \in L \cap V\text{-}S/\sim} f(H[\xi^t g])\, dg$$

$$= c_{\mathbb{P}} \cdot \int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:O_K)} \|g\|^{2s_k} \sum_{U \in GL(m:O_K)/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k-1} |({}^t\bar{g}g)^{-1} [{}^t\bar{U}^{-1}][E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{-s_i}$$

$$\times \sum_{\xi \in L \cap V\text{-}S} f(H[\xi^t U^t g])\, dg.$$

$L \cap V\text{-}S$ が $GL(m:O_K)$ - 不変となることに注意すれば、

$$= c_{\mathbb{P}} \int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:O_K)} \|g\|^{2s_k} \cdot E_{\mathbb{P}}(({}^t\bar{g}g)^{-1} : s_1, \cdots s_{k-1}) \sum_{\xi \in L \cap V\text{-}S} f(H[\xi^t g])\, dg$$

ここで、簡単に、$\pi^{\frac{1}{2}(p_1^2+\cdots+p_\nu^2-m^2)}\cdot\prod_{i=1}^{m}\Gamma(i)\cdot\left(\prod_{i=1}^{\nu}\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)\right)^{-1}$ を $C_{\mathbb{P}}$ と書いた。(ii) も全く同じ議論で証明できる。 //

<u>Remark</u>. $Z_{\mathbb{P}}^{+}(s:L:f)$, $Z_{\mathbb{P}}^{*+}(s:L:f)$ を p-28と同様に定義すれば、

$Re(s_i)>p_i+p_{i+1}$ $(i=1,\cdots,\nu-1)$ で、

$$Z_{\mathbb{P}}^{+}(s:L:f)=C_{\mathbb{P}}\cdot\int_{\substack{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)\\ \|g\|\geq 1}}\|g\|^{2s_\nu}E_{\mathbb{P}}(({}^t\bar{g}g)^{-1}:s_1,\cdots,s_{\nu-1})\sum_{\xi\in L\cap V-S}f(H[\xi{}^t\bar{g}])dg$$

$Re(s_i)>p_{\nu-i}+p_{\nu-i+1}$ $(i=1,\cdots,\nu-1)$ で

$$Z_{\mathbb{P}}^{*+}(s:L:f)=C_{\mathbb{P}}\cdot\int_{\substack{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)\\ \|g\|\leq 1}}\|g\|^{-2s_\nu}E_{\mathbb{P}}^{*}({}^t\bar{g}g)^{-1}:s_1,\cdots,s_{\nu-1})\sum_{\eta\in L\cap V-S}f(H^{-1}[\eta\bar{g}^{-1}])dg$$

が、補題11と同じ仮定の下で成立する。

§5-1 で示したように、$\Psi\in\mathcal{S}(\overline{H}_0)$ が、$\Psi\circ\pi|_S=0$, $\widehat{\Psi\circ\pi}|_S=0$ を満たすならば、$Z_{\mathbb{P}}(s:L:\Psi)$ は $\{(s_1,\cdots,s_\nu)\in\mathbb{C}^\nu \mid Re(s_i)>p_i+p_{i+1}\ (i=1,\cdots,\nu-1)\}$ 上の正則函数とみなせ、次の不等式が成立つ。すなわち、

<u>補題12</u> $\Psi\in\mathcal{S}(\overline{H}_0)$ が、$\Psi\circ\pi^*|_S=0$, $\widehat{\Psi\circ\pi^*}|_S=0$ を満足すれば、領域 $D_M=\{(s_1,\cdots,s_\nu)\in\mathbb{C}^\nu \mid Re(s_i)>p_i+p_{i+1}\ (i=1,\cdots,\nu-1),\ |Re(s_\nu)|<M\}$ $(M>0)$ 上で

$$|Z_{\mathbb{P}}(s:L:\Psi^g)|\leqq Z_{\mathbb{P}}(Re(s_1),\cdots,Re(s_{\nu-1}),M:L:\Psi_1)$$
$$+v(L^*)Z_{\mathbb{P}}^{*}(Re(s_\nu),\cdots,Re(s_1),n+M-Re(s_1)-\cdots-Re(s_{\nu-1}):L^*:\Psi_2)$$

を満たす $\Psi_1,\Psi_2\in\mathcal{S}(\overline{H}_0)$ が存在する。

(∵) $Z_{\mathbb{P}}(s:L:\Psi^s) = \displaystyle\int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)\geq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{X\in L\cap V-S} \widehat{\Psi\circ\pi^*}(X^t b)\, db$

$\displaystyle + \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)\leq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{s_i} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)^{-n} \cdot v(L^*) \sum_{Y\in L^*\cap V-S} \Psi\circ\pi^*(Y b^{-1})\, db$

$\therefore\ |Z_{\mathbb{P}}(s:L:\Psi^s)| \leqq \displaystyle\int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)\geq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{Re(s_i)} \sum_{X\in L\cap V-S} |\widehat{\Psi\circ\pi^*}(X^t b)|\, db$

$\displaystyle + v(L^*) \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)\leq 1}} \prod_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{Re(s_i)} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)^{-n} \sum_{Y\in L^*\cap V-S} |\Psi\circ\pi^*(Y b^{-1})|\, db$

∴ D_M 上では、

$|Z_{\mathbb{P}}(s:L:\Psi^s)| \leqq \displaystyle\int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)\geq 1}} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b)^{Re(s_i)} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)^{M} \sum_{X\in L\cap V-S} |\widehat{\Psi\circ\pi^*}(X^t b)|\, db$

$\displaystyle + v(L^*) \int_{\substack{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) \\ \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)\leq 1}} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}(b)^{Re(s_{k-i})} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{*(k)}(b)^{n+M-Re(s_1)-\cdots-Re(s_{k-1})} \cdot \sum_{Y\in L^*\cap V-S} |\Psi\circ\pi^*(Y b^{-1})|\, db$

$\displaystyle \leqq \int_{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}{}^{Re(s_i)} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{(k)}(b)^{M} \sum_{X\in L\cap V-S} |\widehat{\Psi\circ\pi^*}(X^t b)|\, db$

$\displaystyle + v(L^*) \int_{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}(b)^{Re(s_{k-i})} \cdot \chi_{\mathbb{P}}^{*(k)}(b)^{n+M-Re(s_1)-\cdots-Re(s_{k-1})} \cdot \sum_{Y\in L^*\cap V-S} |\Psi\circ\pi^*(Y b^{-1})|\, db.$

ここで、$\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{S}(H_0)$ を $\Psi_1\circ\pi(x) \geq |\widehat{\Psi\circ\pi^*}(x)|$, $\Psi_2\circ\pi^*(x) \geq |\Psi\circ\pi^*(x)|$ $(\forall x\in V)$ なるようにとれる（Weil [12] lemma 5.）。よって、補題は成立つ。

//

§5-3：函数等式(2)の証明

§5-3-1 巡回置換に対する不変性

$f \in \mathcal{S}(\overline{\mathcal{H}_0})$ を補題9の(2)の条件 a), b) を満足するようにとる。この時、補題11によって、

$$Z_{\mathbb{P}}(S;L;|H|^m f^g) = c_{\mathbb{P}} \cdot \int_{GL(m;\mathbb{C})/GL(m;\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_\nu} E_{\mathbb{P}}({}^t\bar{g}g)^{-1}; s_1,\cdots,s_{\nu-1}) \sum_{\xi \in L \cap V - S} |H|^m f^g(H[\xi^t g])\, dg$$

が、$Re(s_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1,\cdots,\nu$, $p_{\nu+1}=n-m$) で成立つ。

又、Poissonの和公式の結論として、

$$(*)_1 \quad v(L^*)^{-1} \sum_{\xi \in L \cap V - S} |H|^m f^g(H[\xi^t g]) = \|g\|^{-2n} \sum_{\xi \in L^* \cap V - S} f(H^{-1}[\xi \bar{g}^{-1}]) \qquad (g \in GL(m;\mathbb{C}))$$

が得られる。

さて、$E_{\mathbb{P}}(({}^t\bar{g}g)^{-1}; s_1,\cdots,s_{\nu-1})$ は、補題7,8によって、いま考えているTypeの概均質ベクトル空間のzeta函数の主要な因子として得られる。詳しく言えば、次のようになる。

$\mathbb{P}_1 = (p_1,\cdots,p_{\nu-1})$ は、$k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)}$ の rank $\nu-1$ の分割。$G_{\mathbb{P}_1}^{(g)} = U(({}^t\bar{g}g)^{-1}) \times B_{\mathbb{P}_1}$ ($g \in GL(m;\mathbb{C})$)、$V_1 = M(m, k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)};\mathbb{C})$、$S_1 = \{x \in V_1 \mid \mathrm{rank}\, x \lneq k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)}\}$、$L_1 = M(m; k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)}; \mathcal{O}_K)$ とおく。

$\overline{\mathcal{H}_1} = \{w \in M(k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)};\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{w} = w \geq 0\}$、$\mathcal{H}_1 = \{w \in \overline{\mathcal{H}_1} \mid w \gneq 0\}$ とおく。$\widetilde{dw}$、$\widetilde{dw^*}$ は、分割 $\mathbb{P}_1$ に対して、p.7,8 と同様に定義された $\mathcal{H}_1$ 上の $G_{\mathbb{P}_1}^{(g)}$-相対不変測度。$\pi_g : V_1 \to \overline{\mathcal{H}_1}$、$\pi_g^* : V_1 \to \overline{\mathcal{H}_1}$ は

$\pi_g(x)=({}^t\bar{g}g)^{-1}[x]$, $\pi_g^*(x)=({}^t\bar{g}g)[x]$ $(x\in V_1)$ $(g\in GL(m;\mathbb{C}))$ で定める。

任意の $g\in GL(m;\mathbb{C})$ に対し、$\varphi\circ\pi_g^*\big|_{S'}=0$、$\widehat{\varphi\circ\pi_g^*}\big|_{S'}=0$ となる $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{H}_1)$, $\varphi\neq 0$ を一つとる。補題9によってこのような φ は存在している。

$$\mathcal{E}_{\mathbb{P}_1}=\pi^{\frac{1}{2}(p_1^2+\cdots+p_{r-1}^2+k_{\mathbb{P}}^{(r-1)})}\cdot\Big(\prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=1}^{p_i}\Gamma(j)\Big)^{-1},\quad \sigma_0=\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & r\\ r, & 1, & \cdots, & r-1\end{pmatrix}$$

とおく。このとき、補題7.8、及び、補題1、より、

$(*)_2$. $Z_{\mathbb{P}_1}^{(g)}(s_1,\cdots,s_{r-1};L_1;\|g\|^{-2k_{\mathbb{P}}^{(r-1)}}\cdot\varphi^g)$

$$=\int_{B_{\mathbb{P}_1}/B_{\mathbb{P}_1}(\mathbb{Z})}\prod_{i=1}^{r-1}\chi_{\mathbb{P}_1}^{(i)}(b_1)^{s_i}\sum_{x\in L_1\cap V_1 S_1'}\|g\|^{2k_{\mathbb{P}}^{(r-1)}}\varphi^g\circ\pi_g(x\,{}^tb_1)\,db_1$$

$$=\mathcal{E}_{\mathbb{P}_1}\cdot\|g\|^{-2k_{\mathbb{P}}^{(r-1)}}\prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\zeta_K(s_i+\cdots+s_{r-1}-k_{\mathbb{P}_1}^{*(r-i-1)}-j)$$

$$\cdot\int_{H_1}\varphi^g(w)\prod_{i=1}^{r-1}|w[E_{\mathbb{P}_1}^{(i)}]|^{s_i}\widehat{dw}\cdot E_{\mathbb{P}}(({}^t\bar{g}g)^{-1};s_1,\cdots,s_{r-1})$$

$(*)_3$ $Z_{\mathbb{P}_1}^{*(g)}(s_1,\cdots,s_{r-1};L_1^*;\varphi)$

$$=\int_{B_{\mathbb{P}_1}/B_{\mathbb{P}_1}(\mathbb{Z})}\prod_{i=1}^{r-1}\chi_{\mathbb{P}_1}^{*(i)}(b_1)^{s_i}\sum_{y\in L_1^*\cap V_1 S_1'}\varphi\circ\pi_g^*(y\,\bar{b}_1^{-1})\,db_1$$

$$=\mathcal{E}_{\mathbb{P}_1}\cdot\Big(\frac{|D|}{4}\Big)^{\sum_{i=1}^{r-1}k_{\mathbb{P}_1}^{*(i)}s_i}\prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=0}^{p_{r-i}-1}\zeta_K(s_i+\cdots+s_{r-1}-k_{\mathbb{P}_1}^{(r-i-1)}-j)$$

$$\cdot\int_{H_1}\varphi(w)\prod_{i=1}^{r-1}|w[E_{\mathbb{P}_1}^{*(i)}]|^{s_i}\widetilde{dw}^*\cdot E_{\mathbb{P}^{\sigma_0}}^*(({}^t\bar{g}g)^{-1};s_1,\cdots,s_{r-1})。$$

ただし，Dは虚二次体Kの判別式である。$(*)_3$を導く際には，
$L_1^* = M(m, k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)} : 2\mathcal{D}^{-1})$ ($\mathcal{D}$ はKの共役差積) を利用すること
に注意しておく。

§5-1 の結果によって，$(*)_2$，$(*)_3$に現れる函数は，すべて
$\{(s_1, \cdots, s_{\nu-1}) \in \mathbb{C}^{\nu-1} \mid Re(s_i) > p_i + p_{i+1}\ (i=1,\cdots,\nu-2)\}$ 上の有理型函数
と考える。

<u>補題13</u> $d_i > p_i + p_{i+1}\ (i=1,\cdots,\nu-2)$, $M > \max\{p_{\nu-1}+p_\nu,$
$d_1 + \cdots + d_{\nu-2} + p_1 + p_\nu - m\}$ なる正数 $d_1,\cdots,d_{\nu-2}$, M をとり，

$$\Omega = \left\{ (s_1, \cdots, s_\nu) \in \mathbb{C}^\nu \;\middle|\; \begin{array}{l} d_i > Re(s_i) > p_i + p_{i+1} \quad (i=1,\cdots,\nu-2) \\ M > Re(s_{\nu-1}) > -M \end{array} \right\}$$

とおく。積分

$$\tilde{Z}_{\mathbb{P}}(s; L : |H|^m f^\rho) = C_{\mathbb{P}} \cdot \varepsilon_{\mathbb{P}_1}^{-1}$$
$$\times \int_{GL(m;\mathbb{C})/GL(m;\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_\nu + 2k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)}} Z_{\mathbb{P}_1}^{(g)}(s_1, \cdots, s_{\nu-1}; L_1 ; \|g\|^{-2k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)}} \psi^\rho) \sum_{\xi \in L \cap V\text{-}S} |H|^m f^\rho(H[\xi g])\, dg$$

$$\tilde{Z}_{\mathbb{P}}^*(s; L : |H|^m f^\rho) = C_{\mathbb{P}} \cdot \varepsilon_{\mathbb{P}_1}^{-1}$$
$$\times \int_{GL(m;\mathbb{C})/GL(m;\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_\nu + 2k_{\mathbb{P}}^{(\nu-1)}} Z_{\mathbb{P}_1}^{*(g)}(s_{\nu-2}, \cdots, s_1, m-s_1-\cdots-s_{\nu-1} ; L_1^* : \psi)$$
$$\times \sum_{\xi \in L \cap V\text{-}S} |H|^m f^\rho(H[\xi \, {}^t\bar{g}])\, dg.$$

を考えると、これらは Ω 上の正則函数を表わし、

$$\widetilde{Z}_{\mathfrak{p}}(s:L:|H|^m f^\rho) = v(L_1^*)\, \widetilde{Z}^*_{\mathfrak{p}}(s:L:|H|^m f^\rho)$$

なる関係式を満たす。

この補題の証明は後回しとし、まずこの等式の意味するところを考えてみる。

まず、$\Omega_1 = \{(s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{C}^r \mid Re(s_i) > p_i + p_{i+1} \ (i = 1, \cdots, r)\}$ 上では、$(*)_2$ と補題11の(i)によって、

$$\text{左辺} = \prod_{i=1}^{r-1} \prod_{j=0}^{p_i - 1} \zeta_K(s_i + \cdots + s_{r-1} - k_{\mathfrak{p}_1}^{*(r-i-1)} - j) \int_{H_1} \psi^\rho(w) \prod_{i=1}^{r-1} |w[E_{\mathfrak{p}_1}^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dw}$$

$$\times Z_{\mathfrak{p}}(s:L:|H|^m f^\rho)$$

一方、$(*)_3$ によれば、

$$\widetilde{Z}^*_{\mathfrak{p}}(s:L:|H|^m f^\rho) = \left(\frac{4}{|D|}\right)^{\sum_{i=1}^{r-1} k_{\mathfrak{p}_1}^{(i)} s_i - m \cdot k_{\mathfrak{p}}^{(r-1)}}$$

$$\times \prod_{i=1}^{r-1} \prod_{j=0}^{p_{r-i}-1} \zeta_K(-s_{r-i} - \cdots - s_{r-1} + k_{\mathfrak{p}_0}^{*(i+1)} - j) \cdot \int_{H_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{r-2} |w[E_{\mathfrak{p}_1}^{*(i)}]|^{s_{r-i-1}}$$

$$\cdot |w|^{m - s_1 - \cdots - s_{r-1}} \widetilde{dw}^*$$

$$\times C_{\mathfrak{p}} \int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2(s_{r-1} + s_r - p_r)} E_{\mathfrak{p}\rho_0}(m - s_1 - \cdots - s_{r-1}, s_1, \cdots, s_{r-2})$$

$$\times \sum_{\xi \in L \cap V-S} |H|^m f^\rho(H[\xi^t \bar{\xi}]) \, \frac{dg}{dh}.$$

ただし、ここで補題10を考慮に入れた。

従って、再度補題11の(i)によって

$$\Omega_2 = \left\{ (S_1, \cdots, S_r) \in \mathbb{C}^r \;\middle|\; \begin{array}{l} Re(S_i) > p_i + p_{i+1} \quad (i = 1, \cdots, r-2) \\ m - Re(S_1) - \cdots - Re(S_{r-1}) > p_r + p_1 \\ Re(S_{r-1}) + Re(S_r) > p_{r-1} + p_r + n - m \end{array} \right\}$$

上で、

$$\tilde{Z}^*_{\mathbb{P}}(S : L : |H|^n f^{\rho}) = \left(\frac{4}{|D|}\right)^{\sum_{i=1}^{r-1} k_{\mathbb{P}_1}^{(r-i-1)} S_i - m k_{\mathbb{P}}^{(r-1)}} \cdot \prod_{i=1}^{r-1} \prod_{j=0}^{p_{r-i}-1} \zeta_K(-S_{r-i} - \cdots - S_{r-1} + k^{*(i)}_{\mathbb{P}_1} - j)$$

$$\times \int_{\mathcal{D}_1} \varphi(w) \prod_{i=1}^{r-2} |w[E^{*(i)}_{\mathbb{P}_1}]|^{S_{r-i-1}} \cdot |w|^{m - S_1 - \cdots - S_{r-1}} \, d\tilde{w}^*$$

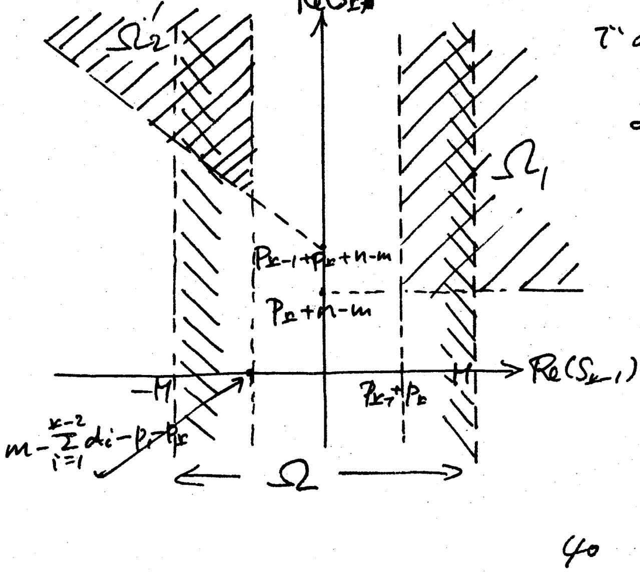
$$\times Z_{\mathbb{P}\sigma_0}(m - S_1 - \cdots - S_{r-1}, S_1, \cdots, S_{r-2}, S_{r-1} + S_r - p_r : L : |H|^m f^{\rho})$$

である。

ここで $d_i > Re(S_i) > p_i + p_{i+1}$ $(i = 1, \cdots, r-2)$ に制限してみる。

$$\Omega'_2 = \left\{ (S_1, \cdots, S_r) \in \mathbb{C}^r \;\middle|\; \begin{array}{l} d_i > Re(S_i) > p_i + p_{i+1} \quad (i = 1, \cdots, r-2) \\ m - \sum_{i=1}^{r-2} d_i - p_1 - p_r > Re(S_{r-1}) \\ Re(S_{r-1}) + Re(S_r) > p_{r-1} + p_r + n - m \end{array} \right\}$$

とおくと $\Omega'_2 \subset \Omega_2$。$M$ のとり方に注意すると、Ω, Ω_1, Ω'_2 の間に、下図のような交わりが存在する。($d_i > Re(S_i) > p_i + p_{i+1}$ $(i = 1, \cdots, r-2)$ での図である。)



よって、$\tilde{Z}_{\mathbb{P}}(S : L : |H|^m f^{\rho})$ (従って、$Z_{\mathbb{P}}(S : L : |H|^m f^{\rho})$) は $\Omega \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ の convex hull すなわち

$$\left\{ (S_1, \cdots, S_r) \in \mathbb{C}^r \;\middle|\; \begin{array}{l} Re(S_i) > p_i + p_{i+1} \\ i = 1, \cdots, r-2 \end{array} \right\}$$

上の有理型函数へ解析接続される。

$$\begin{cases} s_1 \longmapsto m - s_1 - \cdots - s_{k-1} \\ s_2 \longmapsto s_1 \\ \quad \cdots\cdots \\ s_{k-1} \longmapsto s_{k-2} \\ s_k \longmapsto s_{k-1} + s_k - p_k \end{cases}$$

という変換を(#)によって、$z_1, \cdots, z_k$についての変換に書きなおすと、これは、$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & k \\ k, & 1, & \cdots, & k-1 \end{pmatrix}$に対し、

$$\{ z_i \longmapsto z_{\sigma_0(i)} \ , \ p_i \longmapsto p_{\sigma_0(i)} \mid i = 1, \cdots, k \}$$

という変換を行っていることになる。つまり、補題13は、$Z_{\mathbb{P}}(z : L : \mathbb{H}^m f^\rho)$と$Z_{\mathbb{P}\sigma_0}(z_{\sigma_0(1)}, \cdots, z_{\sigma_0(k)} : L : \mathbb{H}^m f^\rho)$の間に成立つ函数等式を与えている。

次に、この函数等式を見やすい型に整理してみよう。

命題1と補題1を考慮して書きかえると、

$$\pi^{-\sum_{i=1}^{k-1} k_{\mathbb{P}}^{(i)} s_i} \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i - 1} \Gamma(s_i + \cdots + s_{k-1} - k_{\mathbb{P}_1}^{*(k-i-1)} - j)$$
$$\times \int_{H_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{k-2} |w[E_{\mathbb{P}_1}^{*(i)}]|^{s_{k-i-1}} |w|^{m - s_1 - \cdots - s_{k-1}} \widetilde{dw^*}$$
$$= \pi^{\sum_{i=1}^{k-1} k_{\mathbb{P}}^{(i)} s_i - m k_{\mathbb{P}}^{(k-1)}} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_{k-i} - 1} \Gamma(-s_{k-i} - \cdots - s_{k-1} - k_{\mathbb{P}}^{(i+1)} - j)$$
$$\times \int_{H_1} \psi^\rho(w) \prod_{i=1}^{k-1} |w[E_{\mathbb{P}_1}^{(i)}]|^{s_i} \widetilde{dw}$$

又、$v(L_1^*) = \left(\frac{2}{\sqrt{D}}\right)^{m k_{\mathbb{P}}^{(k-1)}}$である。

これを利用して、変形すれば、補題13の示すところは、

$$\prod_{i=1}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\eta_K\left(z_\nu-z_i+\frac{p_i+p_\nu}{2}-j\right)\cdot Z_P(z_1,\cdots,z_\nu:L:|H|^{\mu}f^{g})$$
$$=\prod_{i=1}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\eta_K\left(z_i-z_\nu+\frac{p_i+p_\nu}{2}-j\right)Z_{P^{\sigma_0}}(z_{\sigma_0(1)},\cdots,z_{\sigma_0(\nu)}:L:|H|^{\mu}f^{g})$$

である。補題8と命題2をあわせれば、

$$\prod_{i=1}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\eta_K\left(z_\nu-z_i+\frac{p_i+p_\nu}{2}-j\right)\zeta_P(L:z_1,\cdots,z_\nu)$$
$$=\prod_{i=1}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{p_i-1}\eta_K\left(z_i-z_\nu+\frac{p_i+p_\nu}{2}-j\right)\zeta_{P^{\sigma_0}}(L:z_{\sigma_0(1)},\cdots,z_{\sigma_0(\nu)})$$

が得られる。すなわち、巡回置換 $\sigma_0=\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & \nu\\ \nu, & 1, & \cdots, & \nu-1\end{pmatrix}$ に対する函数等式である。

又、この函数等式によって、$\zeta_P(L:z_1,\cdots,z_\nu)$ の $\mathbb{C}^\nu$ 上の有理型函数への解析接続が得られる。実際、今説明したように、$\zeta_P(L:z_1,\cdots,z_\nu)$ は、変数 $z_{\nu-1}, z_\nu$ について全平面に解析接続される。右辺を調べれば、$z_{\nu-2}, z_{\nu-1}$ について全平面に解析接続されている。よって、この函数等式で、$\zeta_P(L:z_1,\cdots,z_\nu)$ は $z_{\nu-2}$ について全平面で定義できる。以下、σ_0^i $(i=1,2,\cdots)$ に対応する函数等式を利用して、ζ_P の $\mathbb{C}^\nu$ 上への解析接続を得る。

(補題13の証明)

積分 $\tilde{Z}_P(s:L:|H|^{\mu}f^{g})$ が Ω 上で絶対収束することをいえばよい。このとき、函数等式は、$Z_{P_1}^{(g)}$ の §5-1 で論じた函数等式から直ちに従う。

$f^g\geq 0$ と仮定してよい。以下、絶対値を考えるから $s_i\in\mathbb{R}$。

補題12により、

$$\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2(s_r+k_P^{(r-1)})} \left| Z_{P_1}^{(g)}(s_1,\cdots,s_{r-1}:L_1:\|g\|^{-2k_P^{(r-1)}}\varphi^g) \right| \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^g(H[\xi\, {}^t g])\, dg$$

$$\leqq \int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_r} Z_{P_1}^{(g)}(s_1,\cdots,s_{r-2},M:L_1:\varphi_1) \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^g(H[\xi\, {}^t g])\, dg$$

$$+ v(L_1^*)\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_r} Z_{P_1}^{*(g)}(s_{r-2},\cdots,s_1,m+M-s_1-\cdots-s_{r-2}:L_1^*:\varphi_2) \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^g(H[\xi\, {}^t g])\, dg.$$

$$= \int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_r} Z_{P_1}^{(g)}(s_1,\cdots,s_{r-2},M:L_1:\varphi_1) \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^g(H[\xi\, {}^t g])\, dg$$

$$+ v(L_1^*)\, v(L^*) \int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_r+2k_P^{(r-1)}-2m} Z_{P_1}^{*(g)}(s_{r-2},\cdots,s_1,M+m-s_1-\cdots-s_{r-2}:L_1^*:\varphi_2)$$

$$\times \sum_{\eta\in L^*\cap V-S} f(H^{-1}[\eta\, \bar{g}^{-1}])\, dg.$$

Ω 上では. $M+m-s_1-\cdots-s_{r-2} > M+m-d_1-\cdots-d_{r-2} > P_1+P_r$ となることに注意する. 才一の積分について考えると, $(*)_2$ より,

$$\text{積分} = \varepsilon_{P_1}\cdot \prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=0}^{P_i-1} \zeta_K(s_i+\cdots+s_{r-2}+M-k_{P_1}^{*(r-i-1)}-j)\cdot \int_{\mathbb{D}_1} \varphi_1(w) \prod_{i=1}^{r-2} |w[E_{P_1}^{(i)}]|^{s_i} |w|^M d\tilde{w}$$

$$\times \int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:\mathcal{O}_K)} \|g\|^{2s_r} E_P({}^t\bar{g}g)^{-1}:s_1,\cdots,s_{r-2},M) \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^g(H[\xi\, {}^t g])\, dg$$

$$= \varepsilon_{P_1} \prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=0}^{P_i-1} \zeta_K(s_i+\cdots+s_{r-2}+M-k_{P_1}^{*(r-i-1)}-j) \int_{\mathbb{D}_1} \varphi_1(w) \prod_{i=1}^{r-2} |w[E_{P_1}^{(i)}]|^{s_i} |w|^M d\tilde{w}$$

$$\times\left\{\int_{\substack{GL(n:\mathbb{C})/GL(n:\mathcal{O}_K)\\ \|g\|\geq 1}} \|g\|^{2s_k+\cancel{2k_{\mathbb{P}}(n-1)-2n}} E_{\mathbb{P}}({}^t\bar{g}g)^{-1}: s_1,\cdots s_{k-2}, M) \sum_{\xi\in L\cap V-S} |H|^m f^g(H[\xi\,{}^tg])\,dg\right.$$

$$\left. + v(L^*)\cdot\int_{\substack{GL(n:\mathbb{C})/GL(n:\mathcal{O}_K)\\ \|g\|\leq 1}} \|g\|^{2(s_k+M+s_{k-2}+\cdots+s_1-n)} E^*_{\mathbb{P}}({}^t\bar{g}g)^{-1}: M s_{k-2},\cdots s_1) \sum_{\xi\in L\cap V-S} f(H^{-1}[\eta\bar{g}^{-1}])\,dg\right\}$$

補題11のRemarkによって、これらの積分は収束する。

オ2の積分についても、全く同様であるから省略する。　//

§5-3-2.　互換に対する不変性.

巡回置換に対する函数等式を考慮すれば、$\sigma=(1,2)$ について証明すれば十分である。$\sigma=(1,2)$ について、$z_1\to z_2$, $z_2\to z_1$, $p_1\to p_2$, $p_2\to p_1$ なる変換を s_i の変換に書きなおしてみると、

$$\begin{cases} s_1 \longrightarrow t_1 = -s_1 + (p_1+p_2) \\ s_2 \longrightarrow t_2 = s_1+s_2-p_2 \\ s_i \longrightarrow t_i = s_i \qquad (i=3,\cdots,k) \end{cases}$$

命題2により、

$$Z_{\mathbb{P}^\sigma}(t_1,\cdots t_k : L^* : |H|^m f) = \prod_{j=0}^{p_1-1} \frac{\eta_k(z_2-z_1+\frac{p_1+p_2}{2}-j)}{\eta_k(z_1-z_2+\frac{p_1+p_2}{2}-j)}\, Z_{\mathbb{P}}(s_1,\cdots s_k : L^* : |H|^m f)$$

を証明すればよい。

νに関する帰納法で証明する。$\nu=2$の時は、$\sigma=\sigma_0$、すなわち、§5-3-1で求めた巡回置換についての函数等式に他ならぬ。

以下、$\nu\geqq 3$とする。

補題9の(2)の条件a)、b)を満足する$f\in S(\mathcal{H}_0)$について、

$$Z^*_{\mathbb{P}^\sigma}(t_{\nu-1},\cdots,t_1,n-t_1-\cdots-t_\nu;L^*;f)$$
$$=\int_{GL(n;\mathbb{C})/GL(n;O_K)}\|g\|^{-2(n-t_1-\cdots-t_\nu)}E^*_{\mathbb{P}^\sigma}(\tilde{\xi}\tilde{\xi}^{-1};t_{\nu-1},\cdots,t_1)\sum_{\xi\in L^*\cap V-S}f(H^{-1}[\xi\bar{\xi}^{-1}])dg$$

§5-3-1と、同様の条件の下で、

$$\int_{GL(n;\mathbb{C})/GL(n;O_K)}\|g\|^{-2(n-t_1-\cdots-t_\nu)}Z^{*(g)}_{\mathbb{P}_2}(t_{\nu-1},\cdots,t_1;L_1^*;\varphi)\sum_{\xi\in L^*\cap V-S}f(H^{-1}[\xi\bar{\xi}^{-1}])dg$$

$$\mathbb{P}_2=(p_1,p_3,\cdots p_\nu)$$

を考えれば、補題13と同じ論法で、

$$\tilde{\Omega}=\left\{(t_1,\cdots,t_\nu)\in\mathbb{C}^\nu\;\middle|\;\begin{array}{l}M>t_1>-M,\\ d_2>t_2>p_1+p_3\\ d_3>t_3>p_3+p_4\\ \cdots\\ d_{\nu-1}>t_{\nu-1}>p_{\nu-1}+p_\nu\end{array}\right\}$$

$M,\ d_2,\cdots,d_{\nu-1}$は十分大なる正数。(Mはd_iに依存する。)

なる領域上で意味を持ち、正則函数を表わす。

また、

$$\tilde{\Psi}(t_1,\cdots,t_{\nu-1})=\varepsilon_{\mathbb{P}_2}\cdot\left(\frac{D}{4}\right)^{\sum_{i=1}^{\nu-1}k^{*(i)}_{\mathbb{P}_2}t_{\nu-i}}\prod_{i=1}^{\nu-1}\prod_{j=0}^{p_{\sigma(\nu-i)}-1}\zeta_K(t_{\nu-i}+\cdots+t_1-k^{(\nu-i-1)}_{\mathbb{P}_2}-j)$$
$$\times\int_{\mathcal{H}_1}\varphi(w)\prod_{i=1}^{\nu-1}|w[E^{+(i)}_{\mathbb{P}_2}]|^{s_i}\widetilde{dw^*}$$

とおけば、$(*)_3$ より、

積分 $= \Psi(t_1,\dots,t_{r-1})\cdot Z^*_{P^\sigma}(t_{r-1},\cdots,t_1,n-t_1-\cdots-t_r : L^* : f)$

一方、Poissonの和公式と補題10より、

積分 $= v(L^*)^{-1}\cdot\tilde{\Psi}(t_1,\dots,t_{r-1})$

$$\times\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:O_k)} \|g\|^{2t_r} E_{P^\sigma}(({}^t\bar{g}g)^{-1} : t_1,\dots,t_{r-1}) \sum_{\xi\in L^*\cap T-S} |H|^m f^\rho(H[\xi\,{}^t g])\,dg.$$

帰納法の仮定によって、

$$E_{P^\sigma}(({}^t\bar{g}g)^{-1} : t_1,\dots,t_{r-1}) = \prod_{j=0}^{p_1-1}\frac{\eta_k(z_2-z_1+\frac{p_1+p_2}{2}-j)}{\eta_k(z_1-z_2+\frac{p_1+p_2}{2}-j)}E_P(({}^t\bar{g}g)^{-1} : s_1,\dots,s_{r-1})$$

だから、これは、

$$v(L^*)^{-1}\cdot\tilde{\Psi}(t_1,\dots,t_{r-1})\cdot\prod_{j=0}^{p_1-1}\eta_k(z_2-z_1+\tfrac{p_1+p_2}{2}-j)/\eta_k(z_1-z_2+\tfrac{p_1+p_2}{2}-j)$$

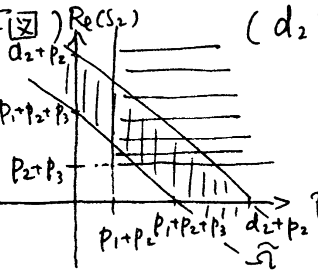
$$\times\int_{GL(m:\mathbb{C})/GL(m:O_k)} \|g\|^{2s_r} E_P(({}^t\bar{g}g)^{-1} : s_1,\dots,s_{r-1}) \sum_{\xi\in L^*\cap T-S} |H|^m f^\rho(H[\xi\,{}^t g])\,dg$$

従って、$\{\mathrm{Re}(s_i)>p_i+p_{i+1}\ (i=1,\dots,r)\}$ 上では、この積分は収束し、

積分 $= v(L^*)^{-1}\tilde{\Psi}(t_1,\dots,t_{r-1})\prod_{j=0}^{p_1-1}\eta_k(z_2-z_1+\frac{p_1+p_2}{2}-j)/\eta_k(z_1-z_2+\frac{p_1+p_2}{2}-j)$

$\times Z_P(s_1,\dots,s_r : L : |H|^m f^\rho)$.

さて、$\tilde{\Omega}$ と $\{\mathrm{Re}(s_i)>p_i+p_{i+1}\ (i=1,\dots,r)\}$ は、共通部分を有するようにできる (cf 下図) ($d_2>p_1+2p_2+p_3$ ととれるから)。



従って、以上の結果をまとめれば、

$$Z_{P^\sigma}(t_1,\dots,t_r : L^* : |H|^m f) = \prod_{j=0}^{p_1-1}\frac{\eta_k(z_2-z_1+\frac{p_1+p_2}{2}-j)}{\eta_k(z_1-z_2+\frac{p_1+p_2}{2}-j)}Z_P(s_1,\dots,s_r : L^* : |H|^m f)$$

これで、ξ_pに関する函数等式は完全に証明された。ξ_p^*については、函数等式(1)を利用して、この等式を書き直せばよい。

<参考文献>

[1] I.M. Bernstein & S.I. Gel'fand, Meromorphy of the function P^λ, Funct. Anal. & its Appl. 3. 1. (1969) 84-86.

[2] A. Borel, Introduction to automorphic forms, Proc. Symp. Pure Math. IX A.M.S. Providence (1966) 199-210

[3] S. Helgason, Differential geometry and Symmetric spaces. New York, Academic Press (1962)

[4] 柏原-三輪, Micro local calculus と概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換, 数理研講究録 238 (1975) 60-147.

[5] 室正和, Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換について, 数理研講究録"代数解析学の諸問題" (1975)

[6] H. Maass. Siegel's Modular forms and Dirichlet series, Lect. note in Math, vol 216, Springer, (1971)

[7] 佐藤-新谷, 概均質ベクトル空間の理論, 数学の歩み 15-1

[8] M. Sato and T. Shintani, Zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. (1974) 100 131-170

[9]. C.L.Siegel , Lectures on quadratic forms . Tata (1957)

[10] A.Terras. A generalization of Epstein's Zeta function Nagoya Math. Jour. (42) 1971 173-188

[11] A.Terras. Functional equations of generalized Epstein Zeta functions in several complex variables , Nagoya Math. Jour. (44) 1971, 89-95.

[12] A. Weil . Sur certains groupes d'operateurs unitaires, Acta Math. 111 (1964) 143-211.