数理解析研究所講究録
262巻 1976年 1-15

等質空間上の確率場の表現について

島根大　文理　　麻生泰弘

確率場（Random fields）の概念が，乱流の統計的解析にとって有効なことは，A.S. Monin & A.M. Yaglom の大著，Statistical Fluid Mechanics, MIT, 1971，及び同，vol. 2，MIT, 1975 で十分に説明されている。他方，また P. Lévy は，彼の Processus Stochastiques et Mouvement Brownien，2 ed.，1965 の第8章及び Complément 第3章において，多次元パラメータをもつブラウン運動について述べている。

さて，我々は，定常過程については，そのスペクトル表現と，確率論的な性質との関わりの深い理論をもっているが，これから述べる確率場については未だ不十分であると思われる。以下，一つの試みと関連した興味ある結果について述べる。

§1. 諸定義

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，$S = G/K$ を等質空間とす

3. $\xi(s):\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ を可測関数として，$\{\xi(s);s\in S\}$ を等質空間 S 上の確率場とよぼう。

$s_1,\dots,s_k\in S$ と $E_1,\dots,E_k\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して，

$$\Phi(s_1,\dots,s_k;E_1,\dots,E_k):=P\{\xi(s_1)\in E_1,\dots,\xi(s_k)\in E_k\}$$

定義1. 確率場 $\xi=\{\xi(s);s\in S\}$ が homogeneous であるとは，任意の $s_1,\dots,s_k\in S$ と $E_1,\dots,E_k\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して

(1) $\Phi(gs_1,\dots,gs_k;E_1,\dots,E_k)=\Phi(s_1,\dots,s_k;E_1,\dots,E_k)$, for $\forall g\in G$

のときをいい，(1) が，任意の $g\in K$ について成立するとき，isotropic という。

上記の Yaglom - Monin では，$S=\mathbb{R}^d$ の場合について，関数 Φ が translation ne s - 不変のとき，homogeneous であるといい，$O(d)$ - 不変のとき，isotropic であると定義している。さらに，$L^2(\Omega)$ を P に関して 2 乗可積な関数のなすヒルベルト空間とし，その内積は，

(2) $(\xi,h)=\int\xi(\omega)\overline{h(\omega)}\,dP(\omega)$

で定義される。次の定義で，$(\xi(s),1)=0$ $(s\in S)$ とする。

定義2. $\forall s\in S$ について，$\xi(s)\in L^2(\Omega)$ とする。このとき，(3) $\Gamma(s,t):=(\xi(s),\xi(t))$, $s,t\in S$.

確率場 $\xi = \{\xi(s), s \in S\}$ が w-homogeneous (homogeneous in the wide sense) であるとは、任意の $g \in G$ と、任意の $s, t \in S$ について

(4) $\quad \Gamma(gs, gt) = \Gamma(s, t)$

が成立するときをいい、(4) が任意の $g \in K$ について成立するとき、w-isotropic (isotropic in the wide sense) という。

以下、我々は、G を局所コンパクト群、K をその閉部分群とし、確率場 ξ は、$\forall s \in S = G/K$ について $\xi(s) \in L^2(\Omega)$ で、$(\xi(s), 1) = 0$ $(\forall s \in S)$ をみたし、さらに、$s \to t$ in S のとき、$\xi(s) \to \xi(t)$ in $L^2(\Omega)$ とする。このとき、(3) で定義される核関数 Γ は、エルミート対称正値定符号核である。(注：上の、任意の $s \in S$ について、$(\xi(s), 1) = 0$ なる条件は、本質的ではない。) 従って、この核の固有関数展開を行うことにより、我々は、確率場 ξ に関するある程度の解析を行うことが出来るが、ここでは触れない。

§2. w-homogeneous な確率場の表現と w-isotropic な確率場の表現

確率場 $\xi = (\xi(s), s \in S)$ によって生成されるヒルベル

ト空間を $\mathfrak{H}$ とする。すなわち、一次結合 $\sum_{i=1}^{n} c_i f(s_i)$,
$c_1, \dots, c_n$ は複素数, $s_1, \dots, s_n$ は S の点, たちのなす線形集合を, 内積 $(f(s), f(t))$ $(s, t \in S)$ により完備化した ~~集合~~ 空間を $\mathfrak{H}$ とし, 可分であると仮定する。~~$\mathfrak{H}$~~ $f(s)$ に対する G の作用を

$$(4) \qquad T(g) f(s) = f(g^{-1} s)$$

で与える。このとき, $\{T(g), \mathfrak{H}\}$ が, 群 G の表現であることは見易い。さらに, $s_0 = eK \in S$ とするとき,

$$T(k) f(s_0) = f(s_0), \quad \forall k \in K.$$

(イ) さて, 確率場 f を w-homogeneous とするとき, 任意の $g \in G$ と $s, t \in S$ とについて,

$$(T(g) f(s), T(g) f(t)) = (f(s), f(t)).$$

故に, このとき, 表現 $\{T(g), \mathfrak{H}\}$ は, ユニタリー表現であり, しかもクラス 1 の表現である (K に関して)。逆に, 表現 $\{T(g), \mathfrak{H}\}$ が, かゝる性質をもつとき, 確率場 f は, w-homogeneous である。Gel'fand & Raikov によれば,

$$(6) \qquad T(g) = \int_X T_x(g)\, d\mu(x)$$

と, 既約成分の連続和に分解される。このとき,

$$\Gamma(t, s) = (f(t), f(s)) = (T(g_1) f(s_0), T(g_2) f(s_0))$$
$$= (T(g_2^{-1} g_1) f(s_0), f(s_0)) =$$

$$= \int_X (T_x(g_2^{-1}g_1) f_x(s_0),\ f_x(s_0))\, d\mu(x) \ ,$$

$$(\ t = g_1^{-1}s_0,\quad s = g_2^{-1}s_0\ ) \ ,$$

すなわち，形式的に，$s = gs_0$ とするとき，

(6′) $$f(s) = \int_X T_x(g^{-1}) f_x(s_0)\cdot d\mu(x)$$

(7) $$\Gamma(t, s) = \int_X (T_x(g_2^{-1}g_1) f_x(s_0),\ f_x(s_0))\, d\mu(x) \ 。$$

このとき，関数 $\Gamma(t, s)$ は，$g_2^{-1}g_1$ のみに depend するので，改めて $s = g^{-1}s_0$ とするとき，$\Gamma(s, e) = \Gamma(g)$ とおいて $\Gamma(g)$ は，G/K 上の K-左不変な関数であり，正値定符号。

Y. Asoo は，上記 X として elementary positive definite fn. の集合をとり，A. M. Yaglom は，G が separable な局所コンパクト，Type I gr. の場合について，X として G の dual をとり，(6′)，(7) の coordinate 表示を与えている。（Y. Asoo (1975)，A. M. Yaglom (1963)）。

我々の問題は，①如何なる形の連続和分解をとるか，

② 上記の表現 (6′)，(7) において $f(s)$，あるいは，$\Gamma(t, s)$ より測度 μ を定めること（形式的 inversion formula），

等が考えられるが，群 G の表現 $\{T(g), \mathfrak{X}\}$ の数々の分類や標準的な性質をしらべることが必要か。

(ロ) 確率場 f が w. isotropic のときは，もはや $\{T(g), \mathfrak{X}\}$

は、Gのユニタリー表現ではないが、Kに関しては、ユニタリーであり、さらにクラスIである。逆に、表現$\{T(g), g\in G\}$が、この性質をもつとき、確率場ξは、w-isotropic である。従って、w-isotropic な確率場については、Gを局所コンパクト群、Kをその閉部分群として、Kに関してクラスIであるGの表現を扱うこととなる。このような、w-isotropic な確率場の興味深い例を、R. Gangolli (1967) に従って、次に述べる。

§3. R. Gangolli による、P. Lévy の多次元パラメータブラウン運動の存在定理

P. Lévy は、(a) 任意の $a\in \mathbb{R}^d$ に対して、$(\xi(a),1)=0$、かつ、任意の $a, b\in \mathbb{R}^d$ に対して

(8) $(\xi(a),\xi(b)) = \frac{1}{2}(|a|+|b|-|a-b|)$ をみたす~~なる~~ガウス過程 $\{\xi(a), a\in \mathbb{R}^d\}$ (これを le mouvement brownien à plusieurs paramètres と呼ぶ)、および (b) 任意の $a\in S^d$ に対して、$(\xi(a),1)=0$、かつ任意の $a, b\in S^d$ に対して

(9) $(\xi(a),\xi(b)) = \frac{1}{2}(d(a,o)+d(b,o)-d(a,b))$ をみたすガウス過程 $\{\xi(a), a\in S^d\}$ (これを la fonction brownien sur la sphère S^d と呼ぶ)を考察している

(8)および(9)は，それぞれ，R^d ~~および~~ $= M(d)/SO(d)$ および $S^d = SO(d+1)/SO(d)$ 上の正値定符号核であり，$SO(d)$-不変である。すなわち，我々の定義2 にいう w.isotropic な実確率場の例である。ブラウン運動は，確率論的に重要な概念であるとともに，解析学的にも興味深い性質を数々もっているが，これらについては，例えば，飛田"ブラウン運動"をみてもらうことにして，ここでは，その存在に関するR. Gangolli の結果についてのみ述べる。Gを第二可算公理をみたす局所コンパクト群，Kをその閉部分群とする。また $S = G/K$ は，等質空間である。さて，確率場 $\{f(s), s \in S\}$ は実数値をとるものとするとき，これがS上のガウス場であるとは，任意の実数 $\theta_1, \dots, \theta_n$ と $s_1, \dots, s_n \in S$ に対して，

$$(10)\quad \left(\exp\{\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n}\theta_i f(s_i)\}, 1\right) = \exp\{\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n}\theta_i m(s_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j P(s_i, s_j)\}$$

をみたすS上の実関数 $m(s)$ と，正値定符号核 $P(t, s)$ $(t, s \in S)$ が存在することをいう。~~特に~~，このとき，必要ならば，$f(s) - m(s)$ $(\forall s \in S)$ を考えることにより，$m(s) \equiv 0\ (\forall s \in S)$ としてよい。以下，$m(s) = (f(s), 1) \equiv 0$ とする。~~すると~~，$(f(s), f(t)) = P(s, t)$ となる。

定義3： S上の核 $P(s, t)$ が，Lévy-Schönberg核

(以下, 略してL-S核という) であるとは, 次の諸条件をみたすときをいう;

(i) $\Gamma(s,t) = \Gamma(t,s) \quad (s,t \in S)$

(ii) $\Gamma(s,s_0) = 0 \quad (s_0 = eK)$, $\forall s \in S$

(iii) $\forall g \in G$ に対して,

$$\Gamma(gs,gs) + \Gamma(gt,gt) - 2\Gamma(gs,gt) = \Gamma(s,s) + \Gamma(t,t) - 2\Gamma(s,t), \quad s,t \in S$$

(iv) $\Gamma(s,t)$: positive definite.

定義4 : $\Gamma(s,t)$を, S上のL-S核とするとき, S上のガウス場$\{f(s), s \in S\}$が, S上のブラウン運動であるとは, 任意の$s,t \in S$に対して,

$$(f(s), f(t)) = \Gamma(s,t) \qquad (11)$$

がみたされるときをいう.

いま, $K(s,t) = \Gamma(s,s) + \Gamma(t,t) - 2\Gamma(s,t)$ とおくと, Γ がL-S核のとき, $K(s,s_0) = \Gamma(s,s)$, $K(t,s_0) = \Gamma(t,t)$ より,

$$2\Gamma(s,t) = K(s,s_0) + K(t,s_0) - K(s,t).$$

このとき, 任意の$k \in K$に対して,

$$2(f(ks), f(kt)) = 2\Gamma(ks,kt) = 2\Gamma(s,t) = 2(f(s),f(t))$$

従って，S上のブラウン運動は，w-isotropicな（実）確率場である。（注：実は，isotropicな確率場である）

問題：等質空間 $S=G/K$ 上の L-S 核を決定せよ。

Gangolliは，(イ) G：連結局所コンパクト・アーベル群，K：Gの任意の閉部分群，(ロ) $G=M(d)$，$K=SO(d)$ (ハ) G：連結コンパクト・半単純リー群，K：$S=G/K$ がコンパクトな対称空間となるGの任意の閉部分群，(ニ) G：中心がfiniteであるnoncompact，連結半単純リー群，K：Gの極大コンパクト部分群の場合について，この問題を解いた。

Lemma；等質空間 $S=G/K$ 上の，$\Gamma(s_0, s_0)=0$ $(s_0=eK)$ なる対称核が L-S 核であるための必要十分条件は，

(a) 任意の $g\in G$ に対して，$K(gs,gt)=K(s,t)$，

(b) 任意の $\varepsilon\geqq 0$ に対して，

$$\Theta_\varepsilon(s,t):=\exp\{-\varepsilon K(s,t)\} \quad \text{positive def.}$$

をみたすことである。

このとき，任意の $k_1, k_2\in K$ に対して，

$$\begin{aligned}\Theta_\varepsilon(k_1 g k_2 s_0, s_0) &= \exp\{-\varepsilon K(k_1 g k_2 s_0, s_0)\}\\ &= \exp\{-\varepsilon K(gs_0,s_0)\}=\Theta_\varepsilon(gs_0,s_0)\end{aligned}$$

$$\Theta_\varepsilon(e\cdot s_0, s_0)=1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\Theta_\varepsilon(g\cdot s_0,s_0)=1 \quad (g\in G)$$

すなわち，$\theta_\varepsilon(gs_0, s_0)$ は，normalized zonal spherical fn. である。また，群 G 上の関数族 $h_\varepsilon(g)$ $(\varepsilon \geq 0)$ が embeddable であるとは，$\forall \varepsilon$ に対して h_ε が pos. def. であり，$\lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon = 1$ をみたすときをいう。さらに，G 上の関数 h が無限分解可能であるとは，h が pos. def. であり，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$h(g) = h_n(g)^n$ なる pos. def. な関数 h_n が存在するときをいう。

以下，$\mathcal{R} = \mathcal{R}(G)$ を，G 上の複素数値，連続，normalized zonal spherical，無限分解可能な関数の class とする。

(イ) G：連続局所コンパクト・アーベル群

K：G の任意の閉部分群 の場合

定理：G 上の関数 θ に対して，$\theta^*(gK) = \theta(g)$ により，S 上の関数 $\theta^*(s)$ $(s = gK)$ を定義するとき，$\theta \in \mathcal{R}$ で実数値をとるための条件は，θ^* が

(12) $$\theta^*(s) = \exp\{-[\varphi(s) + \int_{\hat{S}\setminus\{e\}} (1 - \chi(s))\, d\mu(\chi)]\},$$

と表現されることである。ここに，φ は，

(13) $$\frac{1}{2}(\varphi(s+t) - \varphi(s-t)) = \varphi(s) + \varphi(t)$$

の連続な，nonnegative sol. であり，μ は，dual $\hat{S}$ 上の対称な pos. meas. であり，$e \in \hat{S}$ の任意の近傍 ~~U/ finite nbhs~~ の補集合に finite mass をもち，

(14) $\int_{\hat{S}\setminus\{e\}} (1-\mathrm{Re}\,\chi(s))\,d\mu < +\infty, \quad \forall s\in S$

をみたす。さらに，φ，μ は，θ* により unique に決定される。

このとき，

$$K(s,s_0) := \varphi(s) + \int_{\hat{S}\setminus\{e\}} (1-\chi(s))\,d\mu(\chi), \quad \forall s\in S.$$

とならば，

$$2\Gamma(s,t) = K(s,s_0) + K(t,s_0) - K(s-t,s_0)$$

はL-S核である。

(ロ) $G = M(d)$，$K = SO(d)$ の場合 $(d\geq 2)$

~~$S=G/K$ の関数 θ に対して $\theta^*(g) := \theta(gK)$, $g\in G$~~

G上の関数 θ が，$\mathfrak{L}$ に属するとき，対応する $S=G/K$ 上の関数 θ* は，$\mathbb{R}^d$ 上の radial fn. であるが，

定理：G上の関数 θ が，$\mathfrak{L}$ に属するための条件は，

(15) $\theta^*(s) = \exp\left\{-\left[c|s|^2 + \int_{0+}^{\infty} (1-Y_d(\lambda|s|))\,d\mu(\lambda)\right]\right\}$ $\quad (c\geq 0)$

と表現されることである。ここに，

$$Y_d(t) = \frac{1}{B(\frac{1}{2},\frac{d-1}{2})}\int_0^{\pi} e^{\sqrt{-1}\,t\cos\theta}\sin^{d-2}\theta\,d\theta \quad (t\geq 0)$$

であり，μ は，$[0,\infty)$ 上の pos. measure で，

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} d\mu(\lambda) < +\infty$$

をみたす。さらに，c と ν とは，Θ^* により unique に決定される。

このとき，

$$K(s, s_0) = c|s|^2 + \int_{0+}^{\infty} (1 - Y_\alpha(\lambda|s|))\, d\mu(\lambda)$$

とおくと，

$$2P(s,t) = K(s, s_0) + K(t, s_0) - K(s-t, s_0)$$

は，L-S 核である。

特に興味あるのは，$c=0$ の場合に，$d\mu_\alpha(\lambda) = \frac{d\lambda}{\lambda^{\alpha+1}}$ $(0<\alpha<2)$ ととると，$K_\alpha(s, s_0) = |s|^\alpha$ となる。

(ハ) $S = G/K$：コンパクトな対称空間 の場合

定理： G 上の関数 Θ が，$\mathcal{L}$ に属するための必要十分条件は，

(16) $$\Theta(g) = \exp\{-\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-\varphi_n(g))\}$$

と表現されることである。ここに，$\{\varphi_n(g)\}_{n=0}^{\infty}$ は，normalized, pos. def. zonal spherical fn.，すなわち，$\varphi_n(g) = \int_K \chi_n(g^{-1}k)\,dk$，$a_n \geq 0$ は，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ をみたし，Θ により unique に決定される

． involution ι を $\iota(\varphi_n) = \overline{\varphi}_n$ で定義するとき，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を，$a_n \geq 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ かつ $\iota(a_n) = a_n$ $(\forall n \geq 0)$ をみたすようにとり，$K(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-\varphi_n($

$g_2^{-1}g_1))$ $(s=g_1K,\ t=g_2K)$ ととると，

$$2P(s,t)=K(s,s_0)+K(t,s_0)-K(s,t)$$

は，L-S 核である。

(二) $S=G/K$; noncompact な対称空間の場合

$\mathfrak{M}$ を，elementary pos. def. zonal spherical fn. の集合とする。

定理： G上の関数 θ が，$\mathcal{L}$ に属するための条件は，

$$(17)\quad \theta^*(s)=\exp\{-[\gamma(s)+\int_{\mathfrak{M}\setminus\{1\}}(1-\phi(x))\,d\mu(\phi)]\}$$

と表現されることである。ここに，

(a) μ は，$\mathfrak{M}\setminus\{1\}$ 上の pos. meas. で，

$$\mu(A)=\mu(\iota(A))$$ をみたし，

(b) $e\in G$ の任意のコンパクトな近傍に対して，

$$I_U(\phi)=\int_U(1-\mathcal{R}e\,\phi(x))\,dx$$

とするとき，$\int_{\mathfrak{M}\setminus\{1\}}I_U(\phi)\,d\mu(\phi)<+\infty$，

(c) $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ を，$U_n\downarrow\{1\}$ なる，$1\in\mathfrak{M}$ のコンパクトな近傍列とするとき，Support$(\mu_n)=U_n$ なる finite meas. の seq. $\{\mu_n\}$ が存在して，

$$\gamma(s)=\lim_n\int_{U_n}(1-\mathcal{R}e\,\phi(s))\,d\mu_n。$$

γ，μ は，θ^* により unique に決定される。関数 γ を，θ^* により決定されるガウス関数，μ を θ^* により決定される Lévy 測度という。

関数γの形をはっきりさせるには、$1 \in \mathfrak{M}$の近くの$\mathfrak{M}$の細い構造をしることが必要であり、補系列の表現が関連することが指摘されている。

例：$G = SL(2;\mathbb{R})$, $K = SO(2)$のとき

$$\gamma(x) = c \log(\cosh \rho(x,o)/2) \quad (c \geq 0).$$

いま、$\psi(x) = \gamma(x) + \int_{\mathfrak{M}\setminus\{1\}} (1-\phi(x))\, d\mu(\phi)$

とおき、$K(g_1K, g_2K) = \psi(g_2^{-1}g_1)$とすると、

$$2P(s,t) = K(s,s_0) + K(t,s_0) - K(s,t)$$

は、L-S核である。

例：$G = SL(2;\mathbb{R})$, $K = SO(2)$のとき

$$2P(s,t) = (\log \cosh \rho(s,s_0)/2)^{1/2} + (\log \cosh \rho(t,s_0)/2)^{1/2} - (\log \cosh \rho(s,t)/2)^{1/2}$$

は、L-S核である。

文献

(1) Y. Asoo (1975): On Random Fields on Homogeneous Space, Mem. Fac. Lit & Sci., Shimane Univ., Nat. Sci. 8, pp. 25-29.

(2) R. Gangolli (1967): Abstract Harmonic Analysis

and Lévy's Brownian Motion of Several Parameters, 5 th Berkeley Symp. Prob. Stat., Vol. 2 - Part 1, pp. 13 - 30.

(3) A. M. Yaglom (1963): Second-Order Homogeneous Random Fields, 4 th Berkeley Symp. Prob. Stat., Vol. 2, pp. 593-622.