

Subdifferential の発展方程式について

東大 理学部 山田義雄

§1. 序

本講演では、実 Hilbert 空間  $H$  において、次の型の非線型発展方程式を考える。

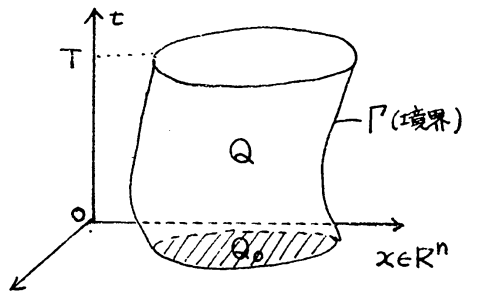
$$(E) \quad \frac{d}{dt} u(t) + \partial \varphi^t(u(t)) \ni f(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

ここで、各  $t \in [0, T]$  に対して、 $\varphi^t: H \rightarrow (-\infty, +\infty]$  ( $\varphi^t \neq +\infty$ ) は下半連続な凸関数で、 $\partial \varphi^t$  はその subdifferential とする。

この型の方程式は、最初、Brezis [4] によって、 $\varphi^t = \varphi$  が  $t$  に無関係な場合を取り扱われ、(E) の解の滑らかさを含めて様々の結果が得られた。その後、 $\varphi^t$  が  $t$  に依存する場合には、特に、 $D(\varphi^t) = \{u \in H; \varphi^t(u) < +\infty\}$  が  $t$  に無関係であることを仮定して、Watanabe [13], Attouch-Damlamian [2], Maruo [10] らによって Brezis の結果が拡張された。さらに、 $D(\varphi^t)$  が  $t$  に依存する場合も、方程式 (E) は多くの人々によって取り扱われ、種々の結果が得られている。(Attouch-Benilan-Damlamian-Picard [1],

Birolini [3], Brezis [5], Kenmochi [8], Kenmochi-Nagai [9], Moreau [11], Peralba [12] 等)

我々が、方程式(E)において問題とするのは、一般に、 $D(\varphi^t)$  が  $t$  に依存する場合であり、特に、境界が時間的に変化する、次のような非線型問題



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f & \text{on } Q \\ u = 0 & \text{on } \Gamma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{on } Q_0 \end{cases}$$

にも応用できるようにすることを目的とする。

さて、ここで、 $H$  上の下半連続な凸関数の族  $\{\varphi^t\}_{0 \leq t \leq T}$  に関する仮定を述べよう。

仮定 A.  $r > 0, t_0 \in [0, T]$  とする。このとき、各  $x_0 \in D(\varphi^{t_0})$ ,  $\|x_0\| \leq r$ , に対して、次を満たす  $x: [0, T] \rightarrow H$  が存在する。

$$(i) \quad \|x(t) - x_0\| \leq |g_r(t) - g_r(t_0)| (\varphi^{t_0}(x_0) + K_r)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$(ii) \quad \varphi^t(x(t)) \leq \varphi^{t_0}(x_0) + |h_r(t) - h_r(t_0)| (\varphi^{t_0}(x_0) + K_r), \quad 0 \leq t \leq T.$$

但し、 $K_r$  は正定数、 $g_r, h_r$  は  $[0, T]$  上の絶対連続関数で、 $g_r \in L^2(0, T)$  を満たす。

定義.  $u: [0, T] \rightarrow H$  が、(E) の強い解であるとは、

(i)  $u \in C([0, T]; H)$ . (ii)  $(0, T)$  の任意の compact 集合上、 $u$  は強

絶対連続. (iii) a.e.  $t \in (0, T)$  で,  $u(t) \in D(\partial\varphi^t)$ , かつ,

$$\frac{d}{dt}u(t) + \partial\varphi^t(u(t)) \ni f(t).$$

を満たすことをいう.

以上の仮定, 定義の下で, 次の定理が成立する.

定理.  $a \in \overline{D(\varphi^0)}$ ,  $f \in L^2(0, T; H)$  とする. このとき, (E)の強い解  $u$  で,  $u(0) = a$  となるものが一意に存在し, しかも, 次の性質をもつ.

(i) すべての  $t \in (0, T]$  について,  $u(t) \in D(\varphi^t)$  であり,  $\varphi^t(u(t)) \in L^1(0, T)$ , かつ,  $t\varphi^t(u(t)) \in L^\infty(0, T)$  である. さらに, 任意の  $\delta > 0$  に対して,  $\varphi^t(u(t))$  は,  $[\delta, T]$ 上絶対連続である.

(ii)  $t^{\frac{1}{2}} du/dt \in L^2(0, T; H)$ .

特に,  $a \in D(\varphi^0)$  ならば,  $u$  は (i), (ii)の代わりに, 次を満たす.

(i') すべての  $t \in [0, T]$  について,  $u(t) \in D(\varphi^t)$  であり,  $\varphi^t(u(t))$  は,  $[0, T]$ 上, 絶対連続である.

(ii')  $u$  は  $[0, T]$ 上, 強絶対連続, かつ,  $du/dt \in L^2(0, T; H)$ .

注意 1. 仮定 A は,  $D(\varphi^t) = D$  が  $t$  に依存しない場合の, [2], [13] の仮定の一般化になっている.

注意 2. Kenmochi [8] は, 仮定 A を少し弱めて, 方程式 (E) を変分不等式の形で取り扱い, 'semi-discretisation 法' によって,

上記定理より、いくつかの弱い結果を導いた。

## §2. 準備

この節では、凸関数に関する即知の結果をいくつか述べるが、詳しい証明は、[6], [13]等を参照していただきたい。

$\varphi: H \rightarrow (-\infty, +\infty]$  ( $\varphi \not\equiv +\infty$ ) を下半連続な凸関数であるとし、

$$D(\varphi) = \{u \in H; \varphi(u) < +\infty\}$$

とおく。各  $u \in D(\varphi)$  に対して、集合

$$\partial\varphi(u) = \{w \in H; \varphi(v) - \varphi(u) \geq (w, v - u), \forall v \in D(\varphi)\}$$

を、 $\varphi$  の  $u$  における subdifferential と言い、 $\partial\varphi$  の定義域  $D(\partial\varphi)$  を、 $D(\partial\varphi) = \{u \in D(\varphi); \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$  で定義する。このとき、 $\partial\varphi$  は  $H$  における極大単調作用素であり、 $\overline{D(\varphi)} = \overline{D(\partial\varphi)}$  となることはよく知られている。よって、 $\lambda > 0, u \in H$  に対して、 $J_\lambda u \equiv (I + \lambda \partial\varphi)^{-1}u$  は意味を持つ。

一、 $\lambda > 0, u \in H$  に対して、

$$(2.1) \quad \varphi_\lambda(u) = \inf_{v \in H} \left\{ \varphi(v) + \frac{1}{2\lambda} \|u - v\|^2 \right\}$$

によって  $\varphi_\lambda$  を定義すれば、(2.1) の  $\inf$  は  $J_\lambda u$  で達成されることが知られている。従って、(2.1) より、

$$(2.2) \quad \varphi(u) \geq \varphi_\lambda(u) = \varphi(J_\lambda u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - J_\lambda u\|^2 \geq \varphi(J_\lambda u)$$

$$(2.3) \quad \varphi(v) - \varphi(J_\lambda u) \geq \alpha^{-1}(u - J_\lambda u, v - J_\lambda u), \quad \forall v \in D(\varphi)$$

が成立する. さらに,  $\varphi_\lambda$  は Fréchet 微分可能な凸関数で, その Fréchet 微分  $\partial\varphi_\lambda$  は  $\partial\varphi$  の Yosida 近似 ( $\partial\varphi_\lambda = \alpha^{-1}(I - J_\lambda)$ ) に一致することが知られている. より詳しく述べれば,

$$(2.4) \quad 0 \leq \varphi_\lambda(v) - \varphi_\lambda(u) - \frac{1}{\alpha}(u - J_\lambda u, v - u) \leq \frac{1}{\alpha} \|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in H$$

が成立する. よって, 今後,  $(\partial\varphi)_\lambda$  の代わりに,  $\partial\varphi_\lambda$  で表わすことにする. 最後に, (2.2) より, 任意の  $u \in H$  について,

$$(2.5) \quad \lim_{\lambda \downarrow 0} \varphi_\lambda(u) = \varphi(u)$$

が成立することを注意しておく.

### §3. 補題.

定理の証明に入る前に, 必要な補題をいくつか述べる.

補題 3.1. 仮定 A の下で, ある正定数  $C_1, C_2$  が存在して,

$$(3.1) \quad \varphi^t(x) + C_1 \|x\| + C_2 \geq 0$$

が  $\forall t \in [0, T], \forall x \in H$  に対して成立する.

[証明] 最初に,  $v_0 \in D(\varphi^0)$  を固定すれば, 仮定 A より,  $[0, T]$  上の  $H$ -値関数  $v$  で,  $v(0) = v_0$ , かつ,  $\forall t \in [0, T]$  において

$$(3.2) \quad \|v(t)\| \leq r_0 - 1, \quad \varphi^t(v(t)) \leq M_0$$

となるものが存在することに注意する. 但し,  $r_0, M_0$  は正定数. 一斉, 仮定 A において,  $g_{r_0}, h_{r_0}$  が共に定数関数になるこ

とは反りとしてかまわないから、仮定 A より、 $x \in H, \|x\| \leq r_0$  のとき、

$$\varphi^t(x) + Kr_0 \geq 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

となることがわかる。他方、 $\|x\| \geq r_0$  のとき、 $\alpha(t) = \|x - v(t)\|^{-1}$ ,  
 $u(t) = \alpha(t)x + (1 - \alpha(t))v(t)$  とおけば、 $0 < \alpha(t) \leq 1$ ,  $\|u(t)\| \leq r_0$  であるから、

$$\alpha(t)\varphi^t(x) + (1 - \alpha(t))\varphi^t(v(t)) \geq \varphi^t(u(t)) \geq -Kr_0, \quad \forall t \in [0, T]$$

を得る。この不等式と (3.2) より (3.1) を得る。 (証明終)

補題 3.2. (cf. Kenmochi [8, lemma 3.3 及びその系]) 仮定 A の下で、  
 正定数  $\delta, r_0, M$  を適当に選べば、各  $t \in [0, T]$  に対して、 $[t, \min\{t + \delta, T\}]$   
 上の強絶対連続関数  $v_t$  を

$$\|v_t(s)\| \leq r_0, \quad \varphi^s(v_t(s)) \leq M, \quad \forall s \in [t, \min\{t + \delta, T\}]$$

を満たすように構成することができるとする。

[証明] [8]における方法を利用する。 $v_0 \in D(\varphi^0)$  を固定し、仮定  
 A を用いて、(3.2) を満たす  $v: [0, T] \rightarrow H$  をとる。次に、

$$(3.3) \quad M = \exp\left(\int_0^T |h'_{r_0}(t)| dt\right) (M_0 + Kr_0 \int_0^T |h'_{r_0}(t)| dt)$$

とおき、 $\delta$  を次で定義する。

$$(3.4) \quad \delta = \left(\int_0^T |g'_{r_0}(t)|^2 dt\right)^{-1} (M + Kr_0)^{-1}.$$

強絶対連続関数を構成するため、任意の  $t_0 \in [0, T]$  をとり固  
 定する。(便宜上、 $t_0 \leq T - \delta$  とする。) 次に、 $\varepsilon_n = \frac{\delta}{n}$  とおき、点列  
 $\{u_n^k\}_{k=0}^n$  ( $\|u_n^k\| \leq r_0$ ,  $u_n^k \in D(\varphi^{t_0 + k\varepsilon_n})$ ,  $k=0, 1, \dots, n$ ) を、 $u_n^0 = v(t_0)$  から始め  
 て、 $u_n^{k-1}$  に対して仮定 A を用い、順次、 $u_n^k$  を、

$$(3.5) \quad \|u_n^k - u_n^{k-1}\| \leq |g_{r_0}(t_0 + k\varepsilon_n) - g_{r_0}(t_0 + (k-1)\varepsilon_n)| (\varphi^{t_0 + (k-1)\varepsilon_n}(u_n^{k-1}) + K_{r_0})^{\frac{1}{2}},$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \varphi^{t_0 + k\varepsilon_n}(u_n^k) &\leq \varphi^{t_0 + (k-1)\varepsilon_n}(u_n^{k-1}) + |h_{r_0}(t_0 + k\varepsilon_n) - h_{r_0}(t_0 + (k-1)\varepsilon_n)| \\ &\times (\varphi^{t_0 + (k-1)\varepsilon_n}(u_n^{k-1}) + K_{r_0}), \end{aligned}$$

を挿入するように選ぶ。実際、上のように  $\{u_n^k\}$  を構成できるこ

とは、(3.3), (3.4) に注意すればわかる。又、

$$(3.7) \quad \|u_n^k - v(t_0)\| \leq 1, \quad \varphi^{t_0 + k\varepsilon_n}(u_n^k) \leq M, \quad k=0, 1, \dots, n,$$

が成立することも同時に導かれる。

次に、 $[t_0, t_0 + \delta]$  上の強絶対連続関数  $u_n$  を

$$(3.8) \quad u_n(t) = \frac{t_0 + i\varepsilon_n - t}{\varepsilon_n} u_n^{i-1} + \frac{t - (t_0 + (i-1)\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} u_n^i, \quad \text{if } t \in [t_0 + (i-1)\varepsilon_n, t_0 + i\varepsilon_n]$$

によって定義すれば、(3.2), (3.5), (3.7), (3.8) より、 $u_n$  は

$$(3.9) \quad \|u_n(t)\| \leq r_0, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \delta,$$

$$(3.10) \quad \|u_n(t) - u_n(s)\| \leq (M + K_{r_0})^{\frac{1}{2}} \int_{s-\varepsilon_n}^{t+\varepsilon_n} |g_{r_0}'(\tau)| d\tau, \quad t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \delta,$$

$$(3.11) \quad \int_{t_0}^{t_0 + \delta} \|u_n'(t)\|^2 dt \leq (M + K_{r_0}) \int_{t_0}^{t_0 + \delta} |g_{r_0}'(t)|^2 dt,$$

を挿入す。(3.9), (3.11) より  $\{u_n\}, \{u_n'\}$  は共に  $L^2(t_0, t_0 + \delta; H)$  の有界集合であるから、 $\{u_n\}$  の適当な部分列  $\{u_{n'}\}$  をとれば、 $u_{n'}, u_{n'}$  はある  $u, u'$  に共に  $L^2(t_0, t_0 + \delta; H)$  で弱収束し、さらに、各点  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$  で、 $u_{n'}(t)$  は  $u(t)$  に弱収束するようにできる。簡単のため、この部分列  $\{u_{n'}\}$  も  $\{u_n\}$  で表わす。ここで、各  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$  を

固定して,  $t_n = t_0 + \left[ \frac{t-t_0}{\varepsilon_n} \right] \varepsilon_n$  ( $[\cdot]$  は Gauss 記号) とおく. (3.7) より,

$\varphi^{t_n}(u_n(t_n)) \leq M$  であるから, 仮定 A より,  $\hat{u}_n \in D(\varphi^t)$  を,

$$\|\hat{u}_n - u_n(t_n)\| \leq |g_{r_0}(t) - g_{r_0}(t_n)| (M + K_{r_0})^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi^t(\hat{u}_n) \leq \varphi^{t_n}(u_n(t_n)) + |h_{r_0}(t) - h_{r_0}(t_n)| (M + K_{r_0}),$$

を満たすようにとれる. 一方,  $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{u}_n = u(t)$  より,

$$\varphi^t(u(t)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi^t(\hat{u}_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(u_n(t_n)) \leq M, \quad t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

最後に,  $u$  の強絶対連続性を示す. そのために, Mazur の定理を適用すれば,  $\{u_n\}$  の適当な凸線型結合

$$v_n = \sum_{i=0}^{j_n} \alpha_n^i u_{n+i}, \quad \alpha_n^i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{j_n} \alpha_n^i = 1,$$

をとることによって,  $n \rightarrow \infty$  のとき,  $v_n$  は  $u$  に,  $v_n'$  は  $u'$  に, それぞれ  $C([t_0, t_0 + \delta]; H)$ ,  $L^2(t_0, t_0 + \delta; H)$  で強収束するようにできるとに注意する. 一方, (3.10) より,  $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + \delta$  において

$$\|v_n(t) - v_n(s)\| \leq (M + K_{r_0})^{\frac{1}{2}} \int_{s-\varepsilon_n}^{t+\varepsilon_n} |g_{r_0}'(\tau)| d\tau$$

が成立するから,  $n \rightarrow \infty$  として,  $u$  の強絶対連続性がわかる.

$t_0 \in [0, T]$  は任意であったから, (3.2), (3.3), (3.4) で  $r_0, M, \delta$  を決めれば, 補題の主張の正しいことがわかる. (証明終)

ここで,  $\lambda > 0, x \in H$  に対して,  $J_\lambda^t x = (I + \lambda \partial \varphi^t)^{-1} x$ ,  $\varphi_\lambda^t(x) = \varphi^t(J_\lambda^t x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - J_\lambda^t x\|^2$  とおけば, 次の補題を得る.

補題 3.3.  $\lambda > 0, x \in H$  とする. このとき, 仮定 A の下で,

(i)  $J_\lambda^t x$  は  $0 \leq t \leq T$  について強連続, かつ, ある正定数  $C_3$  が



存在して

$$(3.12) \quad \|J_\lambda^t x\| \leq 2\|x\| + C_3$$

が,  $\forall x \in H, 0 < \lambda \leq 1, 0 \leq t \leq T$  に対して成立する.

(ii)  $\varphi_\lambda^t(x)$  は  $0 \leq t \leq T$  について絶対連続, かつ,  $0 \leq s \leq t \leq T$  において

$$(3.13) \quad |\varphi_\lambda^t(x) - \varphi_\lambda^s(x)| \leq |h_r(t) - h_r(s)| [\max\{\varphi_\lambda^t(x), \varphi_\lambda^s(x)\} + K_r] \\ + |g_r(t) - g_r(s)| [\max\{\|\partial\varphi_\lambda^t(x)\|, \|\partial\varphi_\lambda^s(x)\|\}] [\max\{\varphi_\lambda^t(x), \varphi_\lambda^s(x)\} + K_r]^{\frac{1}{2}}$$

が成立する. 但し,  $r = \sup\{\|J_\lambda^t x\|; 0 < \lambda \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ .

[証明]  $0 < \lambda \leq 1, x \in H$  を固定する.  $\varphi_\lambda^t$  の定義 (2.1) と (2.3) より,

$$(3.14) \quad \varphi^t(v) + \frac{1}{2\lambda} \|x - v\|^2 \geq \varphi_\lambda^t(x), \quad \forall v \in H,$$

$$(3.15) \quad \varphi^t(v) - \varphi^t(J_\lambda^t x) \geq \lambda^{-1} (x - J_\lambda^t x, v - J_\lambda^t x), \quad \forall v \in H,$$

が成立することに注意する.

まず,  $v_0 \in D(\varphi^0)$  を固定し, (3.2) を満たす関数  $v$  を選ぶ. (3.14)

において,  $v = v(t)$  とおけば,

$$(3.16) \quad \varphi_\lambda^t(x) \leq M_0 + \frac{1}{2\lambda} (\|x\| + r_0)^2, \quad \forall t \in [0, T]$$

を得る. 他方, (3.15) で  $v = v(t)$  とおけば, 次を得る.

$$M_0 - \varphi^t(J_\lambda^t x) \geq \lambda^{-1} \{ \|J_\lambda^t x\|^2 - \|J_\lambda^t x\| (\|x\| + r_0) - r_0 \|x\| \}.$$

従って, (3.1) を利用すれば, (3.12) を得る.  $\forall z \in Z, r = \sup\{\|J_\lambda^t x\|;$

$0 < \lambda \leq 1, 0 \leq t \leq T\} (< \infty)$  とおけば,  $s \in [0, T]$  に対して  $J_\lambda^s x \in D(\varphi^s)$  である

から, 仮定 A より, 次を満たす  $\hat{v}_s: [0, T] \rightarrow H$  が存在する.

$$\|\hat{v}_s(t) - J_\lambda^s x\| \leq |g_r(t) - g_r(s)| (\varphi^s(J_\lambda^s x) + K_r)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$\varphi^t(\widehat{v}_s(t)) \leq \varphi^s(J_\lambda^s x) + |h_r(t) - h_r(s)|(\varphi^s(J_\lambda^s x) + K_r), \quad 0 \leq t \leq T.$$

従って、再び (3.15) において、 $v = \widehat{v}_s(t)$  とおけば、

$$(3.17) \quad \begin{aligned} & |h_r(t) - h_r(s)|(\varphi_\lambda^s(x) + K_r) + \varphi^s(J_\lambda^s x) - \varphi^t(J_\lambda^t x) \\ & \geq \lambda^{-1}(x - J_\lambda^t x, J_\lambda^s x - J_\lambda^t x) - |g_r(t) - g_r(s)| \|\partial \varphi_\lambda^t(x)\| (\varphi_\lambda^s(x) + K_r)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

を得る。同様にして、 $s$  と  $t$  を入れ換えた不等式も成立するから、これらを加えることにより、

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \|J_\lambda^t x - J_\lambda^s x\|^2 & \leq |h_r(t) - h_r(s)|(\varphi_\lambda^t(x) + \varphi_\lambda^s(x) + 2K_r) \\ & \quad + |g_r(t) - g_r(s)| \left\{ \|\partial \varphi_\lambda^t(x)\| (\varphi_\lambda^t(x) + K_r)^{\frac{1}{2}} + \|\partial \varphi_\lambda^s(x)\| (\varphi_\lambda^s(x) + K_r)^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

を得、(3.16) に注意すれば、 $J_\lambda^t x$  は  $t$  について強連続であることがわかる。さらに、

$$\lambda^{-1}(x - J_\lambda^t x, J_\lambda^s x - J_\lambda^t x) \geq (2\lambda)^{-1} (\|x - J_\lambda^t x\|^2 - \|x - J_\lambda^s x\|^2)$$

に注意すれば、(2.2) と (3.17) より、

$$\begin{aligned} & |h_r(t) - h_r(s)|(\varphi_\lambda^s(x) + K_r) + |g_r(t) - g_r(s)| \|\partial \varphi_\lambda^t(x)\| (\varphi_\lambda^s(x) + K_r)^{\frac{1}{2}} \\ & \geq \varphi_\lambda^t(x) - \varphi_\lambda^s(x) \end{aligned}$$

を得る。又、上の不等式は、 $s$  と  $t$  を入れ換えても成立するから (3.13) が得られ、同時に、 $\varphi_\lambda^t(x)$  の  $t$  に関する絶対連続性も導かれる。(証明終)

系.  $u: [0, T] \rightarrow H$  を強絶対連続な関数とする。このとき、仮定 A の下で、各  $0 < \lambda \leq 1$  に対して、 $\varphi_\lambda^t(u(t))$  は  $[0, T]$  上絶対連続かつ、a.e.  $t \in [0, T]$  で

$$(3.18) \quad \left| \frac{d}{dt} \varphi_\lambda^t(u(t)) - (\partial \varphi_\lambda^t(u(t)), \frac{d}{dt} u(t)) \right| \\ \leq |h_r'(t)| (\varphi_\lambda^t(u(t)) + K_r) + |g_r'(t)| \|\partial \varphi_\lambda^t(u(t))\| (\varphi_\lambda^t(u(t)) + K_r)^{\frac{1}{2}}$$

が成立する。但し,  $r = \sup \{ \|J_\lambda^t u(s)\|; 0 < \lambda \leq 1, 0 \leq s, t \leq T \}$ .

[証明] (3.12) より  $r < \infty$  であることに注意して, (2.4), (3.13) を利用すれば, 系の主張を得る. (証明終)

注意 仮定 A の下で, 補題 3.3 が成立するから, 我々の仮定は, ある意味では, Attouch-Benilan-Damlamian-Picard [1] の結果に対する一つの十分条件を与える, と考えることができる.

#### §4. 定理の証明.

$\{\varphi^t\}_{0 \leq t \leq T}$  は仮定 A を満たし,  $f \in L^2(0, T; H)$ ,  $a \in \overline{D(\varphi^0)}$  とする. さらに,  $\varphi^0(a) \geq 0$  としても一般性を失わない.

(E) の強い解を構成するため,  $\partial \varphi^t$  の Yosida 近似  $\partial \varphi_\lambda^t = \lambda^{-1}(1 - J_\lambda^t)$  ( $\lambda > 0$ ) を利用して, 次の近似方程式を考える.

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} u_\lambda(t) + \partial \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) = f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u_\lambda(0) = a. \end{cases}$$

補題 3.3 に注意すれば, (4.1) の強い解  $u_\lambda$  が一意に存在して,  $u_\lambda$  は  $[0, T]$  上強絶対連続であることがわかる. さらに,  $u_\lambda$  に関して次の評価が成立する.

補題 4.1.  $0 < \lambda \leq 1$  に対する (4.1) の強 1) 解を  $u_\lambda$  とすると,

$$(i) \quad \sup \{ \|u_\lambda(t)\| ; 0 < \lambda \leq 1, 0 \leq t \leq T \} \leq M_1(\|a\|).$$

$$(ii) \quad \sup \left\{ \int_0^t \varphi_\lambda^S(u_\lambda(s)) ds ; 0 < \lambda \leq 1, 0 \leq t \leq T \right\} \leq M_2(\|a\|).$$

$$(iii) \quad \sup \{ t \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) ; 0 < \lambda \leq 1, 0 \leq t \leq T \} \leq M_3(\|a\|).$$

$$(iv) \quad \sup \left\{ \int_0^T s \left\| \frac{d}{ds} u_\lambda(s) \right\|^2 ds ; 0 < \lambda \leq 1 \right\} \leq M_5(\|a\|).$$

特に,  $a \in D(\varphi^0)$  ならば,

$$(v) \quad \sup \{ \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) ; 0 < \lambda \leq 1, 0 \leq t \leq T \} \leq M_5(\varphi^0(a)).$$

$$(vi) \quad \sup \left\{ \int_0^T \left\| \frac{d}{ds} u_\lambda(s) \right\|^2 ds ; 0 < \lambda \leq 1 \right\} \leq M_6(\varphi^0(a)).$$

但し,  $M_i(\alpha) (i=1, \dots, 6)$  は  $\alpha$  に連続的に依存する正定数である.

[証明] 補題 3.2 の正数  $\delta$  に対して,  $m < T/\delta \leq m+1$  を満たす整数  $m$  をとり,  $t_i = i\delta (i=0, 1, \dots, m)$ ,  $t_{m+1} = T$  とおく. このとき, 補題 3.2 より,  $0 \leq i \leq m$  に対して, 正数  $\nu_0, M$  と,  $[t_i, t_{i+1}]$  上の強絶対連続関数  $v_i$  を

$$\|v_i(t)\| \leq \nu_0, \quad \varphi^t(v_i(t)) \leq M, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$$

を満たすように選ぶ. 従って, (4.1) より, a.e.  $s \in [t_i, t_{i+1}]$  で,

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|u_\lambda(s) - v_i(s)\|^2 &\leq (f(s) - v_i'(s), u_\lambda(s) - v_i(s)) + \varphi_\lambda^S(v_i(s)) - \varphi_\lambda^S(u_\lambda(s)) \\ &\leq M + (\|f(s)\| + \|v_i'(s)\|)(\|u_\lambda(s) - v_i(s)\|) - \varphi_\lambda^S(u_\lambda(s)) \end{aligned}$$

を得る. 一方, (2.2), (3.1), (3.12) より, 適当な正数  $C_4$  をとれば,

$$(4.3) \quad -\varphi_\lambda^S(u_\lambda(s)) \leq -\varphi^S(J_\lambda^S u_\lambda(s)) \leq 2C_1 \|u_\lambda(s) - v_i(s)\| + C_4$$

が成立する. (4.3) に注意して, (4.2) を  $[t_i, t]$  で積分すれば,

$$\|u_\lambda(t) - v_i(t)\| \leq \|u_\lambda(t_i) - v_i(t_i)\| + \sqrt{2(M+C_4)}\delta + \int_{t_i}^t (\|f(s)\| + \|v_i'(s)\| + 2C_1) ds$$

となることがわかり, この評価式から,  $0 < \lambda \leq 1, 0 \leq t \leq T$  で,

$$\begin{aligned} \|u_\lambda(t)\| &\leq \|a\| + (m+1)\{2t_0 + \sqrt{2(M+C_4)\delta}\} + \int_0^t (\|f(s)\| + 2C_1) ds \\ &\quad + \sum_{j=0}^m \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|V_j'(s)\| ds \equiv M_1(\|a\|) \end{aligned}$$

が成立し, (i)を得る. この結果を利用して再び (4.2) を積分すれば, 評価式 (ii) も得られる.

次に (iii)–(vi) を示すために, 評価式 (i) と (3.12) より,  $r \equiv \sup\{\|J_\lambda^t u(s)\|; 0 < \lambda \leq 1, 0 \leq t \leq T\} < \infty$  であることに注意する. 一方, (4.1) の両辺に  $du_\lambda/dt$  を掛ければ,

$$(4.4) \quad \left\| \frac{d}{ds} u_\lambda(s) \right\|^2 + (\partial \varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)), \frac{d}{ds} u_\lambda(s)) = (f(s), \frac{d}{ds} u_\lambda(s)), \quad a.e. s \in [0, T]$$

を得る. 他方,  $u_\lambda$  は強絶対連続であるから, 補題 3.3 の系より

$$(4.5) \quad \begin{aligned} & \left| \frac{d}{ds} \varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)) - (\partial \varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)), \frac{d}{ds} u_\lambda(s)) \right| \\ & \leq |h_r'(s)| (\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)) + K_r) + |g_r'(s)| \| \partial \varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)) \| (\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)) + K_r)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

が  $a.e. s \in [0, T]$  で成立する. よって (4.4), (4.5) を組合せれば,

$$(4.6) \quad \frac{1}{2} \left\| \frac{d}{ds} u_\lambda(s) \right\|^2 + \frac{d}{ds} \varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)) \leq k_1(s) \varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)) + k_2(s), \quad a.e. s \in [0, T].$$

但し,  $k_1, k_2$  は  $\lambda$  に無関係な  $[0, T]$  上の可積分関数.

便宜上, (v), (vi) を最初に証明しよう.  $a \in D(\varphi^0)$  として, (4.6) を  $[0, T]$  で積分すれば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} u_\lambda(s) \right\|^2 ds + \varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) &\leq \varphi^0(a) + \int_0^t k_1(s) \varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)) ds + \int_0^t k_2(s) ds \\ &\leq \left( \varphi^0(a) + \int_0^T k_2(s) ds \right) \exp \left( \int_0^t k_1(s) ds \right). \end{aligned}$$

よって, (4.3) に注意して, (v), (vi) の評価式を得る. 最後に, (iii),

(iv) も, (4.6)の両辺を  $S$  倍して積分すれば, 成立する. (証明終)

[定理の証明] 補題4.1が成立するから,  $u_\lambda$  が (E)の求める強い解に収束することは,  $\partial P^c$  の単調性を用いて通常の方法によって示すことができる. 詳しい証明は, [2], [13], [14]等を参照していただきたい.

### §5. 応用.

$Q$  を  $R^n \times (0, T)$  の有界領域,  $Q_s = Q \cap \{t=s\}$ ,  $\Gamma_s = \partial Q \cap \{t=s\}$  ( $\partial Q = Q$ の境界,  $0 < s < T$ ),  $\Gamma = \bigcup_{0 < s < T} \Gamma_s$  とおき, 次の非線型問題を考える.

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f & \text{on } Q \\ u = 0 & \text{on } \Gamma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{on } Q_0 \end{cases}$$

但し,  $p \geq 2$ .  $Q$ の滑らかさに関しては, 議論を簡単にするため, 各  $t \in [0, T]$  について,  $Q_t$ の境界  $\partial Q_t$  は十分滑らかであり,  $Q$ から  $Q_0 \times (0, T)$  上への境界まで  $C^2$ -級の微分同型写像

$$(x, t) \longmapsto (\xi = X(x, t), \tau = t)$$

が存在するとする.

定理を適用するために,  $Q \subset \hat{Q} \times (0, T)$  を満たす  $R^n$ の球  $\hat{Q}$  をとり,  $H = L^2(\hat{Q})$  上で上の問題を考える.  $C([0, T]; L^2(Q_t)) \equiv \{u \in$

$C([0, T]; L^2(\hat{Q}))$ ;  $u(t) \in L^2(Q_t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  等の記号を用いることにすれば, (5.1) に関して次の結果を得る.

命題 5.1.  $f \in L^2(Q)$ ,  $u_0 \in L^2(Q_0)$  とする. このとき, (5.1) の解  $u$  で,  $u \in C([0, T]; L^2(Q_t)) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}(Q_t))$ ,  $t^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q)$  を満たすものが一意に存在する. 特に,  $u_0 \in W_0^{1,p}(Q_0)$  とすれば,  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q)$  である.

[証明]  $H = L^2(\hat{Q})$  上の下半連続な凸関数  $\varphi^t$  を

$$\varphi^t(u) = \begin{cases} \frac{1}{p} \int_{Q_t} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx & \text{if } u \in W_0^{1,p}(Q_t) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定義すれば, (5.1) は (E) の形に表わされる (cf. [14])  $\varphi^t$  が仮定 A を満たすことをみよう. 任意の  $t_0 \in [0, T]$  をとり, 固定する. このとき, 各  $v_0 \in D(\varphi^{t_0}) = W_0^{1,p}(Q_{t_0})$  に対して,

$$v(x, t) = \begin{cases} v_0(X^{-1}(x(x, t), t_0)) & \text{if } x \in Q_t \\ 0 & \text{if } x \in \hat{Q} - Q_t \end{cases}$$

とおけば, 適当な正定数  $C$  をとることによって

$$\|v(\cdot, t) - v(\cdot, t_0)\|_{L^2(\hat{Q})} \leq C |t - t_0| \varphi^{t_0}(v_0)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\varphi^t(v(\cdot, t)) \leq \varphi^{t_0}(v_0) + C |t - t_0| \varphi^{t_0}(v_0), \quad \forall t \in [0, T],$$

が成立する. よって,  $\varphi^t$  は仮定 A を満足するから, 定理を適用して命題の主張を得る. (証明終)

注意. Fujita [7] によって取り扱われた形の, non-cylindrical な

領域における非線型熱方程式に対しても、我々の定理は変数変換の必要なく適用できる。(cf. [2])

### 文 献

- [1] H. Attouch - P. Bénéilan - A. Damlamian - C. Picard, Équations d'évolution avec condition unilatérale, C. R. Acad. Sc. Paris 279 (1974), 607-609.
- [2] H. Attouch - A. Damlamian, Problèmes d'évolution dans les Hilberts et application, J. Math. pures et appl. 54 (1975), 53-74.
- [3] M. Biroli, Sur la solution faible du problème de Cauchy pour des inéquations d'évolution avec convexe dépendant du temps, C. R. Acad. Sc. Paris 280 (1975), 1209-1212.
- [4] H. Brézis, Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires, Israel J. Math. 9 (1971), 513-534.
- [5] H. Brézis, Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps, C. R. Acad. Sc. Paris 274 (1972), 310-312.
- [6] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland (1973).
- [7] H. Fujita, The penalty method and some nonlinear initial value problems, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, ed. by E. Zarantonello, Academic Press (1971).



- [8] N. Kenmochi, Some nonlinear parabolic variational inequalities, to appear in Israel J. Math.
- [9] N. Kenmochi - T. Nagai, Weak solutions for certain nonlinear time-dependent parabolic variational inequalities, Hiroshima Math. J. 5 (1975), 525 - 535.
- [10] K. Maruo, On some evolution equations of subdifferential operators, Proc. Japan Acad. 51 (1975), 304 - 307.
- [11] J. Moreau, Problème d'évolution associé à un convexe mobile d'un espace hilbertien, C. R. Acad. Sc. Paris 276 (1973), 791 - 794.
- [12] J. Péralba, Un problème d'évolution relatif à un opérateur sous-différentiel dépendant du temps, C. R. Acad. Sc. Paris 275 (1972), 93 - 96.
- [13] J. Watanabe, On certain nonlinear evolution equations, J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 446 - 463.
- [14] Y. Yamada, On evolution equations of subdifferential operators, (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo に投稿中)