数理解析研究所講究録
264巻 1976年 85-102

爆発型半線型熱方程式の数値解析

電力中研　中川友康
電通大・情報数理　牛島照夫

1. はじめに

$\Omega \subset R^n$ を有界な開集合，その境界 Γ を滑らかとする。次の問題を考える。

$$(E)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u) & x \in \Omega \\ u(t,x) = 0 & x \in \Gamma \end{cases} \quad t>0$$
$$u(0,x) = a(x) \in C_0(\bar{\Omega}), \quad x \in \Omega.$$

この解 $u(t,x)$ は，$f(u)$ と $a(x)$ に関する適当な条件のもとに有限時間で無限大になることが Kaplan [6]，Fujita [4]，Ito [5]，Tsutsumi [9, 10] 等により知られている。

ここでは以下に定義する二種類の「爆発」解についての近似問題をあつかう。近似の方法は有限要素法による，([8]。)

定義 1 (Kaplan-Fujita の意味の爆発).

λ を Dirichlet 条件の下での $-\Delta$ の最小固有値，$\phi(x) \underbrace{>0}_{(x\in\Omega)}$ を

対応する固有関数とする。$\int_\Omega \phi(x)\,dx = 1$ と正規化しておく。 $J(t) = (u(t,x), \phi(x))_{L^2(\Omega)}$ を考える。

$u(t,x) \in C([0,T), C_0(\bar\Omega))$, $T<+\infty$, が(E)をみたす古典解で

$\lim_{t\uparrow T} J(t) = \infty$ のとき $u(t,x)$ は J 爆発するといい，T を J-爆発の爆発時刻という。

定義 1′（Tsutsumi の意味の爆発）

$u(t,x) \in C([0,T), C_0(\bar\Omega))$, $T<+\infty$, が(E)をみたす古典解で

$\lim_{t\uparrow T} \|u\|_{L^2(\Omega)}(t) = \infty$ のとき $u(t,x)$ は L^2 爆発するといい，T を L^2-爆発の爆発時刻という。

$f(u)$ を

$$
(1)\begin{cases} \circ\ f(u) \geq 0 \text{ および } f''(u) \geq 0, \text{ 任意の } u \in R^1 \text{ に対して。} \\ \circ\ \text{ある正数 } C, \gamma \text{ が存在して} \\ \quad f(u) \geq Cu^{1+\gamma}, \quad u \to \infty \text{ のとき。} \end{cases}
$$

とする。

J^1 を $-\lambda J + f(J) = 0$ の最大正根とする。　正根をもたぬ場合は $J^1 = 0$ にとる。　次がなりたつ。

命題 1（J 爆発の必要十分条件）

$f(u)$ は (1) をみたすとする。(E)の古典解 $u(t,x)$ が J 爆発するのはある時刻 $t_0 \geq 0$ が存在して

(2) $$J(t_0) > J^1$$

のときかつそのときにかぎる。

J爆発の時刻Tは

(3) $$T \leqq t_0 + \int_{J(t_0)}^{\infty} \frac{dJ}{-\lambda J + f(J)}$$

により評価される。

証明) (2)の必要は明らか。十分は，Jensenの不等式を用いて常微分不等式

(4) $$\frac{d}{dt}J(t) \geqq -\lambda J(t) + f(J(t)) \qquad t \in [0, T)$$

を導けばよい。 また(3)は(4)からの帰結である。(証明終り)

$f(u)$を，$u \geqq 0$に対して

(5) $$\begin{cases} f(u) \geqq 0, \quad f'(u) \geqq 0 \\ u f(u) - 2\int_0^u f(u)\,du \geqq C u^{2+\gamma} \quad ({}^{\exists}C>0,\ {}^{\exists}\gamma>0) \end{cases}$$

とする。

$I(t) \equiv -\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\int_0^u f(u)\,du,\ 1\right)_{L^2(\Omega)}$ を定義する。

<u>命題1'</u> (L^2爆発の必要十分条件)

$f(u)$は(5)をみたすものとし，$a(x) \geqq 0$とする。(E)の古典解$u(t,x)$がL^2爆発するのはある時刻$t_0 \geqq 0$が存在して

(6) $\qquad I(t_0) > 0$

のときかつそのときにかぎる。

L^2爆発の時刻 T は

(7) $\qquad T \leqq t_0 + \frac{1}{C\gamma}(mes(\Omega))^{\frac{\gamma}{2}}(\|u\|(t_0))^{-\gamma}$

により評価される。

証明) (E) から次が導ける。

(8) $\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 = -\|\nabla u\|^2 + (uf(u), 1) \\ \|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2 = \frac{d}{dt}I(t) . \end{cases}$

$u(t,x) = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}dt + u(0,x)$ だから

$$\|u\|^2(t) \leqq 2\int_0^t dt \cdot \int_0^t \|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2 dt + 2\|u\|^2(0)$$
$$= 2\left(\int_0^t dt\right)(I(t) - I(0)) + 2\|u\|^2(0) .$$

これにより (6) の必要が出る。

十分は, $I(t) > 0$, $t \geqq t_0$ がなりたつことに注意して

(9) $\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geqq C(u^{2+\gamma}, 1)$

$$\geqq C(mes(\Omega))^{-\frac{\gamma}{2}}\|u\|^{2+\gamma}_{L^2(\Omega)} \quad (\text{Hölder の不等式})$$

$$(t \geqq t_0)$$

によって示される。

(7) は (9) からの帰結である。

2. 有限要素法のための空間の近似

$\{\Omega_h \,;\, h>0\}$ を次の条件をみたす開多面体領域の族とする。

$$
(H1)\quad \begin{cases} \Omega_h \subset \Omega \\ \Omega_h \supset \Omega_{h'} \quad \text{if} \quad h \leqq h' \\ \max\limits_{x \in \Gamma_h} \operatorname{dist}(x, \Gamma) \to 0 \quad \text{as} \quad h \to 0. \end{cases}
$$

ここに Γ_h は Ω_h の境界とする。

<u>定義 2</u> (三角形分割)

集合 $\mathcal{S}_h = \{S^{(k)}\}$ が開多面体領域 Ω_h の三角形分割であるとは,

(i) $S^{(k)}$, $k=1, 2, \cdots$, は非退化の閉 n-単体で, その総数が有限,

(ii) $\overline{\Omega}_h = \bigcup\limits_{S^{(k)} \in \mathcal{S}_h} S^{(k)}$

(iii) $S^{(k)}$ の面は他の n 単体 $\in \mathcal{S}_h$ の面であるか Ω_h の境界の一部

なることをいう。∎

以下簡単のために添字 (k) をはぶく。 S の頂点を $b_0, \cdots, b_n$ とし, 点 $x \in S$ の重心座標を $(\lambda_0(x), \cdots, \lambda_n(x))$ とする。頂点 b_0 に S の部分領域 $B_{b_0(S)}$ を

$$
B_{b_0(S)} = \{x \,;\, 1 \geqq \lambda_0(x) / (\lambda_0(x) + \lambda_i(x)) > 1/2,\ i \leqq 1 \leqq n\}
$$

を対応させる。

ここで, $\mathcal{S}_h$ のすべての S の頂点を次によって番号づけな

おす:

$$\begin{cases} \Omega_h \text{の内部の頂点に対して；} j=1,\cdots,N \\ \Gamma_h \text{上の頂点を } j=N+1,\cdots,M. \end{cases}$$

頂点 j の「集中質量領域」B_j を $B_j = \bigcup_S B_{b_j(S)}$

によって定める。ここに $\bigcup_S$ は頂点 j をもつすべての n-単体にわたる和をあらわすものとする。

頂点 j ($j=1,\cdots,N$) に関して2種の関数 $\bar{w}_j(x)$ と $\hat{w}_j(x)$ を次によって定める。

$$\begin{cases} \bar{w}_j(x) = B_j \text{の特性関数} \\ \hat{w}_j(x) = \text{各} S \text{上で線型にして } \hat{w}_j(b_k) = \delta_{jk},\ k=1,\cdots,N+M. \end{cases}$$

$\bar{w}_j(x)$ の線型結合を元とする集合を $\bar{V}_h$, $\hat{w}_j(x)$ の線型結合を元とする集合を $\hat{V}_h$ とする。すなわち

$$\begin{cases} \bar{V}_h = \{\bar{u}_h;\ \bar{u}_h = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \bar{w}_j\}, & \alpha_j : \text{実数} \\ \hat{V}_h = \{\hat{u}_h;\ \hat{u}_h = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j' \hat{w}_j\}, & \alpha_j' : \text{実数}. \end{cases}$$

$\alpha_j = \alpha_j'$, $j=1,\cdots,N$, なる $\bar{u}_h \in \bar{V}_h$ と $\hat{u}_h \in \hat{V}_h$ は互いに associate であるといい，その対応を

$$\begin{cases} K_h : \bar{u}_h \to \hat{u}_h \\ K_h^{-1} : \hat{u}_h \to \bar{u}_h \end{cases}$$

であらわす。

次の3つのバーナハ空間を導入する。

X : $C_0(\bar{\Omega})$ に最大値ノルムを入れた空間

$\hat{X}_h$: $\hat{V}_h$ に最大値ノルムを入れた空間

X_h : $\bar{V}_h$ 〃 。

なお $\hat{X}_h$ と X_h の各元は $\Omega - \Omega_h$ で値0をとるように Ω 全体へ拡張しておく。

作用素 $\tilde{P}_h$ を $(\tilde{P}_h u)(x) \equiv \sum_{j=1}^{N} u(x_j)\,\hat{w}_j(x)$, $\forall u \in X$, によって定めれば、写像 $P_h = K_h^{-1}\tilde{P}_h : X \to X_h$ は X から X_h 上への射影である。

3. 近似方程式

空間 X_h での 作用素 A_h を

$$(A_h u_h , v_h)_{L^2(\Omega_h)} = - (\nabla \hat{u}_h , \nabla \hat{v}_h)_{L^2(\Omega_h)}$$

$$\text{for } \forall u_h \in X_h ,\ \forall v_h \in X_h$$

$$\hat{u}_h = K_h u_h ,\quad \hat{v}_h = K_h v_h$$

にて定義する。 また X_h での非線型写像 f_h を

$$f_h(u_h) = \sum_{j=1}^{N} f(\alpha_j)\,\bar{w}_j \quad \text{for } u_h = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \bar{w}_j$$

にて定義する。

(E) の weak form から

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t} , \varphi_h \right)_{L^2(\Omega_h)} = - (\nabla \hat{u}_h , \nabla \hat{\varphi}_h)_{L^2(\Omega_h)} + (f_h , \varphi_h)_{L^2(\Omega_h)}$$

$$\forall \hat{\varphi}_h \in \hat{X}_h ,\quad \varphi_h = K_h^{-1} \hat{\varphi}_h$$

が考えられる。 これから我々は2つの近似方程式をつくる。

(半離散近似)

$$(E_h)\begin{cases}\dfrac{\partial u_h}{\partial t} = A_h u_h + f_h \\ u_h(0) = P_h a.\end{cases}$$

(離散近似)

$\tau=(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \cdots)$, $\tau_n>0$ $n=0,1,2,\cdots$, なる順序づき集合

τ を時間メッシュベクトルと名付け, これをもとに,

$$(E_h^\tau)\left\{\begin{array}{l} t_{n+1} = t_n + \tau_n,\ t_0=0,\quad \tau_n>0 \\ u_h(t) = u_h(t_n),\quad t_n \leqq t < t_{n+1} \\ \dfrac{u_h(t_{n+1}) - u_h(t_n)}{\tau_n} = A_h u_h(t_n) + f(u_h(t_n)) \\ u_h(0) = a_h,\quad a_h = P_h a. \end{array}\right\} n=0,1,2,\cdots$$

半離散近似解ならびに離散近似解の爆発と爆発時刻を定義1に準じて定義する。 爆発時刻に共通の記号 T_h をつかう。

4. 爆発解のアルゴリズムと残存時間の評価

時間メッシュベクトル τ のきめ方をのべる。 J爆発を追う方法(これを Kaplan-Fujita 流, 略して K-F 流)と

L^2爆発を追う方法（これをTsutsumi流，T流）の二通りを示す。

次の量 τ_ε を定義する。

$$(10) \qquad \tau_\varepsilon = \min_{1 \leqq j \leqq N} \left(\| \bar{w}_j \|^2 / \| \nabla \hat{w}_j \|^2 \right).$$

$\boxed{\text{K－F流}}$

$-A_\varepsilon \psi_\varepsilon = \mu \psi_\varepsilon$，$\psi_\varepsilon \in X_\varepsilon$，の最小固有値を λ_ε，対応する固有関数を φ_ε とし，$\varphi_\varepsilon \geqq 0$，$\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_\varepsilon \, dx = 1$ に正規化しておく。

$J_\varepsilon(t) = (u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ を定義する。また $-\lambda_\varepsilon J + f(J) = 0$ の最大正根を J_ε^1 と書く。正根がないときは $J_\varepsilon^1 = 0$ と定める。

$\tau \leqq \tau_\varepsilon$ なる任意の τ $(\tau > 0)$ をきめて固定する。

$$(11) \quad \left\| \begin{array}{l} \tau_0 = \tau \\[2ex] \tau_n = \begin{cases} \tau, & J_\varepsilon(t_{n-1}) < J_\varepsilon^1 \text{ のとき} \\[2ex] \min\left\{ \tau, \dfrac{J_\varepsilon(t_n) - J_\varepsilon(t_{n-1})}{-\lambda_\varepsilon J_\varepsilon(t_n) + f(J_\varepsilon(t_n))} \right\}, & J_\varepsilon(t_{n-1}) \geqq J_\varepsilon^1 \text{ のとき} \end{cases} \\[2ex] \qquad\qquad (n = 1, 2, 3, \cdots.) \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{T流}}$

$\tau \leqq \tau_\varepsilon$ なる任意の τ $(\tau > 0)$ をきめて固定する。

別に $\alpha > 0$ なる任意の定数をきめて固定する。

$$(12)\quad \tau_n = \tau \times \min\left\{ 1, \frac{\alpha}{\left[\|u_{\mathfrak{h}}\|_{L^2(\Omega_{\mathfrak{h}})}(t_n)\right]^{\gamma}} \right\}$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots。$$

離散近似解の残存時間について，命題 1，1′ に類似な次の評価がなりたつ。

命題 2.

（K−F 流のコントロールの下での残存時間）

ある時刻 t_m で $J_{\mathfrak{h}}(t_m) > J_{\mathfrak{h}}^1$ になると

$$(13)\quad T_{\mathfrak{h}} \leqq t_m + \tau_m + \int_{J_{\mathfrak{h}}(t_m)}^{\infty} \frac{dJ}{-\lambda_{\mathfrak{h}} J + f(J)}。$$

（T 流のコントロールの下での残存時間）

$I_{\mathfrak{h}}(t) \equiv -\frac{1}{2}\|\nabla \hat{u}_{\mathfrak{h}}\|^2_{L^2(\Omega_{\mathfrak{h}})} + \left(\int_0^u f(u)\,du \Big|_{u=u_{\mathfrak{h}}}, 1 \right)_{L^2(\Omega_{\mathfrak{h}})}$ を定義する。

ある時刻 t_m で $I_{\mathfrak{h}}(t_m) > 0$ になると．

$$(14)\quad T_{\mathfrak{h}} \leqq t_m + \frac{1}{C\gamma}\left(\mathrm{mes}(\Omega_{\mathfrak{h}})\right)^{\frac{\gamma}{2}}\left(1 + O(\tau_{\mathfrak{h}})\right)\left[\|u_{\mathfrak{h}}\|_{L^2(\Omega_{\mathfrak{h}})}(t_m)\right]^{-\gamma}。$$

証明） 命題 1，1′ に準じる。

5. 爆発時刻の収束

半離散近似解のJ爆発の時刻 T_h に対して次の定理がなりたつ。

定理1.

次の二条件を仮定する。

(i) $h \to 0$ のとき $\lambda_h \to \lambda$, かつ $\varphi_h \to \varphi$ in $L^2(\Omega)$.

(ii) $u(t)$ が T でJ爆発するとせよ。任意に固定した $T' < T$ に対してある h' が存在して，すべての $h < h'$ について $0 \leqq t \leqq T'$ で $u_h(t)$ が存在して

$$\max_{0 \leqq t \leqq T'} \| u_h(t) - u(t) \|_{L^2(\Omega)} \to 0, \ (h \to 0)。$$

すると，$\displaystyle\lim_{h \to 0} T_h = T.$

証明） $T' < T$ を任意に固定する。(ii) により

(15) $\displaystyle\lim_{h \to 0} J_h(t) = J(t)$, $t \in [0, T']$ で一様。

このことより $T' \leqq \displaystyle\liminf_{h \to 0} T_h$. T' は T にいくらでも近くとれるから

(15) $T \leqq \displaystyle\liminf_{h \to 0} T_h$.

次に，$T'' = \displaystyle\limsup_{h \to 0} T_h > T$ と仮定しよう。$J' \geqq J_h^1$ と $h_0 > 0$ なる J' と h_0 が存在して

$$\int_{J'}^{\infty} \frac{dJ}{-\lambda_h J + f(J)} \leqq \frac{T'' - T}{2}, \quad \forall h \leqq h_0.$$

ところが（15）より，$J_h(t') > J'$ $\forall h \leqq h_0$ なる時刻 $t' < T$ がとれる。残存時間の評価式から

$$T_h - t' \leqq \int_{J_h(t')}^{\infty} \frac{dJ}{-\lambda_h J + f(J)} \leqq \int_{J'}^{\infty} \text{〃} \leqq \frac{T'' - T}{2}$$

よって $T_h \leqq \dfrac{T'' - T}{2} + t' \leqq \dfrac{T'' - T}{2} + T$

$$\leqq T'' - \frac{T'' - T}{2} < T'' = \limsup_{h \to 0} T_h.$$

これは矛盾，したがって

(16) $\quad T'' = \limsup_{h \to 0} \leqq T$。

(15)，(16) より定理1を得る。

半離散近似の L^2 爆発，離散近似の J 爆発と L^2 爆発についても同様の定理がなりたつ。ただし離散近似の場合は，時間メッシュベクトル τ につき，$\|\tau\|_\infty \equiv \sup\{\tau_i, \tau_i \in \tau\} \leqq \tau_h$ を課し，定理1の条件（ii）に相当するものとして，

$$\max_{0 \leqq t \leqq T'} \| u_h(t) - u(t) \|_{L^2(\Omega)} \to 0, \quad h \to 0$$

がそのような τ で $\|\tau\|_1 \equiv \sum_{\tau_i \in \tau} \tau_i > T'$ なるすべての τ に対して一様になりたつことを要請しておく。

6. 近似解の収束

$\{\Omega_h\}$ の三角形分割 $\{\mathcal{S}_h\}$ に次の条件を仮定する:

$$
\text{(H2)}
\begin{cases}
\text{(i)} \; (\nabla \hat{w}_i, \nabla \hat{w}_j) \leqq 0, \quad i \neq j, \; 1 \leqq i \leqq N, \; 1 \leqq j \leqq N+M \\
\text{(ii)} \; \max_{S \in \mathcal{S}_h} h(S) = h \\
\text{(iii)} \; \inf_{h} \min_{S \in \mathcal{S}_h} \rho(S)/h(S) = \mu > 0
\end{cases}
$$

ここに $h(S)$ は S の外接球の直径, $\rho(S)$ は S に含まれる最大球の直径。

解 $u(t)$ が一意な古典解になるという前提で (E) の半線型項 $f(u)$ は次の条件をみたす $f(u,t,x)$ におきかえてよい。

(H3)

(i) $f(u,t,x)$ は $(u,t,x) \in (-\infty,\infty) \times [0,T_1] \times \bar{\Omega}$ で連続

(ii) 任意の $V>0$ に対して定数 $C_V>0$ が存在して,

$$\max_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ 0 \leqq t \leqq T_1}} |f(u,t,x) - f(v,t,x)| \leqq C_V |u-v|, \quad {}^\forall |u| \leqq V, \; {}^\forall |v| \leqq V.$$

(iii) 別の局所 Lipschitz 連続, 単調非減少関数 $F(u)$, $u \geqq 0$, が存在して

$$\max_{|v| \leqq u} \max_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ 0 \leqq t \leqq T_1}} |f(v,t,x)| \leqq F(u), \quad {}^\forall u \geqq 0.$$

ここに区間 $[0, T_1]$ は解 $u(t)$ を考察する時間区間を含む適当な区間とする。

半離散近似解 $u_h(t)$ につき次がなりたつ。

定理 2.

半線型項を (H3) とする (E) が $[0, T)$ で一意な古典解をもつとせよ。対応する半離散近似問題 (E_h) を $u_h(t)$ とする。仮定 (H1), (H2) の下で、任意に固定した $T' < T$ に対して

$$\max_{0 \leq t \leq T'} \| u_h(t) - P_h u(t) \|_{X_h} \to 0, \quad h \to 0.$$

証明のために次を準備する。

$u_h(t)$, $u(t)$ をそれぞれ

$$(17) \begin{cases} u_h(t) = e^{tA_h} a_h + \int_0^t e^{(t-s)A_h} f_h(s)\, ds, & t > 0 \\ u(t) = e^{tA} a + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds, & t > 0 \end{cases}$$

と書きかえておく。ここに A は Dirichlet 条件下での熱方程式に対応する半群 e^{tA} in $X = C_0(\bar{\Omega})$ の生成作用素である。

次の事実がなりたつ。

補題 1. 条件 H2 の下で $\| e^{tA_h} \|_{L(X_h)} \leq 1$.

補題 2. 条件 H1, H2 の下で

$$\| e^{(t-s)A_h} P_h u - P_h e^{(t-s)A} u \|_{X_h} \to 0 \quad (\forall u \in X)$$

$$\text{unif. in } 0 \leqq s \leqq t \leqq T' \quad \text{as } h \to 0.$$

この事実を，$e^{(t-s)A_h}$ は $e^{(t-s)A}$ に「K収束する」という。証明は［11］。

補題3. H2, H3 を仮定する。$\exists h_1 > 0$, $\exists \overline{v}_0 > 0$ に対して

$$\max_{0 \leqq t \leqq t_0} \| u_h(t) \|_{X_h} \leqq \overline{v}_0, \quad \forall h \leqq h_1$$

がなりたつとせよ。すると $u_h(t)$ は少くとも $[t_0, t_0+\overline{l})$ まで延長できる。任意に小さい正数 ε を固定するとある K_ε がとれて

$$\| u_h(t) \|_{X_h} \leqq K_\varepsilon, \quad 0 \leqq t \leqq t_0 + \overline{l} - \varepsilon$$

がすべての $h \leqq h_1$ に対してなりたつ。ここに

$$\overline{l} = G(\overline{v}_0) \equiv \int_{\overline{v}_0}^{\infty} \frac{dv}{F(v)}.$$

証明） 不等式 $\| u_h(t) \|_{X_h} \leqq \| u_h(t_0) \|_{X_h} + \int_0^t F(\| u_h(s) \|_{X_h})\, ds$ から出る。

補題4. H1, H2, H3 を仮定する。$\exists M > 0$, $\exists h_1 > 0$ に対して

$$\max_{0 \leqq t \leqq t_0} \| u_h(t) \|_{X_h} \leqq M, \quad \forall h \leqq h_1$$

ならば

$$\max_{0 \leqq t \leqq t_0} \| u_h(t) - P_h u(t) \|_{X_h} \to 0 \quad \text{as } h \to 0$$

が従がう。

証明） (17) から，$^{\exists}C>0$ がとれて，

$$\| u_\varepsilon(t) - P_\varepsilon u(t) \|_{X_\varepsilon} \leqq \gamma + C\int_0^t \| u_\varepsilon(s) - P_\varepsilon u(s) \|_{X_\varepsilon} ds \qquad 0 \leqq t \leqq t_1$$

ここに
$$\gamma \equiv \| e^{tA_\varepsilon} P_\varepsilon a - P_\varepsilon e^{tA} a \|_{X_\varepsilon} + \int_0^t \| e^{(t-s)A_\varepsilon} P_\varepsilon f - P_\varepsilon e^{(t-s)A} f \|_{X_\varepsilon} ds$$
を得る。

補題2のK収束より $\gamma \to 0$ as $\varepsilon \to 0$. よって本補題を得る。

定理2の証明） $T_0 = \max_{0\le t\le T'} \| u \|_{X_\varepsilon}(t) + \delta$ （δ は適当な正数）とおき，区間 $[0, T']$ を $l < G(T_0)$ なる適当な正数 l で等分割する。明らかに $\| a_\varepsilon \|_{X_\varepsilon} < T_0$ だから補題3により才1の区間 $[0, l]$ で $\| u_\varepsilon(t) \|_{X_\varepsilon}$ は ε に無関係に有界，したがって補題4により収束する。このことより $\varepsilon_1 > 0$ が存在して $\max_{0\le t\le l} \| u_\varepsilon \|_{X_\varepsilon} \le T_0$, $\forall \varepsilon < \varepsilon_1$。したがって $\| u_\varepsilon \|_{X_\varepsilon}$ は補題3により区間 $[0, 2l]$ で有界であることが $\forall \varepsilon < \varepsilon_1$ についてなりたつ。したがって補題4により $[0, 2l]$ での収束がいえる。以下同様の議論をくりかえして，結局 $[0, T']$ での収束が示される。（証明終り）

離散近似解 $u_h(t)$ についても，これを

$$u_h(t) = U_h(t)\, a_h + \int_0^t \tilde{U}_h(t,s)\, f_h(s)\, ds$$

に表現すると，前述と同じ論法がつかえる。ここに $U_h(t)$，$\hat{U}_h(t,s)$ はそれぞれ e^{tA_h}，$e^{(t-s)A_h}$ を t 方向に近似した近似作用素である。 $U_h(t)$ と $\hat{U}_h(t,s)$ につき補題1，2に相当する事実が必要であるが，そのために時間メッシュベクトルにつき条件

$$\|\pi\|_\infty \equiv \sup\{\tau_i, \tau_i \in \pi\} \leqq \tau_h$$

が課される。

References

[1] Ciarlet, P. G. and P. A. Raviart, Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, Computer methods in applied mechanics and engineering, 2, 17-31 (1973).

[2] Fujii, H., Some remarks on finite element analysis of time-dependent field problems, Theory and practice in finite element structural analysis, (Tokyo Univ. Press, Tokyo, 1973).

[3] Fujita, H., On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci Univ. Tokyo, 13, 109-124 (1966).

[4] Fujita, H., On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations, Proc. Symposium in Pure Math., AMS, 18, 105-113 (1970).

[5] Ito, S., On the blowing up of solutions for semi-linear parabolic equations (in Japanese), Sugaku, 18, 44-47 (1966).

[6] Kaplan, S., On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 16, 305-330 (1963).

[7] Nakagawa, T., Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$, 1974-annual report of the trial research in large scale computation supported by Japanese Ministry of Education, 47-58 (1975).

[8] Nakagawa, T. and T. Ushijima, Numerical analysis of the semi-linear heat equation of blow-up type, (pre-print).

[9] Tsutsumi, M., Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 8, 211-229 (1972).

[10] Tsutsumi, M., Existence and nonexistence of global solutions of the first boundary value problem for a certain quasilinear parabolic equation, Funkcialaj Ekvacioj, 17, 13-24 (1974).

[11] Ushijima, T., On the finite element approximation of semi-linear parabolic equations, (pre-print).