数理解析研究所講究録
264巻 1976年 156-175

$\frac{du}{dt} + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t)$ について

東大・教養　大谷 光春

§1. 序

H を実ヒルベルト空間，φ を H から $(-\infty,+\infty]$ への $\varphi \neq +\infty$ なる，下半連続凸関数（これを，以下，p.l.s.c.f. と記す。）とし，

$$D(\varphi) = \{ u \in H ; \varphi(u) < +\infty \}$$

$$\partial\varphi(u) = \{ f \in H ; \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v-u), \text{for } \forall v \in D(\varphi) \}$$

$$D(\partial\varphi) = \{ u \in H ; \partial\varphi(u) \neq \phi \}$$

とおくと，$\partial\varphi$ は φ の Subdifferential と呼ばれ，H での maximal monotone operator になる，（[1] 参照）。

さて，ここで次のコーシー問題を考えよう，

(1.1)　$\frac{du}{dt} + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t)$ ，$t \in [0,T]$.

(1.2)　$u(0) = u_0$

但し、(1.1) の意味は、$g^i(t) \in \partial\varphi^i(u(t))$, for a.a. $t \in [0,T]$, なる $g^i(t)$, $(i=1,2)$, が存在して、(1.1)′ を満す事である。

$$(1.1)' \quad \frac{du}{dt} + g^1(t) - g^2(t) = f(t) \quad , \text{ for a.a. } t \in [0,T] .$$

［定義 1-1］ $u(t) \in C([0,T]; H)$ が (1.1)~(1.2) の<u>強解</u>であるとは、$u(t)$ が $]0,T]$ で絶対連続であり、$u(0) = u_0$ かつ (1.1)′ を満す、$g^i(t) \in \partial\varphi^i(u(t))$ が存在する事である。

我々は、これから (1.1)~(1.2) の強解の存在について、論ずる訳であるが、$\partial\varphi^2 \equiv 0$ の時は、良く知られている様に、H. Brézis [1], [2] 等によって、詳しく研究されており，又，$\partial\varphi^1$ が線型，$\partial\varphi^2$ が gradient operator の場合には、M. Tsutsumi [8] の研究がある。

§2. 定理 I（爆発現象のない場合）

一般に、(1.1)~(1.2) type の方程式の解は、有限時間で $|u(t)|_H$ が $+\infty$ になる場合がある事が知られている，([3], [7] 参照)。この節では、その様な爆発現象のおきない場合を取扱う。次の仮定をおく。

(A.1) 任意の正数 $L<+\infty$ に対して，$\{u\in H;\ \varphi^1(u)\le L\}$ は、H で precompact。

(A.2) (i) 又は (ii) が成立する。

(i) $D(\varphi^1)\subset D(\partial\varphi^2)$ かつ $|\overset{\circ}{\partial}\varphi^2(u)|_H\le M(\varphi^1(u))$, for $\forall u\in D(\varphi^1)$.

(ii) $D(\partial\varphi^1)\subset D(\partial\varphi^2)$ かつ $|\overset{\circ}{\partial}\varphi^2(u)|_H\le K\cdot|\overset{\circ}{\partial}\varphi^1(u)|_H+M(\varphi^1(u))$,

$0<K<1$, for $\forall u\in D(\partial\varphi^1)$.

(A.3) $\varphi^2(u)\le K\cdot\varphi^1(u)+C$, $0\le K<1$, for $\forall u\in D(\varphi^1)$.

但し、$\overset{\circ}{\partial}\varphi^i$ は $\partial\varphi^i$ の minimal section, $M(\cdot)$ は $[0,+\infty)$ 上の locally bounded な単調増加関数，C は u に依らない、定数。更に，この小論を通じて，$\varphi^i(u)\ge 0$, for $\forall u\in H$, と（一般性を失う事なく）仮定する。

［定理 2-1］ (A.1)～(A.3) の仮定のもとに，任意の $u_0\in D(\varphi^1)$, $f(t)\in L^2(0,T;H)$ に対して，次の (2.1)～(2.3) を満す．(1.1)～(1.2) の強解が．（少なくとも1つ）存在する。

(2.1) $\frac{du}{dt}\in L^2(0,T;H)$

(2.2) $\varphi^i(u(t))$ は $[0,T]$ で絶対連続，$(i=1,2)$.

(2.3) $g^i(t)\in L^2(0,T;H)$, $(i=1,2)$.

まず，次の2つの補題を準備しよう，（証明は［2］参照。）。

[補題 2-2]　φ を H 上の p.l.s.c.f. とし，

(2.4)　$\varphi_\lambda(u) = \inf_{v \in H} \{ \frac{1}{2\lambda} |u-v|_H^2 + \varphi(v) \}$ ，$\lambda > 0$ ，とおけば

φ_λ は H 上の Fréchet 微分可能な凸関数となり，φ_λ の subdifferential $\partial(\varphi_\lambda)$ は、$\partial\varphi$ の Yosida 近似 $(\partial\varphi)_\lambda = 1/\lambda \cdot (I - (I+\lambda\partial\varphi)^{-1})$ と一致し、更に、

(2.5)　$\varphi_\lambda(u) \nearrow \varphi(u)$ ，as $\lambda \searrow 0$ ，for $\forall u \in H$.

[補題 2-3]　$u(t)$ 及び $\frac{du}{dt}(t)$ が共に $L^2(0,T;H)$ に属し，$g(t) \in L^2(0,T;H)$ かつ $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ ，for a.a. $t \in [0,T]$ ，なる $g(t)$ が存在すれば，$\varphi(u(t))$ は $[0,T]$ 上で絶対連続となり，更に，$\mathcal{L} = \{ t \in [0,T]$; $u(t), \varphi(u(t))$ が t で絶対連続かつ $u(t) \in D(\partial\varphi) \}$ に対して次式が成立する。

(2.6)　$\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) = (h(t), \frac{du}{dt}(t))$ ，for $\forall t \in \mathcal{L}$ ，$\forall h(t) \in \partial\varphi(u(t))$.

<u>定理2-1 の証明</u>：　まず、(1.1)~(1.2) を次の方程式で近似する。

(2.7)　$\frac{du_\lambda}{dt} + \partial\varphi^1(u_\lambda(t)) - \partial\varphi_\lambda^2(u_\lambda(t)) \ni f(t)$ ，$t \in [0,T]$.

(2.8)　$u_\lambda(0) = u_0$

$\partial\varphi_\lambda^2$ はリプシッツ連続であるから，(2.7)~(2.8) の強解 $u_\lambda(t)$ は、(一意的に) 存在して，(2.1)~(2.3) に相当する性質

を持っている。 $\lambda \searrow 0$ とした時に，$u_\lambda(t)$ の極限として (1.1)~(1.2) の強解を求めようという訳である。

まず，(2.7) の両辺に $\frac{du_\lambda}{dt}$ をかけて $[0,t]$ で積分すれば，補題 2-3, 2-2. を使って，

$$(2.9)\quad \int_0^t \left|\frac{du_\lambda}{dt}(s)\right|^2 ds + \varphi^1(u_\lambda(t)) - \varphi^2(u_\lambda(t)) \leqq \varphi^1(u_0) + \int_0^t \left|\frac{du_\lambda}{dt}(s)\right| \cdot |f(s)|\, ds$$

更に，(A.3) を用いれば，

$$(2.10)\quad \int_0^t \left|\frac{du_\lambda}{dt}(s)\right|^2 ds + 2(1-K)\cdot \varphi^1(u_\lambda(t)) \leqq 2\varphi^1(u_0) + \int_0^t |f(s)|^2 ds$$

を得る。即ち，

$$(2.11)\quad \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|_{L^2(0,T;H)} \leqq C_1, \quad \text{for } {}^\forall \lambda > 0,$$

$$(2.12)\quad \varphi^1(u_\lambda(t)) \leqq C_1, \quad \text{for } {}^\forall t \in [0,T],\ {}^\forall \lambda > 0,$$

更に，(A.2) 及び (2.11), (2.12) より，

$$(2.13)\quad |\partial\varphi_\lambda^2(u_\lambda(t))|_{L^2(0,T;H)} \leqq C_1, \quad \text{for } {}^\forall \lambda > 0.$$

$$(2.14)\quad |g_\lambda^1(t)|_{L^2(0,T;H)} \leqq C_1, \quad \text{for } {}^\forall \lambda > 0,$$

但し，$g_\lambda^1(t) = -\frac{du_\lambda}{dt} + \partial\varphi_\lambda^2(u_\lambda(t)) + f(t) \in \partial\varphi^1(u_\lambda(t))$，$C_1$ は $\varphi^1(u_0)$ 及び $|f|_{L^2(0,T;H)}$ のみに依る定数。

$u_\lambda(t)$ の収束： まず，次の2つの事実を示そう。

(2.15) $\{u_\lambda(t)\}_{\lambda>0}$ は $[0,T]$ で同等連続

(2.16) $\{u_\lambda(t)\}_{\lambda>0}$ は $t \in [0,T]$ を固定すれば H で precompact。

実際，(2.16) は仮定 (A.1) 及び評価 (2.12) から直ちに得られる。(2.15) を見るには，(2.11) の評価と，次の不等式

を組み合せれば良い。

(2.17) $|u_\lambda(t)-u_\lambda(t')|_H \leqq C\cdot|\frac{du_\lambda}{dt}|_{L^2(0,T;H)}\cdot|t-t'|^{1-1/2}$

よって，(2.15)，(2.16) より Ascoli の定理が使えて，

(2.18) $u_{\lambda_n}(t) \rightarrow u(t)$ in $C([0,T];H)$ as $\lambda_n \searrow 0$

なる $\{\lambda_n\}$ と $u(t)\in C([0,T];H)$ とが存在する。

さて，H 上の p.l.s.c.f. φ に対して Φ を

(2.19) $\Phi(u)=\begin{cases}\int_0^T \varphi(u(t))\,dt & \text{if } \varphi(u(t))\in L^1(0,T)\\ +\infty & \text{otherwise}\end{cases}$

で定義すれば，Φ は $L^2(0,T;H)$ 上の p.l.s.c.f. となり，更に，$\forall g\in L^2(0,T;H)$ に対して，$g\in\partial\Phi(u)$ ならば，かつその時に限り，$g(t)\in\partial\varphi(u(t))$，for a.a. $t\in[0,T]$，となる，(Brézis[2] 参照)。

ここで，Φ^1，Φ_λ^2，etc を φ^1，φ_λ^2，etc で同様に定義すれば，$\partial\Phi^1$，$\partial\Phi^2$，$\frac{du}{dt}$ の $L^2(0,T;H)$ での demiclosedness より評価 (2.11)，(2.13)，(2.14) と組合せて，$\{\lambda_n\}$ の部分列 $\{\lambda_{n'}\}$ が選べて，次の様にできる。

(2.20) $\frac{du_{\lambda_{n'}}}{dt} \longrightarrow \frac{du}{dt}$ weakly in $L^2(0,T;H)$

(2.21) $g^1_{\lambda_{n'}} \longrightarrow g^1\in\partial\Phi^1(u)$ weakly in $L^2(0,T;H)$

(2.22) $\partial\Phi^2_{\lambda_{n'}}(u_{\lambda_{n'}}) \rightarrow g^2\in\partial\Phi^2(u)$ weakly in $L^2(0,T;H)$

よって, $g^i(t)$ は (1.1)′ をみたすから, $u(t)$ が求める強解である。

[証明終り]

§3. 定理II (Stable Set)

この節では、(A.1), (A.2) は満されているが, (A.3) が満されていない場合を取扱う。 一般に, 条件 (A.3) がない場合には, 任意の $u_0 \in D(\varphi^1)$ から出発する解は, 爆発する場合がある。([3], [7] 参照)。 しかし, ある意味で, 充分小さな初期値 u_0 に対して, (1.1)~(1.2) の強解は, 大域的に存在することが示せる。 この状況を説明する為に, J.L. Lions [4], M. Tsutsumi [7], と同様な, Sable Set の概念を導入する。 まず, 次の様な $\tilde{\varphi}^i$ を導入すると, 応用上, 便利である。

(A.4) 次の (i)~(iii) を満すH上の実数値関数 $\tilde{\varphi}^i$ が存在する。

(i) $0 \le \tilde{\varphi}^1(u) \le \varphi^1(u)$, $0 \le \varphi^2(u) \le \tilde{\varphi}^2(u)$, for $\forall u \in H$.

(ii) $u_n \to u$ (in H) かつ $\varphi^1(u_n) \to \varphi^1(u)$ ならば $\tilde{\varphi}^1(u_n) \to \tilde{\varphi}^1(u)$.

(iii) $\tilde{\varphi}^2$ は H上の p.l.s.c.f. で $D(\partial\varphi^1) \subset D(\partial\tilde{\varphi}^2)$ かつ (3.1)を満す。

(3.1) $|\overset{\circ}{\partial}\tilde{\varphi}^2(u)|_H \le M(\varphi^1(u)) \cdot \{|\overset{\circ}{\partial}\varphi^1(u)|_H + 1\}$, for $\forall u \in D(\partial\varphi^1)$.

次に、

(3.2) $N(\varphi) = \{u \in H;\ \varphi(u) = 0\}$, $(\varphi = \varphi^1, \tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2)$

(3.3) $\tilde{J}(u) = \tilde{\varphi}^1(u) - \tilde{\varphi}^2(u)$

(3.4) $J(u) = \varphi^1(u) - \varphi^2(u)$

(3.5) $J_\lambda(u) = \varphi^1(u) - \varphi^2_\lambda(u)$ とおく。

この時, $J_\lambda(u) \geqq J(u) \geqq \tilde{J}(u)$, となる。

(A.5) 次の (i)〜(V) が成立する。

(i) $\tilde{J}(0) = C_2 > -\infty$

(ii) ${}^\forall u \in D(\varphi^1) \setminus N(\tilde{\varphi}^1)$ に対して, $\tilde{J}(r\cdot u)$ は $r \in [0, +\infty)$ の連続関数で, $(0, +\infty)$ では C^1-級, 更に次の様な u の関数 $r_u : D(\varphi^1) \setminus N(\tilde{\varphi}^1) \mapsto (0, +\infty]$ (1) が存在する。
$\frac{d\tilde{J}}{dr}(r\cdot u) > 0$ for ${}^\forall r \in (0, r_u)$ かつ $\left.\frac{d\tilde{J}}{dr}(r\cdot u)\right|_{r=r_u} = 0$.

(iii) $u_n \to u$ (in H), $\tilde{\varphi}^1(u_n) \to \tilde{\varphi}^1(u) \neq 0$ かつ $\tilde{\varphi}^2(u_n) \to \tilde{\varphi}^2(u)$ ならば, $r_{u_n} \to r_u$ 。

(iv) $0 < \tilde{\varphi}^1(u) \leqq \varepsilon$ ならば $r_u \geqq 1$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する。

(v) $\inf\limits_{u \in D(\varphi^1) \setminus N(\tilde{\varphi}^1)} \tilde{J}(r_u \cdot u) = d > 0$.

ここで, Stable Set W を次の様に定義する。

(3.6) $W = \{ u \in D(\varphi^1) \setminus N(\tilde{\varphi}^1) \,;\, J(u) < d,\ r_u > 1 \}$

---

(1) $\frac{d\tilde{J}}{dr}(r\cdot u) > 0$, for ${}^\forall r \in (0, +\infty)$ のときは, $r_u = +\infty$ とする。

$\widetilde{W}$, $N(\tilde{\varphi}^1)$ について、次の仮定をおく。

(A.6) $\widetilde{W} \neq \phi$，更に，$u \in \widetilde{W}$ かつ $J(u) \leq d_0 < d$ ならば

$\varphi^1(u) \leq M(d_0) < +\infty$.

(A.7) $u \in N(\tilde{\varphi}^1)$ ならば $\varphi^2(u) \leq C_3 < +\infty$

[注意3-1] 特に，φ^1 が α_1 次の斉次関数で，(A.3) が満足されている時，$\tilde{\varphi}^1 = \varphi^1$，$\tilde{\varphi}^2 = K\varphi^1 + C$ とおけば，$\forall u \in D(\varphi^1) \setminus N(\varphi^1)$ に対して，$r_u = +\infty$ かつ $d = +\infty$ となり，$\widetilde{W}$ は結局 $D(\varphi^1) \setminus N(\varphi^1)$ に一致する。

[命題3-2] $\tilde{\varphi}^1$, $\tilde{\varphi}^2$ はそれぞれ α_1, α_2 次の斉次関数，$(0 < \alpha_1 < \alpha_2)$，とし．次の (3.7) を満すものとする。

(3.7) $\tilde{\varphi}^2(u) \leq C_4 \{\tilde{\varphi}^1(u)\}^{\alpha_2/\alpha_1}$, for $\forall u \in D(\varphi^1)$.

更に，$N(\tilde{\varphi}^1) = N(\varphi^1)$ かつ、任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\{u \in H ; 0 < \varphi^1(u) < \varepsilon\} \neq \phi$ とすれば，(A.5)〜(A.7) はすべて満される。

証明： 簡単な計算によって，まず

(i) $\tilde{J}(r.u) = r^{\alpha_1} \cdot \tilde{\varphi}^1(u) - r^{\alpha_2} \cdot \tilde{\varphi}^2(u)$

(ii) $r_u = \left[\dfrac{\alpha_1 \cdot \tilde{\varphi}^1(u)}{\alpha_2 \cdot \tilde{\varphi}^2(u)} \right]^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \geq \left(\dfrac{\alpha_1}{C_4 \cdot \alpha_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \cdot (\tilde{\varphi}^1(u))^{-1/\alpha_1} > 0$

if $u \notin N(\tilde{\varphi}^2) \cup N(\tilde{\varphi}^1)$

$r_u = +\infty \quad \text{if} \quad u \in N(\tilde{\varphi}^2) \setminus N(\tilde{\varphi}^1)$

(iii) $d \geq \frac{d_2 - d_1}{\alpha_2} \cdot \left(\frac{d_1}{C_4 \cdot d_2} \right)^{\frac{d_1}{d_2 - d_1}} > 0$

(iv) $W = \{ u \in D(\varphi^1) \setminus N(\varphi^1) \; ; \; \varphi^1(u) - \varphi^2(u) < d, \; d_1 \tilde{\varphi}^1(u) - d_2 \tilde{\varphi}^2(u) > 0 \}$

をうる。

(A.5) と (A.7) は、上記の (i)～(iv) より明らか。 (A.6) を見るには、まず、(3.7) より、 $0 < \tilde{\varphi}^1(u) < \varepsilon_0$ とすれば

$d_1 \cdot \tilde{\varphi}^1(u) - d_2 \cdot \tilde{\varphi}^2(u) \geq (d_1 - d_2 \cdot C_4 \cdot \varepsilon_0^{\frac{d_2 - d_1}{d_1}}) \tilde{\varphi}^1(u) > 0$ となる

充分小さな $\varepsilon_0 > 0$ が存在するから、 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, d\}$ とすれば、 $\{ u \in H \; ; \; 0 < \varphi^1(u) < \varepsilon \} \subset W$ となるから $W \neq \phi$。

次に、 $u \in W$ かつ $J(u) \leq d_0$ ならば、

$\tilde{\varphi}^1(u) - \tilde{\varphi}^2(u) \leq J(u) \leq d_0$ かつ $d_1 \tilde{\varphi}^1(u) - d_2 \tilde{\varphi}^2(u) > 0$ であるから直ちに、 $\tilde{\varphi}^1(u), \tilde{\varphi}^2(u)$ の有界性がいえ、 $\varphi^1(u) \leq M(d_0) < +\infty$ となる。 [証明終り]

[定理3-3] (A.1), (A.2) 及び (A.4)～(A.7) の仮定のもとに、

(3.8) $d - J(u_0) > \frac{1}{4} |f|^2_{L^2(0,T;H)}$ を満す、任意の $u_0 \in W$, $f \in L^2(0,T;H)$ に対して、(2.1)～(2.3) を満足する、(1.1)～(1.2) の強解が、(少なくとも1つ)、存在する。

定理3-3の証明： ここでも、やはり次の近似方程式を考える。

(3.9) $$\frac{du_\lambda}{dt} + \partial\varphi^1(u_\lambda(t)) - \partial\varphi^2_\lambda(u_\lambda(t)) \ni f(t), \quad t \in [0,T].$$

(3.10) $$u_\lambda(0) = u_0$$

まず $J_\lambda(u_0) \searrow J(u_0)$ as $\lambda \searrow 0$ であったから,

(3.11) $$d - \left\{ J_\lambda(u_0) + \frac{1}{4K}|f|^2_{L^2(0,T;H)} \right\} > 0, \quad \text{for } \forall\lambda \in]0,\lambda_0]$$

となる, $\lambda_0 > 0$ と $0 < K < 1$ とが存在する。

(3.9)の両辺に $\frac{du_\lambda}{dt}$ をかけて, $[0,t]$ で積分すれば,

(3.12) $$\int_0^t \left|\frac{du_\lambda}{dt}(s)\right|^2 ds + J_\lambda(u_\lambda(t)) \leqq J_\lambda(u_0) + \int_0^t |f(s)|\cdot\left|\frac{du_\lambda}{dt}(s)\right| ds$$

よって, $d_0 = J_{\lambda_0}(u_0) + \frac{1}{4K}\int_0^T |f(s)|^2 ds$ とすれば, 次をうる。

(3.13) $$(1-K)\int_0^t \left|\frac{du_\lambda}{dt}(s)\right|^2 ds + J_\lambda(u_\lambda(t)) \leqq d_0 < d, \quad \text{for } \forall t \in [0,T], \ \forall\lambda \in]0,\lambda_0].$$

当分, λ を $]0,\lambda_0]$ に固定して, 話を進めよう。

いま, $\varphi^1(u_\lambda(t))$, $u_\lambda(t)$ は $[0,T]$ で絶対連続, 更に, $\frac{du_\lambda}{dt}$, $\partial\mathring{\varphi}^1(u_\lambda(t)) \in L^2(0,T;H)$ であったから, $\partial\mathring{\varphi}^2(u_\lambda(t)) \in L^2(0,T;H)$、よって 補題2-3より, $\tilde{\varphi}^2(u_\lambda(t))$ は $[0,T]$ で絶対連続, すなわち, (A.4)の(ii)及び(A.5)の(iii)より

(3.14) $\gamma_{u_\lambda(t)}$ は $\{t \in [0,T];\ \tilde{\varphi}^1(u_\lambda(t)) \neq 0\}$ で連続

となる。

ここで，(3.13) 式より，直ちに

(3.15)　$J(u_\lambda(t)) \leqq J_\lambda(u_\lambda(t)) \leqq d_0$, for $\forall t \in [0,T]$, $\forall \lambda \in]0,\lambda_0]$.

が得られる。更に，次の事がいえる。

(3.16)　$u_\lambda(t) \in N(\tilde{\varphi}') \cup \overline{W}$, for $\forall t \in [0,T]$, $\forall \lambda \in]0,\lambda_0]$.

実際，$\tilde{\varphi}'(u_\lambda(t_0)) \neq 0$ かつ $r_{u_\lambda(t_0)} < 1$ となる t_0 があるとすれば，$r_{u_\lambda(t)}$ 及び $\tilde{\varphi}'(u_\lambda(t))$ の連続性と条件 (A.5) の (iv) 及び $r_{u_\lambda(0)} > 1$ とから，

(3.17)　$r_{u_\lambda(t_1)} = 1$ 　となる $t_1 \in]0, t_0[$ が存在する。

ところが，d の定義より，

(3.18)　$J(u_\lambda(t_1)) \geqq \tilde{J}(u_\lambda(t_1)) \geqq d > d_0$

であるから，これは (3.15) に矛盾する。よって (3.16) が示された。

よって，(A.6)，(A.7)，(3.15)，(3.16) より直ちに

(3.19)　$\varphi'(u_\lambda(t)) \leqq C_5$, for $\forall t \in [0,T]$, $\forall \lambda \in]0,\lambda_0]$.

を得る。ここで C_5 は d_0 のみによる定数。

更に，(3.16)，(A.6)，(A.5) の (i)，(ii) より $J_\lambda(u_\lambda(t))$ は下に有界である事がわかり，(3.13) 式より，

$$(3.20)\quad \int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 \cdot dt \leqq C_5 \quad , \quad \text{for } \forall\lambda \in]0, \lambda_0] \,.$$

なる 評価を得る。

(3.19), (3.20) の 評価を得たから, あとは, 定理 2.1. の証明の後半と全く同様にして, 強解の存在が示せる。

[証明 終り].

[注意 3-4]　定理 3-3 に於いて, $J(u_0) + \frac{1}{4}|f|^2_{L^2(0,T;H)} < d$ であれば, $u_0 \in N(\tilde{\varphi}')$ に対しても 同じ事が言える。

[注意 3-5]　定理 3-3 に於いて, (3.8) の条件があるから例えば, $f(t) \equiv f$ の場合, $|f|_H$ は T が大きくなると共に, 小さくならざるを得ないが, もし 命題 3-2 の状況と, $\varphi'(u) \geqq c_0 |u|_H^2$, $c_0 > 0$, なる coerciveness とがあれば, $|f(t)|_{L^\infty(0,T;H)} \leqq \varepsilon$, $0 \leqq \varphi'(u_0) \leqq \varepsilon$, ($\varepsilon$ は d のみに依り, T に依らない正の数。) なる, $f(t)$, u_0, に対して, (2.1)~(2.3) を満たす (1.1)~(1.2) の (大域的) 強解の存在がいえる。

[注意 3-6]　$u_0 \in \overline{D(\varphi^t)}^{(2)}$ の場合にも，(1.1)~(1.2) の強解の存在について，定理 2-1，定理 3-3 に相当する，結果が得られる。但し，定理 3-3 に於いては，

$u_0 \in \overline{D(\varphi^t)} \cap \{u \in H ; |u|_H \leq \varepsilon\}$，$|f(t)|_{L^2(0,T;H)} \leq \varepsilon$，（$\varepsilon$ は d のみによる正数。）と変更する必要がある，（詳しくは K.Ôtani [5] を見られたい。）。

(2) $D(\varphi^t)$ の H-norm での閉包.

§4. 応用

[例 I]　はじめに，次の初期値境界値問題を考えよう。

(4.1) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \beta(u(x,t)) \ni f(t)$, $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$

(4.2) $u(x,t)|_\Gamma = 0$　, $t \in [0,T]$

(4.3) $u(x,0) = u_0(x)$　, $x \in \Omega$

但し，$(p-2) \geq 0$ かつ この節を通じて，Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域で，Γ は Ω の充分滑らかな境界とする。

M. Tsutsumi [X] は，この問題を Galerkin 法によって，$f(t) \equiv 0$，$\beta(u) = |u|^\alpha \cdot u$，$(\alpha > 0)$，の場合について，研究しているが，我々の方法の利点の 1 つは，解 $u(x,t)$ の x についての regularity が良くなる点である。

この節を通じて，$\beta(\cdot)$ は $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1$ の maximal monotone graph とし，次の (4.4) を満すものとする。

(4.4) $|\beta(r)| \leqq K_1\cdot|r|^{1+\alpha}+K_2$, $\alpha>0$, for $^\forall r\in\mathbb{R}^1$.

まず，定理 2-1 を適用すれば，次の定理を得る。

[定理 4-1] $n\leqq p$ の時 $(2+\alpha)<p$, $n>p$ の時 $(2+\alpha)<p$ かつ $2(1+\alpha)\leqq\frac{np}{n-p}$ とすれば，任意の $u_0\in W_0^{1,p}(\Omega)$ と $f(t)\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ に対して，(4.5)~(4.7) をみたす，(4.1)~(4.3) の強解が存在する。

(4.5) $\frac{du}{dt}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

(4.6) $|u(t)|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ は $[0,T]$ で絶対連続。

(4.7) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

証明： まず，$\partial l(r)=\beta(r)$ となる，$\mathbb{R}^1$ 上の p.l.s.c.f. $l(r)$ が存在するから，ϕ^2 を次式で定義すると，

$$(4.8)\quad \phi^2(u)=\begin{cases}\int_\Omega l(u(x))\,dx & \text{if } l(u(x))\in L^1(\Omega)\\ +\infty & \text{otherwise.}\end{cases}$$

ϕ^2 は $H=L^2(\Omega)$ 上の p.l.s.c.f. となり，$^\forall g\in L^2(\Omega)$ に対して，もし，$g\in\partial\phi^2(u)$ ならばかつその時に限り $g(x)\in\beta(u(x))$, for a.a. $x\in\Omega$.

となる、（[2] 参照）。 次に、

$$(4.9)\quad \Phi_p(u) = \begin{cases} \frac{1}{p}\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p \cdot dx & \text{if } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすれば、 $D(\Phi_p) = W_0^{1,p}(\Omega)$ かつ $\partial\Phi_p(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$

となる。 よって、定理 4-1 を示すには、 $\varphi^1 = \Phi_p$, $\varphi^2 = \Phi^2$

とおいて、 (A.1) ～ (A.3) を check すれば良い。

実際、 (A.1) は Rellich の定理、 (A.2) は (4.4) 式

及び Sobolev の定理 より 明らか。 (A.3) も (A.2) と

同様にして、 $(2+\alpha) < p$ に 注意すれば 簡単に示せる。

[証明終り]

[注意 4-2] 定理 4-1 に於いて、 $n \leq 11$ とすれば、

α についての仮定は $(2+\alpha) < p$ で 十分である。

[注意 4-3] 注意 3-6 でも述べた様に、 定理 4-1

に於いて、 $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対しても、 (4.5)′～(4.7)′ をみたす、

(4.1)～(4.3) の強解の存在がいえる。

(4.5)′ $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$

(4.6)′ $|u(t)|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ は $]0,T]$ で 絶対連続。

$$(4.7)' \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in L^2(\delta, T; L^2(\Omega)), \text{ for } \forall \delta > 0.$$

$p < (2+\alpha)$ の場合には，次の定理を得る。

[定理 4-4]　$K_2 = 0$，かつ　$p \geqq n$　ならば　$p < (2+\alpha)$，
$n > p$　ならば　$p < (2+\alpha)$，$2(1+\alpha) \leqq \frac{n \cdot p}{n-p}$　とすれば，

$$(4.10) \quad d - J(u_0) > \frac{1}{4} |f|^2_{L^2(0,T;H)}$$

を満す，任意の
$u_0 \in \overline{W} \cup \{0\}$　と　$f \in L^2(0,T;H)$　に対して，(4.5)~(4.7) を満す，(4.1)~(4.3) の強解が存在する。
但し，$\varphi^1(u) = \tilde{\varphi}^1(u) = \phi_p(u)$，$\varphi^2(u) = \phi^2(u)$，

$$(4.11) \quad \tilde{\varphi}^2(u) = \begin{cases} \dfrac{K_1}{2+\alpha} \displaystyle\int_\Omega |u(x)|^{2+\alpha} \cdot dx & \text{if} \quad u \in L^{2+\alpha}(\Omega) \\ +\infty & \text{otherwise}. \end{cases}$$

証明：　α に対する仮定から，Sobolev の定理によって，

$$(4.12) \quad \tilde{\varphi}^2(u) \leqq C \cdot \{\tilde{\varphi}^1(u)\}^{\frac{2+\alpha}{p}}, \text{ for } \forall u \in D(\varphi^1)$$

となるから，命題 3-2 の条件がすべて満されており，更に，(A.4) も明らかに満足されている。(A.1)，(A.2) も定理 4-1 の場合と全く同様。　[証明終り]

［例 II］　次の問題を考えよう,

$$(4.13)\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) + C_0 \cdot u - \beta(u(x,t)) \ni f(t),\ (x,t) \in \Omega \times [0,T].$$

$$(4.14)\quad -\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u(x,t)),\quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T].$$

$$(4.15)\quad u(x,0) = u_0(x),\quad x \in \Omega.$$

但し, $C_0 > 0$, $\frac{\partial}{\partial n}$ は outward normal derivative, $\gamma(\cdot)$ は $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ での maximal monotone graph で $\gamma(0) \ni 0$.
ここで, $\partial j(r) = \gamma(r)$ となる, $\mathbb{R}^1$ 上の p.l.s.c.f. $j(r) \geqq 0$ が存在するから, ϕ^1 を次式で定義すると,

$$(4.16)\quad \phi^1(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \cdot dx + \frac{C_0}{2}\int_\Omega |u(x)|^2 \cdot dx + \int_\Gamma j(u(x))d\Gamma \\ \quad \text{if } u \in H^1(\Omega),\ j(u) \in L^1(\Gamma). \\ +\infty \quad \text{otherwise}. \end{cases}$$

ϕ^1 は $H = L^2(\Omega)$ 上の p.l.s.c.f. となり, 更に,

$$D(\partial\phi^1) = \left\{ u \in H^2(\Omega);\ -\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u),\ \text{for a.a. } x \in \Gamma \right\}$$

$$\partial\phi^1(u) = -\Delta u + C_0 u$$

となるから, ([1] 参照), (4.13)～(4.15) について,
定理 4-4 と類似の定理が得られる。
実際, $\varphi^1(u) = \phi^1(u)$, $\varphi^2(u) = \phi^2(u)$, $\tilde{\varphi}^2(u)$ は (4.11) で, 又, $\tilde{\varphi}^1(u)$ としては,

$$(4.17) \qquad \varphi^1(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega |u(x)|^2 dx & \text{if } u \in H^2(\Omega) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

を，とれば良い。

References

[1] H. Brézis Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial diff. equations, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Acad. Press, (1971).

[2] H. Brézis Operateurs Maximaux Monotones, North-Holland, (1973)

[3] H. Fujita On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic eqs. Proc. Symp. in Pure Math. 18, A.M.S. Providence, Rhode Island, (1970), 105-113.

[4] J.L. Lions Quelque Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[5] K. Ôtani On the strong solution of $u_t + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t)$, to appear.

[6] K. Ôtani On the strong solution of $u_t + \partial\varphi^{1,t}(u(t)) - \partial\varphi^{2,t}(u(t)) \ni f(t)$, in preparation.

[7] M. Tsutsumi Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations, R.I.M.S. (1972), 211–229.

[8] M. Tsutsumi On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space, Mathematica Japonicae, (1972), 173–193.