数理解析研究所講究録
264巻 1976年 103-119

非線形放物型方程式について

早大 理工学部 井上 弘
石井仁司
堤 正義

§1 Introduction

ある種の化学反応や、制御されていない原子核分裂等を記述している次の方程式の初期値境界値問題について考察する。

(1.1) $u_t(t,x) = \Delta u(t,x) + u^2(t,x) \qquad (t,x) \in [0,T] \times \Omega$

(1.2) $u(0,x) = u_0(x) \qquad x \in \Omega$

(1.3) $u(t,x) = 0 \qquad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega$。

ここで $u_t(t,x)$ は $u(t,x)$ の t に関する偏微分、Δ は R^n における laplacian operator, Ω は R^n における有界領域で滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつものとする。(1.1)、(1.2)、(1.3) の解 $u(t,x)$ は $u_0(x)$ のある意味での大きさにより、時間に関して global に存在するか、又は有限時間で blow up することが知られている。(Tsutsumi [1], Lions [5]. 他)

§2では，どの様な条件で解 $u(t,x)$ が global に存在するか，blow up するかを述べる．§3では (1.1) を安定化した方程式 (3.1) の解 $u_\varepsilon(t,x)$ を用いて $u(t,x)$ の近似を行なう．§4では特に空間次元を1次元として $u(t,x)$ の blowing up time t_b を評価する．§5では，やはり空間次元として，(1.1) の安定化方程式 (3.1) を差分化し，差分近似式の安定性と誤差の評価を行なう．

§2. global solution と blow up solution

最初に関数空間を定義する

定義：　$L^p(\Omega) = \{ u \mid (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{1/p} < +\infty \}$　$1 \leq p < \infty$

$\|u\|_p = (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{1/p}$　特に $\|u\| = \|u\|_2$

$H_0^1(\Omega)$: $C_0^\infty(\Omega)$ のノルム $\|u_x\|$ による完備化

$C^k([0,T]; X)$　(X: Banach sp)

: X-valued の k 回連続的微分可能な関数の作る Banach sp.　特に $C^0([0,T]; X) = C([0,T]; X)$

<u>*Lemma 2.1*</u>. 任意の $f \in H_0^1(\Omega)$ に対して，ある定数 $C_1 > 0$ が存在し，次の不等式が成立する．

$$\|f\| \leq C_1 \|f_x\|, \quad \|f\|_3 \leq C_1 \|f_x\|.$$

<u>*Lemma 2.2*</u>.　$C_2 = (\text{measure}(\Omega))^{1/6}$ とする．任意の $f \in L^3(\Omega)$ に対し，　$\|f\| \leq C_2 \|f\|_3$

が成り立つ.

<u>Theorem 2.1.</u> (local existence) 任意の $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ に対し，ある $T_1 > 0$ が存在し，$[0, T_1]$ 上で，初期値境界値問題 (1.1)-(1.3) は一意的な解 $u(t,x) \in C([0,T_1]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T_1]; L^2(\Omega))$ を持つ．更に，$u_0(x) \geq 0$ a.e in Ω ならば，$u(t,x) \geq 0$ a.e. in Ω.

<u>証明</u>. Segal [2] を参照.

ここで，

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u_x\|^2 - \frac{1}{3}\|u\|_3^3, \qquad u \in H_0^1(\Omega)$$

$$K(u) = \|u\|_3^3 - \|u_x\|^2$$

$$d = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda u)$$

とおくと

<u>Lemma 2.3.</u> $d > 0$。

<u>Lemma 2.4.</u>

$$\int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds + J(u(t)) = J(u_0) \tag{2.1}$$

<u>Theorem 2.2</u> (global existence)

$W_s = \{ u \in H_0^1(\Omega) \mid J(u) < d, \ K(u) < 0 \}$ とする.

$u_0 \in W_s$ ならば，初期値・境界値問題 (1.1)-(1.3) の解 $u(t,x)$ は global に存在し，$u(t,x) \in W_s$ for all t．さらに，この時 $\|u(t)\|$ は $t \to \infty$ で exponentially に decay する.

Lemma 2.5.

$u \in \widetilde{W}_s = \{ u \in H_0^1(\Omega) \mid J(u) \le d_0 < d,\ K(u) < 0 \}$ ならば，d_0 に依存する定数 $\delta = \delta(d_0)$ ($0 < \delta < 1$) が存在して

$$K(u) < -\delta \|u_x\|^2 .$$

Theorem 2.2の証明. 解の存在については Tsutsumi [1] を見よ. $\|u(t)\|$ が exponentially に decay することを示そう. (1.1)式に $u(t,x)$ を乗じて積分すれば,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 = K(u). \tag{2.2}$$

Lemma 2.4から

$$J(u(t)) \le J(u_0)$$

したがって $d_0 = J(u_0)$ として Lemma 2.5を用いれば，$u \in \widetilde{W}_s$ で

$$K(u(t)) < -\delta \|u_x(t)\|^2 .$$

これと，Lemma 2.1 を用いれば，ある正の定数 C が存在して

$$K(u(t)) < -C \|u(t)\|^2 . \tag{2.3}$$

従って，(2.2) から $\|u(t)\|$ は exponentially に decay する.

証明終り.

Theorem 2.3. (blow up solution)

$W_b = \{ u \mid J(u) < d,\ K(u) > 0 \}$ とおく.

$u_0 \in W_b$ ならば，初期値問題 (1.1)−(1.3) の解 $u(t,x)$ は有限時間で blow up する.

証明. $t_b = \sup T$ such that $u(t,x) \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$.

とおく．この時 $^\forall t\in[0,t_b)$ に対して

$$u(t,x)\in \overline{W}_b$$

となる（証明は Theorem 2.2 と同様 Tsutsumi [1] 参照）．

Lemma 2.6.

M を正の定数とする

$$u\in \widetilde{W}_b=\{u\in H_0^1(\Omega)\mid J(u)\le d_0<d,\ 0<K(u)<M\}$$

ならば，d_0 に依存する定数 $\delta=\delta(d_0)$ が存在して

$$K(u)>\delta\|u_x\|^2 \qquad (\delta>0).$$

Theorem 2.3 の証明の続き．

$J(u)<d$ と $0<\|u_x\|^2<\|u\|_3^3$ から，もし $\|u\|_3^3\ge 12d$ ならば

(2.4) $$\|u_x\|^2\le \frac{5}{6}\|u\|_3^3$$

もし，$\|u\|_3^3\le 12d$ ならば，Lemma 2.6 $(d_0=J(u_0))$ が使えて

(2.5) $$K(u)>\delta\|u_x\|^2$$

いずれにしても，

(2.6) $$K(u)>\min\left(\frac{1}{6},\delta\right)\|u_x\|^2$$

となり，Lemma 2.1 と (2.2) 式から

(2.7) $$\|u(t)\|^2\ge e^{C_3t}\|u_0\|^2 \qquad t\in[0,t_b)$$

が成り立つ．ここで C_3 は正の定数．

一方 $\frac{d}{dt}\|u\|^2=2\|u\|\frac{d}{dt}\|u\|=2(u,u_t)\le 2\|u\|\|u_t\|$

を用いれば

(2.8) $$\frac{d}{dt}\|u(t)\|\le\|u_t(t)\|. \qquad \text{従って，}$$

(2.9) $\quad \|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|u_t(s)\| ds \quad \leq \|u_0\| + \sqrt{t}\left(\int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds\right)^{1/2}$。

(2.6) を用いて (2.9) を書き変えると

(2.10) $\quad t\int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds \geq \|u_0\|^2 (e^{c_3 t} - 2) \qquad t \in [0, t_b)$

となる。ここで

(2.11) $\quad I(t) = \int_{t_0}^t \|u(s)\|^2 ds + (T_0 - t)\|u(t_0)\|^2 + \gamma(t+\tau)^2$

$\qquad t \in [t_0, T_0]$

とおく。但し $0 < t_0 < T_0 < t_b$, $\tau > 0$, $\gamma > 0$. (γ, τは後で決める。)

(2.12) $\quad I'(t) = \|u(t)\|^2 - \|u(t_0)\|^2 + 2\gamma(t+\tau)$

$\qquad\qquad = \int_{t_0}^t \frac{d}{ds}\|u(s)\|^2 ds + 2\gamma(t+\tau)$

(2.13) $\quad I''(t) = 2(u(t), u_t(t)) + 2\gamma$

$\qquad\qquad = -2\|u_x\|^2 + 2\|u\|_3^3 + 2\gamma$

$\qquad\qquad = 6\int_{t_0}^t \|u_t(s)\|^2 ds + \|u_x\|^2 - 6J(u(t_0)) + 2\gamma$

(2.7) を用いて $(I'(t))^2$ を計算すれば

(2.14) $\quad (I'(t))^2 \leq 4I(t)\left(\int_{t_0}^t \|u_t(s)\|^2 ds + \gamma\right)$

を得る。(2.13) より次の式を得る。

(2.15) $\quad I(t)\cdot I''(t) \geq \frac{3}{2}(I') - 4(\gamma + \frac{3}{2}J(u(t_0))\cdot I(t)$ 。

(2.3) 及び (2.10) より $J(u(t))$ は次の様になる,

(2.16) $\quad -J(u(t)) = -J(u_0) + \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds$

$\qquad\qquad\qquad \geq \frac{1}{t}\|u_0\|^2(e^{c_3 t} - 2) - J(u_0)$, $t \in [0, t_b)$.

従って $0 \leq t_0 < t_b$ を $J(u(t_0)) < 0$ となるように固定

できる. 更に $\gamma = -\frac{3}{2} J(u(t_0))$ ととれば (2.15) より

(2.17) $\quad I(t) \cdot I''(t) \geq \frac{3}{2} (I')^2$

(2.18) $\quad (I^{-\frac{1}{2}})'' \leq 0$

となる。故に

(2.19) $\quad I(t) \geq I^3(t_0) \{ I(t_0) - \frac{1}{2}(t-t_0) I'(t_0) \}^{-2}$ 。

$I(t) < +\infty$, $t \in [t_0, T_0]$ より $I(t_0) - (T_0 - t_0) I'(t_0) > 0$

でなければならない。(2.12) より

(2.20) $\quad T_0 - t_0 < I(t_0)/I'(t_0) < +\infty$.

$T_0 (< t_b)$ は任意だから $t_b \leq t_0 + I(t_0)/I'(t_0) < +\infty$

よって $u_0 \in W_b$ に対する解 $u(t, x)$ は有限時間で

blow up する. 証明終り.

§3 $u(t, x)$ の近似

(1.1) を安定化した次の式を考える。

(3.1) $\quad u_t = \Delta u + u^2 - \varepsilon u^3 \qquad x \in \Omega$

(3.2) $\quad u(0, x) = u_0(x) \geq 0 \qquad x \in \Omega$

(3.3) $\quad u(t, x) = 0 \qquad x \in \partial\Omega$

ここで ε は小さな正の定数とする。もし $0 \leq u_0(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}$,

$u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ ならば (3.1), (3.2), (3.3) の解 $u_\varepsilon(t, x)$ は t

に関して global に存在しかつ

(3.4) $\quad 0 \leq u_\varepsilon(t, x) \leq \frac{1}{\varepsilon}$, $\quad u_\varepsilon(t, x) \in C([0, \infty) ; H_0^1(\Omega)) \cap$

$C^1([0,\infty):L^2(\Omega))$

を満たす。(Lions [5])

<u>Lemma 3.1</u>　(3.1), (3.2), (3.3) の解 $u_\varepsilon(t,x)$ は ε に関して monotone decreasing である。

<u>証明</u>．$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ として ε_1, ε_2 に対する解をそれぞれ $u_{\varepsilon_1}(t,x)$, $u_{\varepsilon_2}(t,x)$ とすると

$$(3.5)\qquad u_{\varepsilon_1 t}(t,x) > \Delta u_{\varepsilon_1}(t,x) + u_{\varepsilon_1}^2(t,x) - \varepsilon_2 u_{\varepsilon_1}^3(t,x)$$

が成立ち，比較定理により　$u_{\varepsilon_1}(t,x) \geq u_{\varepsilon_2}(t,x)$　を得る。

Q.E.D.

<u>Theorem 3.1</u>　$u(T_0,x) < +\infty$　なるよう T_0 を固定する。任意の $(t,x) \in [0,T_0] \times \Omega$ に対し $u_\varepsilon(t,x)$ は $\varepsilon \to 0$ で一様に $u(t,x)$ へ収束する。

<u>証明</u>．(3.4) と Ascoli-Arzela の定理より明らか。

証明終り．

<u>定義</u>　(3.1) の steady state solution とは (3.1) を満たして時間微分が 0 となるものでかつ非負になるものを言う．特に $S_\varepsilon(x)$ で non-tribial なものを表わす。

<u>Theorem 3.2</u>　$S_\varepsilon(x)$ は unstable な steady state solution であり，$u(t,x) \equiv 0$, $\frac{1}{\varepsilon}$ は asymptotically stable steady state solution である。つまり

$\frac{1}{\varepsilon} \geq u_0(x) > \lambda S_\varepsilon(x)$ $^{(\lambda>1)}$ ならば　$u_\varepsilon(t,x) \to 1/\varepsilon$　as $t \to \infty$

$0 \leq u_0(x) \leq \lambda S_\varepsilon(x)$ $(0<\lambda<1)$ ならば $u_\varepsilon(t, x) \to 0$ as $t \to \infty$

となる。

<u>証明</u> $u = \lambda S_\varepsilon$ λ: constant とすると

(3.6) $\Delta u + u^2 - \varepsilon u^3 = \lambda(\lambda-1)(1-\varepsilon(\lambda+1)S_\varepsilon)S_\varepsilon^2$ 。

ε: 十分小より $\lambda > 1$ ならば (3.6) の右辺は正，$0<\lambda<1$ ならば負となる。一方 $u \equiv \frac{1}{\varepsilon}$ は (3.1) を満たし、境界では $u > 0$ より $u \equiv \frac{1}{\varepsilon}$ は

(3.7) $\Delta u + u^2 - \varepsilon u^3 = 0$

(3.3) の upper solution である。同様にして $u \equiv 0$ は lower solution である。

$\lambda > 1$ のとき $u = \lambda S_\varepsilon$ は (3.7), (3.1) の lower solution となり，$\lambda S_\varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon}$ より $u \equiv \frac{1}{\varepsilon}$ は asymptotic stable solution となる。同様にして $0 < \lambda < 1$ のとき $u = \lambda S_\varepsilon$ は upper solution となり $\lambda S_\varepsilon > 0$ より $u \equiv 0$ は asymptotic stable solution となる. それ故 S_ε は unstable steady state solution である。以上により定理は証明された。(Sattinger [6])

<u>系</u>. $\varepsilon_1 < \varepsilon$ とし $S_{\varepsilon_1}(x) < \frac{1}{\varepsilon}$ ならば $u_{0\varepsilon}(x) = S_{\varepsilon_1}(x)$ とおけば $u_\varepsilon(t, x) \to \frac{1}{\varepsilon}$ as $t \to \infty$.

$\varepsilon_2 > \varepsilon$ とすれば $S_{\varepsilon_2}(x)$ から出発する (3.1) の解は $t \to \infty$ で 0 に decay する。

§4　t_0 の評価

この§では空間次元を1次元とする。(1.1).(1.2).(1.3) を一次元化した次の式を考える。

(4.1)　$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + u^2(t,x)$　　$(t,x) \in [0,T] \times [-1,1]$

(4.2)　$u(0,x) = u_0(x) \geq 0$　　$x \in [-1,1]$

(4.3)　$u(t,-1) = u(t,1) = 0$　。

$u_0(x)$ がある意味で大きければ解 $u(t,x)$ は有限時間で blow up する(Theorem 2.3)。ここで t_0 を $u_0(x)$ のみから評価するために (3.1) を1次元にした次の式を考える。

(4.4)　$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + u^2(t,x) - \varepsilon u^3(t,x)$　。

(4.4).(4.2).(4.3) の解 $u_\varepsilon(t,x)$ は Lemma 3.1 より

(4.5)　$u_\varepsilon(t,x) < u(t,x)$　　$(t,x) \in [0,t_0] \times [-1,1]$

但し $t_0 > t_b$ とし $t \in [t_b, t_0]$ に関しては $u(t,x) = \infty$ として不等式を成立させる。

<u>Lemma 4.1</u>　$v = \{M(1-x^2)^\alpha\}^{\zeta(t)}$ とおく

但し　$\zeta(t) = \gamma t_0 / (\gamma t_0 - t)$,　$\gamma = 1 - 2\log M / \log \varepsilon$

(4.6)　$\alpha \geq 3$　constant,

M, t_0 は次の条件 (4.7)～(4.10) を満足する定数とする。

(4.7)　$M > \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)^\alpha \cdot \alpha$

A, B を次のように定める。

$$(4.8)\qquad A=\gamma\frac{\alpha^2(\alpha-1)}{\alpha-2}\cdot\frac{2}{\log M\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)^\alpha}$$

$$(4.9)\qquad B=\frac{\gamma}{2}\left\{M\left(\frac{2\alpha-2}{2\alpha-1}\right)^\alpha-\left(\frac{2\alpha-1}{2\alpha-2}\right)^2\cdot2\alpha\right\}\cdot\frac{1-\varepsilon^{1-\frac{\gamma}{2}}}{\log M}$$

$$(4.10)\qquad \frac{1}{t_0}=\min(A,\ B)\qquad。$$

そうすれば v は次の関係を満足する。

$$(4.11)\qquad v_t<v_{xx}+v^2-\varepsilon v^3\qquad t\in[0.\ t_0]$$

<u>証明</u>. 最初に次のことを示す.

$$(4.12)\qquad C=\frac{\gamma}{2}M\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)^\alpha\cdot\frac{1-\varepsilon^{1-\frac{\gamma}{2}}}{\log M}$$

とおけば (4.10) より

$$(4.13)\qquad t_0>\frac{1}{C}$$

が成立つ。

v_t, v_{xx} を直接計算すれば

$$(4.14)\qquad v_t-v_{xx}-v^2+\varepsilon v^3$$

$$=\left\{\frac{\zeta^2}{\gamma t_0}\log M(1-x^2)^\alpha+\frac{2\alpha\zeta\{1-(2\alpha\zeta-1)x^2\}}{(1-x^2)^2}-v+\varepsilon v^3\right\}\cdot v\ .$$

となる。ここで

$$(4.15)\qquad \max_{\substack{t\in[0.\ t_0]\\ x\in[-1.\ 1]}}\varepsilon\cdot v=M^{\zeta(t_0)}=\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^\gamma=\varepsilon^{1-\frac{\gamma}{2}}$$

に注意すれば，Vを次のようにおいてその negativity を示せばよい。

(4.16) $$V=\frac{\zeta^2}{\gamma x_0}\log M(1-x^2)^\alpha+\frac{2\alpha\zeta\{1-(2\alpha\zeta-1)x^2\}}{(1-x^2)^2}-(1-\varepsilon^{1-\frac{\gamma}{2}})\cdot\{M(1-x^2)^\alpha\}^\zeta$$ 。

a) $1\geqq x^2\geqq 1-M^{-\frac{1}{\alpha}}$ の場合。

(4.7) より次の式が成立つ

(4.18) $$1-(2\alpha\zeta-1)x^2\leqq 1-(2\alpha\zeta-1)(1-M^{-\frac{1}{\alpha}})<0$$

x^2 の範囲より $\log M(1-x^2)^\alpha<0$ となる。故に $V<0$ 。

b) $(\alpha-1)^{-1}\leqq x^2\leqq 1-M^{-\frac{1}{\alpha}}$ の場合。

(4.7) より $1-M^{-\frac{1}{\alpha}}>(\alpha-1)^{-1}$ は成立つ。

(4.19) $$V\leqq\frac{\zeta^2}{\gamma x_0}\log M\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)^\alpha+\frac{2\alpha\zeta\{1-(2\alpha\zeta-1)\frac{1}{\alpha-1}\}}{\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)^2}$$

$$=2\zeta\left[\zeta\frac{1}{2\gamma x_0}\log M\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)^\alpha-\frac{2\alpha^2(\alpha-1)}{(\alpha-2)^2}\left\{\zeta+\frac{\alpha^2(\alpha-1)}{\alpha-2}\right\}\right]$$ 。

(4.10) より $\{\cdots\cdots\}$ は負であり，$\zeta\geqq 1$ に注意すれば $V<0$ がわかる。

c) $(2\alpha\zeta-1)^{-1}\leqq x^2\leqq(\alpha-1)^{-1}$ の場合。

$\eta=M(1-x^2)^\alpha$ とおくと $\log\eta>1$ となる。

(4.20) $$V_1=\frac{\zeta^2}{\gamma x_0}\log\eta-(1-\varepsilon^{1-\frac{\gamma}{2}})\eta^\zeta$$

とおくと $V\leqq V_1$ 。

(4.12) より $V_{1\zeta}\left(=\frac{\partial V_1}{\partial\zeta}\right)\leqq 0$, $V_{1\zeta\zeta}\leqq 0$ が示される。

再び (4.12) を用いて $V_1 < 0$ が示される。

d) $0 \leq x^2 \leq (2\alpha\xi - 1)^{-1}$ の場合.

(4.21) $$V_2 = \frac{2\xi^2}{\gamma t_0} \log \eta + \frac{2\alpha\xi}{\left(\frac{2\alpha-2}{2\alpha-1}\right)^2} - (1 - \varepsilon^{1-\frac{\gamma}{2}})\eta^{\xi}$$

とおくと $V \leq V_2$ となる。 c) と同様の方法を用いて (4.9), (4.10) より $V_2 < 0$ が示される。

a), b), c), d) の結果より Lemma 4.1 は証明された。

<u>Lemma 4.2</u> $\varphi = M(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{t_1}{t_1 - t}$ とおく。

但し M, t_1 は次の関係を満たす。

(4.22) $$t_1 = (M-2)^{-1}$$

そうすれば φ は次の関係を満たす。

(4.23) $$\varphi_t > \varphi_{xx} + \varphi^2$$

証明. φ_t, φ_{xx} を直接計算して評価すればよい。

<u>Theorem 4.1</u>

(4.2) における $u_0(x)$ が次の不等式を満足するとする。

(4.24) $$M(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \geq u_0(x) \geq M(1-x^2)^{\alpha} \quad x \in [-1, 1].$$

(4.1), (4.2), (4.3) の解 $u(t, x)$ の blow up 時間 t_b は次のように評価される。

(4.25) $$t_1 \leq t_b \leq t_0$$

証明. 簡単な比較定理を用いれば

(4.26) $$u_\varepsilon(t, x) \geq v(t, x) \qquad (t, x) \in [0, t_0] \times [-1, 1]$$

(4.27) $\quad \varphi(t,x) \geq u(t,x), \quad (t,x) \in [0, t_1) \times [-1, 1]$。

(4.5), (4.15), (4.24), (4.26) より (4.25) の後半を得る。

(4.24), (4.27) より (4.25) の前半を得る。証明終り.

系. 空間次元が3次元のときでも球対称ならば Theorem 4.1 と同様の結果が得られる。

§5 差分方程式

(4.1) の差分近似を求める場合 scheme の安定性や truncation error の評価は式の不安定性のため困難が多い。ここでは (4.1) を下から近似している安定な (4.4) を用いて差分法を考察する。考える空間は§4と同様に $[-1, 1]$ とし、それを $2n$ 等分して空間の mesh size を $h = \frac{1}{n}$ とする。time step を τ として、時間微分の所を前進差分、空間微分の所を中心差分におき変えた次の式を考える。

(5.1) $$D_t\, \omega(m\tau, nh) = D_+ D_-\, \omega(m\tau, nh) + \omega^2(m\tau, nh) - \varepsilon\, \omega^3(m\tau, nh)$$

(5.2) $$\omega(0, nh) = u_0(nh), \quad m \geq 0, \quad -1 \leq nh \leq 1.$$

ここで $\tau = \lambda h^2$ とおくと (5.1) は次のようになる。

(5.3) $$\omega((m+1)\tau, nh) = \lambda\, \omega(m\tau, (n+1)h) + (1-2\lambda) \cdot \times\, \omega(m\tau, nh) + \lambda\, \omega(m\tau, (n-1)h) + \tau\, \omega^2(m\tau, nh) - \varepsilon \tau\, \omega^3(m\tau, nh).$$

Lemma 5.1　$0<\lambda\le\frac{1}{3}$: fix．$\varepsilon>3\tau$ とする．

$0\le u_0(x)\le\frac{1}{\varepsilon}$　$x\in[-1,1]$ ならば全ての $m\ge 0$ に対して　$0\le\omega(m\tau,nh)\le\frac{1}{\varepsilon}$　$n\in[-\frac{1}{h},\frac{1}{h}]$ となる。

証明．帰納法で示す。

全ての n について $\omega(m\tau,nh)\le\frac{1}{\varepsilon}$ ならば $\omega((m+1)\tau,nh)\le\frac{1}{\varepsilon}$ を示す。(5.3) より

$$\omega((m+1)\tau,nh)\le\frac{2\lambda}{\varepsilon}+(1-2\lambda)\,\omega(m\tau,nh)+\frac{\tau}{\varepsilon}\,\omega^2(m\tau,nh)\,(1-\varepsilon\,\omega(m\tau,nh))\tag{5.4}$$

となり．条件より (5.4) の右辺の最大値は $\frac{1}{\varepsilon}$ である。(5.4) は $m=0$ から順次成立つから Lemma 5.1 は示された。

Theorem 5.1　$0<\lambda\le\frac{1}{3}$: fix．$3\varepsilon<\tau$，$0\le u_0(x)\le\frac{1}{\varepsilon}$ ならば $u_\varepsilon(m\tau,nh)$ と $\omega(m\tau,nh)$ との差は $O(\tau)$ である。

証明．$W(m\tau,nh)=u_\varepsilon(m\tau,nh)-\omega(m\tau,nh)$ とおく。

$$\begin{aligned}W((m+1)\tau,nh)={}&\lambda\,W(m\tau,(n+1)h)+(1-2\lambda)W(m\tau,nh)\\&+\lambda W(m\tau,(n-1)h)+\tau\{u_\varepsilon(m\tau,nh)+\omega(m\tau,nh)\}W(m\tau,nh)\\&-\varepsilon\tau\{u_\varepsilon^2(m\tau,nh)+u_\varepsilon(m\tau,nh)\omega(m\tau,nh)+\omega^2(m\tau,nh)\}\\&\cdot W(m\tau,nh)+O(h^4)\end{aligned}\tag{5.5}$$

となる．ここで次のような $Z(m\tau,nh)$ を考える。

$$\begin{aligned}Z((m+1)\tau,nh)={}&\lambda Z(m\tau,(n+1)h)+(1-2\lambda)\\&\times Z(m\tau,nh)+\lambda Z(m\tau,(n-1)h)+\frac{3\tau}{\varepsilon}Z(m\tau,nh)+Ch^4\end{aligned}\tag{5.6}$$

(5.7) $z(0, nk) = 0$

c：正の定数

$\{u_\varepsilon + \omega\}w - \varepsilon\{u_\varepsilon^2 + u_\varepsilon\omega + \omega^2\}w \leq \frac{2}{3}|\omega|$ より

(5.8) $w(m\tau, nk) \leq z(m\tau, nk)$ 。

(5.6) で定義された $z(m\tau, nk)$ は次の式を満たす。

(5.9) $$z(m\tau, nk) = \sum_{j=1}^{m} {}_mC_j \left(\frac{3\tau}{\varepsilon}\right)^{j-1} c k^4$$

これは帰納法でもって簡単に示される．故に $z(m\tau, nk)$ は次のように書き換られる。

(5.10) $$z(m\tau, nk) = \left(1+\frac{3\tau}{\varepsilon}\right)^m \frac{\varepsilon}{3\tau} c\lambda^2\tau^2$$

$$= \left(1+\frac{3\tau}{\varepsilon}\right)^m \frac{\varepsilon}{3} c\lambda^2\tau$$

Q.E.D.

References

[1] M.Tsutsumi, On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space, Mathematica Japonica, Vol. 17, No. 2,(1972)

[2] I.Segal, Nonlinear semigroups, Anals. of Math, Vol. 7, No. 2, (1968)

[3] T.Kato, Nonlinear equations in Banach spaces, Proc. Appl. Math., 17 (1965)

[4] T.Nakagawa, Blowing up of a finite difference solution to $u_t=u_{xx}+u^2$, preprint.

[5] J.L.Lions, Quelques Methodes de Resolution des Problems aux Limites Non Lineaires, Dunod, Paris, (1969).

[6] D.H.Sattinger, Topics in stability and bifurcation theory, Springer-Verlag, 1973.