数理解析研究所講究録
262巻 1976年 54-71

対称空間上の固有函数の境界値と積分表示

日本女子大　峰村勝弘

§1. Helgasonの結果と予想

周知の様に，S. Helgasonは 1970年のNice Congressで，単位円内部 $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$ における laplacian

$$\Delta=(1-x^2-y^2)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\quad z=x+iy$$

の固有函数はすべて，単位円周 $S=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\}$ の上の hyperfunction φ とある複素数 μ により，次の Poisson 積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}\right)^{\mu}\varphi(e^{i\theta})\,d\theta$$

として得られることを示し，一般の(non-compact)対称空間での成立を予想した([1])．以下これを Helgason予想と呼ぶことにする。まず上の定理を簡単に説明しよう。

Lie group $G=SU(1,1)=\left\{g=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \bar{\beta}&\bar{\alpha}\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha,\beta\in\mathbb{C},\ |\alpha|^2-|\beta|^2=1\right\}$ の $P_1(\mathbb{C})=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の作用を

$$g(z)=(\alpha z+\beta)/(\bar{\beta}z+\bar{\alpha}),\quad z\in P_1(\mathbb{C})$$

により定める。 $K=\left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta}\end{pmatrix} \middle| \theta\in\mathbb{R}\right\}$ とおくと，K は $0\in D$ の isotropy subgroup となる。G は D に推移的に作用するから，$G/K\ni gK\longmapsto g(0)\in D$ に同型となる。以下，G/K と D を同一視する。G の subgroups M, A, N を

$$M=\left\{\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\ A=\left\{\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,t & \mathrm{sh}\,t\\ \mathrm{sh}\,t & \mathrm{ch}\,t\end{pmatrix}\middle| t\in\mathbb{R}\right\},\ N=\left\{\begin{pmatrix}1+i\xi & -i\xi\\ i\xi & 1-i\xi\end{pmatrix}\middle|\xi\in\mathbb{R}\right\}$$

で定義し，$P=MAN$ とおく。P は $1\in S$ の isotropy subgroup となる。従って，$G/P\simeq S$ となる。S 上の hyperfunction 全体を $\mathcal{B}(S)$ と書く。

次に，S 上の real-analytic functions 全体を $\mathcal{A}(S)$ で表わす。U を，S を含む $\mathbb{C}$ における開集合とし，$H(U)$ で U 上の holomorphic functions 全体のなす空間で，U 内の compact sets 上の一様収束で位相を入れた top. vector space を表わす。$\mathcal{A}(S)$ の strong dual を $\mathcal{A}(S)'$ とすると

$$\mathcal{B}(S)\cong\mathcal{A}(S)'$$

が成立する。この同型対応については後に述べる。

さて $\psi\in\mathcal{A}(S)$ を一つとり固定しよう。任意の $\varphi\in\mathcal{A}(S)$ に対して

$$\psi(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})\psi(e^{i\theta})\,d\theta$$

とおくと，$\mathcal{A}(S)\ni\varphi\longmapsto\psi(\varphi)\in\mathbb{C}$ は $\mathcal{A}(S)'$ に属する。従って以下この対応で $\mathcal{A}(S)\subset\mathcal{A}(S)'$ とみなす。

$n\in\mathbb{Z}$に対して　$\varphi_n\in\mathcal{A}(S)$を

$$\varphi_n(e^{i\theta})=e^{in\theta}$$

で定める。このとき任意の$\varphi\in\mathcal{A}(S)'$は$\mathcal{A}(S)'$の位相で

$$\varphi=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\varphi_n$$

と展開される。ここで　a_nの満たすべき条件は

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|r^{|n|}<\infty\qquad(1>{}^{\forall}r\geq 0)$$

D上のG－不変な differential operators のなす algebra を$\mathbb{D}(D)$と書くことにすれば，$\Delta\in\mathbb{D}(D)$であり，$\mathbb{D}(D)$はΔにより生成される。すなわち．$\mathbb{D}(D)\cong\mathbb{C}[\Delta]$。　$\lambda\in\mathbb{C}$に対し．

$$\mathcal{A}(D,\lambda)=\{u\in\mathcal{B}(D)\mid\Delta u=\lambda(\lambda+1)u\}$$

とおく。ここで　$\mathcal{B}(D)$はD上の hyperfunctions 全体のなす空間である。Δは elliptic であるから．$\mathcal{A}(D,\lambda)$の元は real analytic である。

$$P(z,e^{i\theta})=\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}$$

とおくと，任意にθを固定したとき　$P_\lambda(z,e^{i\theta})=P(z,e^{i\theta})^{\lambda+1}$は$\mathcal{A}(D,\lambda)$に属することが容易に確かめられる。従って　$\varphi\in\mathcal{A}(S)'$に対して　D上の函数　$\mathcal{P}_\lambda(\varphi)$　を

$$(\mathcal{P}_\lambda(\varphi))(z)=\varphi(P_\lambda(z,\cdot))$$

で定義すると．$\mathcal{P}_\lambda(\varphi)\in\mathcal{A}(D,\lambda)$となる。

また．$u\in\mathcal{A}(D,\lambda)$，$g\in G$　に対し

$$(\pi(g)u)(z) = u(g^{-1}(z)) \quad , \quad z \in D$$

とおけば π により $\mathcal{A}(D,\lambda)$ は G-module となる。一方 $\varphi \in \mathcal{B}(S)$ に対し

$$(\pi_\lambda(g)\varphi)(\omega) = |\bar{\alpha}\omega - \beta|^{2\lambda}\varphi(g^{-1}(\omega)),$$
$$\omega \in S, \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

とおけば π_λ により $\mathcal{B}(S)$ は G-module となり，$\mathcal{P}_\lambda$ は $\mathcal{B}(S)$ から $\mathcal{A}(D,\lambda)$ への G-homomorphism を与えていることがわかる：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(S) & \xrightarrow{\mathcal{P}_\lambda} & \mathcal{A}(D,\lambda) \\ {\scriptstyle \pi_\lambda(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi(g)} \\ \mathcal{B}(S) & \xrightarrow{\mathcal{P}_\lambda} & \mathcal{A}(D,\lambda) \end{array}$$ 。

さて，$\varphi_n \in \mathcal{A}(S)$ に対して $f_\lambda^n = \mathcal{P}_\lambda(\varphi_n)$ とおこう。すると $\mathcal{A}(S) \ni \varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi_n$ に対して

$$\mathcal{P}_\lambda(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f_\lambda^n$$

となり，又 f_λ^n に関しては

$$\begin{cases} f_\lambda^n(e^{i\theta}z) = e^{in\theta} f_\lambda^n(z) \\ f_\lambda^n(r) = (1-r^2)^{\lambda+1} r^{|n|} \dfrac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(|n|+1)} \\ \qquad \times F(\lambda+1, |n|+\lambda+1, |n|+1; r^2) \quad (0 \le r < 1) \end{cases}$$

となることがわかる。一方任意の $f \in \mathcal{A}(D,\lambda)$ は

$$f(e^{i\theta}z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{in\theta}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta}z)e^{-in\theta}\,d\theta$$

と展開されるが，$\lambda\notin-\mathbb{N}$ のとき $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta}z)e^{-in\theta}d\theta$ は f_λ^n の scalar 倍になることがわかる。従って

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_n f_\lambda^n \qquad (b_n\in\mathbb{C})$$

という展開が得られる。ここで，先の f_λ^n の具体的な形を見てやることによって，この係数 b_n は S 上の hyperfunction の φ_n による展開の係数の満たす条件

$$(1) \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_n|\,r^{|n|}<\infty \qquad (1>r\geqq 0)$$

を満足するので，$\varphi=\sum b_n\varphi_n$ とおくと $\varphi\in\mathcal{A}(S)'$ であり，$\mathcal{P}_\lambda(\varphi)=f$ となることが容易にわかる。故に，$\lambda\notin-\mathbb{N}$ のとき $\mathcal{P}_\lambda$ が全射であることが結論される。

実は，この方法で，Lorentz group の場合は全く同様に，同じ定理が証明出来るのだが，$SU(n,1)$, $Sp(n,1)$, FII では弱い形の定理しか証明出来ない。又この方法は f_λ^n の explicit な形を必要とするため，対称空間の rank が 2 以上の場合は実行不可能である。

§2. 固有函数の境界値

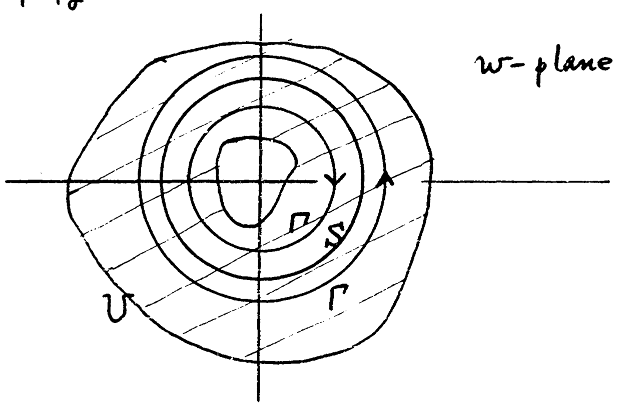
この§では、§1とは見方を変えて、同じ問題を考えてみる。まず§1での $\mathcal{B}(S) \cong \mathcal{A}(S)'$ の同型対応について述べよう。（詳しくは[ ]）。定義より

$$\mathcal{B}(S) = \varinjlim_{U \supset S} H(U-S)/H(U)$$

である。$F \in H(U-S)$ の定める $\mathcal{B}(S)$ の元 φ を $\varphi = [F, U]$ あるいは $\varphi(\omega) = [F(w)]_{w=\omega}$ などと記す。φ の S 上の積分 $\int_S \varphi(\omega)\,d\omega$ を

$$\int_S \varphi(\omega)\,d\omega = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(w)\frac{dw}{w}$$

で定める。但し Γ は



で与えられる積分路である。積分は代表元 F と積分路 Γ の取り方に依らない。$\psi \in \mathcal{A}(S)$ と $\varphi \in \mathcal{B}(S)$ に対して、ある $U \supset S$, $F \in H(U-S)$ が存在して、$\varphi = [F]$, $\psi \in H(U)$ となる。そこで、$[\psi(w)F(w)]$ により ψ と φ の積 $\psi\varphi$ を定義する。この積により $\mathcal{B}(S)$ は $\mathcal{A}(S)$-module となる。$U \supset S$ に対し

$U_0=\{w\in U \mid |w|<1\}$, $U_\infty=\{w\in U\mid |w|>1\}$ とおく。
$\varepsilon_0,\varepsilon_\infty\in H(\mathbb{C}-S)$ を $|w|<1$ のとき $\varepsilon_0(w)=1$, $\varepsilon_\infty(w)=0$ とし $|w|>1$ のとき $\varepsilon_0(w)=0$, $\varepsilon_\infty(w)=-1$ として定義する。
$\psi\in\mathcal{A}(S)$ に対し $\psi\in H(U)$ なる U をとり，$G\in H(U-S)$ を $G(w)=\varepsilon_0(w)\psi(w)$ で定めれば $\psi\mapsto[G]$ は $\mathcal{A}(S)$ から $\mathcal{B}(S)$ への injection を与える。以下この対応で $\mathcal{A}(S)\subset\mathcal{B}(S)$ と考える。$\psi\in H(D)$ に対して $[\varepsilon_0\psi]=[\varepsilon_\infty\psi]$ であることに注意する。

さて，$\varphi\in\mathcal{B}(S)$ と $\psi\in\mathcal{A}(S)$ に対して pairing (φ,ψ) を

$$(\varphi,\psi)=\int_S(\psi\varphi)(w)\,dw$$

で定める。この pairing で φ は $\mathcal{A}(S)'$ の元とみなせ，

$$\mathcal{B}(S)\cong\mathcal{A}(S)'$$

が得られる。容易に，

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(S) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{A}(S)' \\
\mathcal{A}(S) \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[ur]
\end{tikzcd}$$

が可換であることがわかる。従って，上の同一視で $\varphi\in\mathcal{B}(S)$ の Poisson 積分は

$$(\mathcal{P}_S(\varphi))(z)=\int_S P_\lambda(z,w)\varphi(w)\,dw$$

$$= (\varphi(\omega), P_\lambda(z, \omega))$$

で与えられる。

次に、$\varphi \in \mathcal{B}(S)$ の Poisson 積分を、φ の定義函数を使って、具体的に書き下してみよう。

$$P(z, \omega) = \frac{1-|z|^2}{|z-\omega|^2}$$

は $\omega \in S$ に関して real analytic である。$\omega^{-1} = \bar{\omega}$ に注意すると

$$\frac{1-|z|^2}{|z-\omega|^2} = \frac{\omega}{\omega - z} - \frac{\omega}{\omega - \frac{1}{\bar{z}}}$$

と書き直せる。そこで

$$Q(z, w) = \frac{w}{w-z} - \frac{w}{w - \frac{1}{\bar{z}}}$$

とおけば、$z \in D$ を fix するごとに $Q(z, w)$ は S の近傍で正則で、$Q(z, \omega) = P(z, \omega)$ $(w \in S)$ をみたす。
$Q(z, \omega) = P(z, \omega) > 0$ であるから $Q_\lambda(z, w) = Q(z, w)^{\lambda+1}$ が S の近傍で一価正則で、$Q_\lambda(z, \omega) = P_\lambda(z, \omega)$ なるように定義出来る。従って $\varphi = [F, U] \in \mathcal{B}(S)$ に対して、Γ を次の様にとれば

$$(P_\lambda(\varphi))(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q_\lambda(z, w) F(w) \frac{dw}{w} .$$

<u>例</u> $\mathcal{P}_0(\varphi_n)$ $\varphi_n(e^{i\theta})=e^{in\theta}$

① $n>0$ の場合

$$\varphi_n(\omega)=[\varepsilon_0(w)\,w^n]_{w=\omega}$$

$$\left(\mathcal{P}_0(\varphi_n)\right)(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-\frac{1}{\bar{z}}}\right)\varepsilon_0(w)\,w^n\frac{dw}{w}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(z)}\frac{w^n}{w-z}\,dw=z^n$$

② $n<0$ の場合

$$\varphi_n(\omega)=[\varepsilon_0(w)\,w^{-|n|}]_{w=\omega}=[\varepsilon_\infty(w)\,w^{-|n|}]_{w=\omega}$$

$$\left(\mathcal{P}_0(\varphi_n)\right)(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-\frac{1}{\bar{z}}}\right)\varepsilon_\infty(w)\,w^{-|n|}\frac{dw}{w}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(D)}\left(\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-\frac{1}{\bar{z}}}\right)w^{-|n|}\frac{dw}{w}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{1}{\bar{z}})}\left(\frac{w}{w-z}-\frac{w}{w-\frac{1}{\bar{z}}}\right)w^{-|n|}\frac{dw}{w}$$

$$=\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^{-|n|}=\bar{z}^{|n|}$$

従って $\mathcal{P}_0(\varphi_n)=\begin{cases} z^n & n\geq 0 \\ \bar{z}^{|n|} & n<0 \end{cases}$

この結果は確に $f_\lambda^n(z)$ の $\lambda=0$ の場合に一致している。

また. $f_\lambda^n=\mathcal{P}_\lambda(\varphi_n)$ の hyperfunction としての境界値が次の様

にして取ることが出来る。超幾何函数に対するGaussの変換公式　$(\alpha+\beta-\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ とする。$)$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; z)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1; 1-z)$$

$$+ \Gamma(\alpha+\beta-\gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z)$$

により

$$f_\lambda^n(x) = (1-x^2)^{\lambda+1} x^{|m|} \frac{\Gamma(|m|+\lambda+1)\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(|m|-\lambda)\Gamma(-\lambda)}$$

$$\times F(\lambda+1, |m|+\lambda+1, 2\lambda+2; 1-x^2)$$

$$+ (1-x^2)^{-\lambda} x^{|m|} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2} F(|m|-\lambda, -\lambda, -2\lambda; 1-x^2)$$

$$(-2\lambda-1 \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

と表わされる。ここで $D-\{0\}$ に次の様なparameterを入れる。

$$\begin{array}{ccc} D-\{0\} & \approx & S\times(0,1) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ G/K-\{eK\} & \approx & K/M\times(0,1) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ kaK & \longleftrightarrow & (kM, y) \end{array} \qquad y = e^{-\alpha(\log a)}$$

容易に、$D \ni z = x e^{i\theta}$ とするとき $x = (1-y)/(1+y)$ となることがわかる。従って

$$f_\lambda^n(x) = y^{\lambda+1}\left(\frac{2}{1+y}\right)^{2\lambda+2}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{|n|}\frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(|n|-\lambda)\Gamma(-\lambda)}$$
$$\times F\left(\lambda+1, |n|+\lambda+1, 2\lambda+2; \frac{4y}{(1+y)^2}\right)$$
$$+ y^{-\lambda}\left(\frac{2}{1+y}\right)^{-2\lambda}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{|n|}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}F\left(|n|-\lambda, -\lambda, -2\lambda; \frac{4y}{(1+y)^2}\right)$$

ここで

$$\varphi(e^{i\theta}, y) = \left(\frac{2}{1+y}\right)^{2\lambda+2}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{|n|}\frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(|n|-\lambda)\Gamma(-\lambda)}$$
$$\times F\left(\lambda+1, |n|+\lambda+1, 2\lambda+2; \frac{4y}{(1+y)^2}\right)\times e^{in\theta}$$

$$\psi(e^{i\theta}, y) = \left(\frac{2}{1+y}\right)^{-2\lambda}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{|n|}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}$$
$$\times F\left(|n|-\lambda, -\lambda, -2\lambda; \frac{4y}{(1+y)^2}\right)\times e^{in\theta}$$

とおき，$f_\lambda^n(re^{i\theta}) = e^{in\theta} f_\lambda^n(r)$ に注意すれば；

$$f_\lambda^n(re^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta}, y)\, y^{\lambda+1} + \psi(e^{i\theta}, y)\, y^{-\lambda}$$

が得られる。さてここで $\varphi(e^{i\theta}, 0)$，$\psi(e^{i\theta}, 0)$ に意味がある。

そこで　$\varphi(\omega) = \varphi(\omega, 0)$，$\psi(\omega) = \psi(\omega, 0)$　とおいて

$$\beta_\lambda(f_\lambda^n) = \psi$$
$$\beta_{-(\lambda+1)}(f_\lambda^n) = \varphi$$

と定める。直ちに

$$\left\{\ \beta_\lambda(f_\lambda^n) = 2^{-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\varphi_n\right.$$

(2) $$\left\{ \beta_{-(\lambda+1)}(f_\lambda^n) = 2^{2\lambda+2}\frac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(|n|-\lambda)}\varphi_n \right.$$

がわかる。一方任意の $f \in \mathcal{A}(D,\lambda)$ は

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n f_\lambda^n$$

と展開出来る。ここで

$$F(w) = \varepsilon_0(w)\sum_{n\geq 0} b_n w^n + \varepsilon_\infty(w)\sum_{n<0} b_n w^n$$

$$G(w) = \varepsilon_0(w)\sum_{n\geq 0} b_n\frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(|n|-\lambda)} w^n$$

$$+\varepsilon_\infty(w)\sum_{n<0} b_n\frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(|n|-\lambda)} w^n$$

とおくと，$\{b_n\}$ が(1)の条件を満たしていることから F, G 共に $H(\mathbb{C}-S)$ に属することがわかる。そこで

$$\beta_\lambda(f) = 2^{-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\,[F(w)]_{w=\omega}$$

$$\beta_{-(\lambda+1)}(f) = 2^{2\lambda+2}\frac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda)}\,[G(w)]_{w=\omega}$$

とおいて $\mathcal{A}(D,\lambda)$ から $\mathcal{B}(S)$ への map. β_λ と $\beta_{-(\lambda+1)}$ を定義する。明らかに(2)の拡張になっている。

では Poisson kernel の $\omega=1$ の場合，すなわち $P(z,1)$ に対

して $\beta_\lambda(P(z,1))$ をもとめてみよう。まず $w=1$ における delta function は $\delta=\left[\frac{1}{1-w}\right]$ で与えられることに注意しておく。

$$f_\lambda^n(z)=P_\lambda(\varphi_n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_\lambda(z,e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta$$

より

$$P_\lambda(z,e^{i\theta})=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-in\theta}f_\lambda^n(z)$$

が得られる。従って $\theta=0$ として

$$P_\lambda(z,1)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f_\lambda^n(z)$$

となる。$\beta_\lambda(P_\lambda(z,1))$ の定義函数 F は

$$F(w)=2^{-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\left\{\varepsilon_0(w)\sum_{n\geq 0}w^n+\varepsilon_\infty(w)\sum_{n>0}w^{-n}\right\}$$

$$=2^{-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\left\{\varepsilon_0(w)\frac{1}{1-w}+\varepsilon_\infty(w)\frac{1}{w-1}\right\}$$

$$=2^{-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\cdot\frac{1}{1-w}$$

となる。故に $\beta_\lambda(P_\lambda(z,1))=2^{-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\delta$ が得られる。ここでは省略するが、β_λ, $\beta_{-(\lambda+1)}$ は共に $\mathcal{A}(D,\lambda)$ から $\mathcal{B}(S)$ への G-homomorphism である。すなわち

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(D,\lambda) \arrow[r, "\beta_\lambda"] \arrow[d, "\pi(g)"'] & \mathcal{B}(S) \arrow[d, "\pi_\lambda(g)"] \\
\mathcal{A}(D,\lambda) \arrow[r, "\beta_\lambda"'] & \mathcal{B}(S)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(D,\lambda) \arrow[r, "\beta_{-(\lambda+1)}"] \arrow[d, "\pi(g)"'] & \mathcal{B}(S) \arrow[d, "\pi_{-(\lambda+1)}(g)"] \\
\mathcal{A}(D,\lambda) \arrow[r, "\beta_{-(\lambda+1)}"] & \mathcal{B}(S)
\end{tikzcd}$$

は共に可換である。このことを認めれば

$$\beta_\lambda \mathcal{P}_\lambda = 2^{-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}\ \mathrm{id}.$$

（id. は恒等作用素）となることが次の様にして導びかれる。

$$\beta_\lambda \mathcal{P}_\lambda(\varphi)(\omega) = \beta_\lambda \int_{S^1} P_\lambda(z,\omega_0)\varphi(\omega_0)\,d\omega_0$$

$$= \int_{S^1} \beta_\lambda P_\lambda(z,\omega_0)\varphi(\omega_0)\,d\omega_0$$

$$= \int_{S^1} \beta_\lambda P_\lambda(\omega_0^{-1}z,1)\varphi(\omega_0)\,d\omega_0$$

$$= \int_{S} \delta(\omega_0^{-1}\omega)\varphi(\omega_0)\,d\omega_0 = \varphi(\omega)$$

さて、ここで Harish-Chandra の球函数の理論を援用すると、β_λ, $\beta_{-(\lambda+1)}$ は injective であることが容易に導びかれる。（但し $\lambda \notin \mathbb{Z}$ は仮定している。） それを示そう。$u \in \mathcal{A}(D,\lambda)$ とし $u \neq 0$, $\beta_\lambda(u) = 0$ として矛盾を出す。β_λ の G-hom. であることから $u(0) = 1$ と仮定してよい。

ここで，　$u_K(z)=\int_K u(k(z))dk$　とおく。明らかに $u_K(0)=1$ である。従って Harish-Chandra の球函数の理論より

$$u_K=\mathcal{P}_\lambda(1)$$

と表わされる。従って　$\beta_\lambda(u_K)=2^{-2\lambda}\dfrac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}$
が得られるが，一方では

$$\beta(u_K)=\int_K \pi_\lambda(k)\beta_\lambda(u)\,dk=\int_K 0\,dk=0$$

であるので矛盾。

ここで，$2^{-2\lambda}\dfrac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)^2}$ は Harish-Chandra の c-function を用いて，$c(-\sqrt{-1}(\lambda+\frac{1}{2})\alpha)$ と表わされることにも注意しておく。

さて，以上の β_λ の性質をまとめると

(3)
- (i) $\lambda\notin\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のとき $\beta_\lambda : \mathcal{A}(D,\lambda)\longrightarrow \mathcal{B}(S)$ が定義出来て，G-homomorphism
- (ii) $\beta_\lambda\circ\mathcal{P}_\lambda=c(-\sqrt{-1}(\lambda+\frac{1}{2})\alpha)\cdot id$
- (iii) β_λ は injective

(3)から，$\lambda\notin\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のとき $\mathcal{P}_\lambda$ が surjective であることが次の様に示される。$u\in\mathcal{A}(D,\lambda)$ に対し

$$\varphi=c(-\sqrt{-1}(\lambda+\tfrac{1}{2})\alpha)^{-1}\beta_\lambda(u)$$

とおく。すると $\beta_\lambda \mathcal{P}_\lambda(\varphi) = c(-\sqrt{-1}(\lambda+\frac{1}{2})\alpha)\varphi = \beta_\lambda(u)$. β_λ は injective だから $\mathcal{P}_\lambda(\varphi) = u$ となる。

最後に、$\lambda=0$ の場合の $\beta_{-1}\mathcal{P}_0$ について述べておこう。β_{-1} はもともと定義されていないが、次の様にしても $\beta_{-1}\mathcal{P}_0$ に意味がつけられる。$\beta_{-(\lambda+1)}\mathcal{P}_\lambda$ を考えてみると

$$\beta_{-(\lambda+1)}\mathcal{P}_\lambda : \varphi_n \longmapsto f_\lambda^n \longmapsto 2^{2\lambda+2}\frac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda)}\cdot\frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(|n|-\lambda)}\varphi_n$$

ここで $\lambda\to 0$ としてみると　任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$2^{2\lambda+2}\frac{\Gamma(-2\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda)}\cdot\frac{\Gamma(|n|+\lambda+1)}{\Gamma(|n|-\lambda)} \longrightarrow -2|n|$$

となる。そこで $\beta_{-1}\mathcal{P}_0(\varphi_n) = -2|n|\varphi_n$ と考えよう。
$\beta_{-(\lambda+1)}\mathcal{P}_\lambda$ は $\mathcal{B}(S)$ から $\mathcal{B}(S)$ への G-hom. であるから $\beta_{-1}\mathcal{P}_0$ も $\mathcal{B}(S)$ から $\mathcal{B}(S)$ への G-hom. すなわち intertwining operator である。さて、D に先の座標 $(e^{i\theta}, y)$ を入れて考える。すると容易に、任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$n\geq 0 \text{ のとき}\quad \left(\frac{\partial z^n}{\partial y}\right)_{y=0} = -2|n|e^{in\theta}$$

$$n<0 \text{ のとき}\quad \left(\frac{\partial \bar{z}^{|n|}}{\partial y}\right)_{y=0} = -2|n|e^{in\theta}$$

となることがわかる。前に述べたように

$$z^n = P_0(\varphi_n) \quad (n \geq 0), \qquad \bar{z}^{|n|} = P_0(\varphi_n) \quad (n<0)$$

であるから

$$z^n|_{y=0} = \varphi_n \quad (n \geq 0), \qquad \bar{z}^{|n|}|_{y=0} = \varphi_n \quad (n<0)$$

に注意すれば $\beta_{-1} P_0$ は $z^n, \bar{z}^{|n|}$ の Dirichlet data に対して Neumann data を対応させていることがわかる。

§3. 一般の対称空間における Helgason 予想の肯定的解決

§2において、任意の固有函数に対して、その境界値をとる写像が構成されたが、そこでは、固有函数の球函数展開を用いた。しかし実は一般の(higher rank の)対称空間において各不変微分作用素が Martin 境界に関して確定特異点型であることより、generic な固有値に関しては(球函数展開することなしに)固有函数の境界値をとる写像が構成され、§2の(3)の(i)〜(iii)と同様の性質を持つことが示され、従って積分表示出来ることが証明される。これらに関しては 岡本-峰村[5]、峰村[4]、SL(3, $\mathbb{R}$)に関しては 大島[6]、一般の対称空間での完全な証明は[3]、写像 β の構成については(確定特異点型微分方程式の理論についても)大島[7]、柏原-大島[2] を参照されたい。

文献

[1] Helgason, S. Group Representations and Symmetric Spaces, Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, 313-319.

[2] 柏原正樹-大島利雄, The boundary value problem for the systems of differential equations with regular singularity, to appear.

[3] 柏原正樹-木幡篤孝-峰村勝弘-岡本清郷-大島利雄-田中誠, Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, to appear.

[4] 峰村勝弘, 対称空間上の不変微分作用素の同時固有函数, 数理研講究録"超函数と線型微分方程式IV"に掲載予定.

[5] 岡本清郷-峰村勝弘, 対称空間上の境界値問題について, 数理研講究録 227 (1975), 70-74.

[6] 大島利雄, 対称空間上の境界値問題について, 数理研講究録"対称空間上の不変微分方程式"に掲載予定.

[7] ———, 確定特異点型境界値問題について, 数理研講究録"超函数と線型微分方程式IV"に掲載予定.