数理解析研究所講究録
264巻 1976年 22-52

対称ポテンシャル流の非安定性について

名古屋大学 教養部数学教室
竹下 彬

[I] Summary

3次元ユークリッド空間に於ける同心球面間の領域に於ける定常Navier-Stokes方程式の解 $X^{(\alpha)}=\alpha\,\mathrm{grad}\left(\frac{-1}{r}\right)$, $p^{(\alpha)}=-\frac{1}{2}\rho\alpha^2 r^{-4}$ の安定性を調べる。充分大きなすべての $|\alpha|$ に対して此の解は不安定で、かつ $\lim_{|\alpha|\to\infty}$ (dimension of instability subspace of $X^{(\alpha)}$) $=\infty$ である事を示す。

[II]. 3次元Navier-Stokes方程式及びそれに関する結果。

§II-1 Navier-Stokes方程式

E_3 を3次元ユークリッド空間, (x_1, x_2, x_3) をそのデカルト座標系とする。$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ で夫々 x_1, x_2, x_3 軸に平行で各点に於ける長さが1の E_3 に於けるベクトル場を表わすものとする。Ω を E_3 の有界領域でその境界 $\partial\Omega$ は C^∞-級であるとする。$\mathfrak{X}(\Omega)$ で Ω 上のベクトル場全体を表わす。

Ω に於けるNavier-Stokes方程式は次の様に表わされる。先ず非定常方程式は、$X = X(x, t)$; $(x \in \Omega,\ t > 0)$ として

$$
(\mathrm{NSE})\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial X}{\partial t} = \nu\Delta X - \nabla_X X - \dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \mathbf{f}(x,t), & \text{in } \Omega,\ t>0 \\
\mathrm{div}\,X = 0 \\
X(x,0) = \mathbf{a}(x) \\
X(x,t)\Big|_{x\in\partial\Omega} = \mathbf{b}(x,t)
\end{cases}
$$

又、定常方程式は $X = X(x)$ $(x \in \Omega)$ として

$$
(\mathrm{SE}) \quad \begin{cases} \nu \Delta X - \nabla_X X - \mathrm{grad}\, p + f(x) & \text{in } \Omega. \\ \mathrm{div}\, X = 0 \\ X \big|_{\partial\Omega} = b(x) \end{cases}
$$

で表わされる。但し，未知関数はベクトル場 X，及び実数値関数 $p(x,t)$（圧力）で，外力 $f(x,t)$，初期値ベクトル場 $a(x)$ 及び境界値 $b(x,t)$，$b(x)$ は既知項である。又 $X = \sum_{i=1}^{3} X_i e_i$ とするとき

$$
\frac{\partial X}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial t} e_i \,,\quad \Delta X = \sum_{i=1}^{3} \Delta X_i\, e_i = \sum_{i=1}^{3} \Big(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j^2} \Big) e_i \,,
$$

$$
\nabla_X X = \sum_{i=1}^{3} \Big(\sum_{j=1}^{3} X_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \Big) e_i \quad \Big(= (X \cdot \nabla) X \text{ と表わすことにする} \Big)
$$

である。ν, ρ は正の定数である。

既知項に対する適合条件としては $\mathrm{div}\, X = 0$ より $\mathrm{div}\, a = 0$，及び Gauss-Stokes の公式より直ちに従う

$$
\int_{\partial\Omega} b(x) \cdot n(x)\, dS = 0
$$

が課せられる。但し，$n(x)$ は $\partial\Omega$ の unit exterior normal，dS は $\partial\Omega$ の面積要素とする。

（注1）尚，後に問題の複素化を考える迄は全ての量は実数の範囲で考える。即ち，実数値関数，実ベクトル場等々…。

(注2) 記号に関する約束としてベクトル量に関する記号は以後全て肉太文字で表わす事にする。 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \ldots, \mathbf{L}^2, \mathbf{H}^1$, 等。

§II-2. 幾つかの函数空間及び作用素。

$\mathbf{C}_\sigma^{0,\infty} \equiv \mathbf{C}_\sigma^{0,\infty}(\Omega)$ で C^∞-級のベクトル場 $\boldsymbol{\varphi}(x) \in \mathfrak{X}(\Omega)$ で $supp(\boldsymbol{\varphi})$ が G で compact かつ $div\, \boldsymbol{\varphi} \equiv 0$ となるものの全体を表わす。 $\mathbf{L}^2 \equiv \mathbf{L}^2(\Omega)$ で可測なベクトル場 $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{3} X_i \mathbf{e}_i \in \mathfrak{X}(\Omega)$ で $\|\mathbf{X}\|^2 \equiv \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} X_i(x)^2 dx < \infty$ となるものの全体よりなる Hilbert space を表わす。 その内積を (,) で表わす。

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega X_i(x) Y_i(x)\, dx.$$

$\mathbf{C}_\sigma^{0,\infty} \subset \mathbf{L}^2$ であるが $\mathbf{L}^2$ のノルムに関する $\mathbf{C}_\sigma^{0,\infty}$ の closure を $\mathbf{L}_\sigma^2 \equiv \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ で表わし，その $\mathbf{L}^2$ に於ける直交補空間を $\mathbf{L}_\pi^2 \equiv \mathbf{L}_\pi^2(\Omega)$ で表わす。 この時次の補題が成り立つ。

補題 1

(1) $\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ が $\mathbf{X} \in \mathbf{L}_\sigma^2$ である為の必要かつ十分条件は

$div\, \mathbf{X} = 0$ in Ω (distribution sense)

及び $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ の意味で normal component of $\mathbf{X}|_{\partial\Omega} \equiv 0$ on $\partial\Omega$ である。

(2) $\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ が $\mathbf{X} \in \mathbf{L}_\pi^2$ である為の必要かつ十分条件は

scalar function $p = p(x)$ で，$p \in L^2_{loc}(\Omega)$, $\frac{\partial p}{\partial x_i} = L^2(\Omega)$, $i=1,2,3$ となるものが存在して $X = \mathrm{grad}\, p$ が成立する事である。」

L^2 より L^2_σ 及び L^2_π 上への直交射影を夫々 P_σ 及び P_π で表わす。 $W^m \equiv W^m(\Omega) \equiv \{ X = \sum_{i=1}^{3} X_i(x) e_i \in \mathfrak{X}(\Omega) ; X_i \in W^m(\Omega) \}$,
$H^m \equiv H^m(\Omega) \equiv \{ X = \sum_{i=1}^{3} X_i(x) e_i \in \mathfrak{X}(\Omega), X_i \in H^m(\Omega) \}$ とし
$X \in W^2 \cap H^1 \cap L^2_\sigma \equiv \mathcal{D}(A)$ に対して

$$AX = -P_\sigma \Delta X$$

とおくと $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow L^2_\sigma$ は strictly positive self-adjoint operator になる。

此の作用素 A は Stokes operator と呼ばれている。

§II－3 Navier-Stokes方程式の解の存在と一意性に関して知られている結果。

Navier-Stokes方程式に於いて境界値 $b(x,t), b(x)$ の G の内部への divergence free な extension $c(x,t), c(x)$ をとると，(NSE), (SE) は夫々次の方程式 (NSE′), (SE′) に帰着される。

$$(\text{NSE}') \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = -AX - P_\sigma[(X\cdot\nabla)X + (c\cdot\nabla)X + (X\cdot\nabla)c] + P_\sigma(f-(c\cdot\nabla)c) - Ac - P_\sigma\dfrac{dc}{dt} \\ X(0) = a \end{cases}$$

$$(\text{SE}') \quad AX + P_\sigma[(X\cdot\nabla)X + (c\cdot\nabla)X + (X\cdot\nabla)c] - P_\sigma(f-(c\cdot\nabla)c) + Ac$$

方程式(NSE′)の解の存在と一意性に関して知られている結果には次の様なものがある。

<u>定理(正則解の局所的存在及び一意性)</u>, $\mathbf{f}$, $\mathbf{c}$ は共に C^∞-級とする。このとき任意の $\mathbf{a} \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{4}})$ に対して $T>0$ が存在し $X(t) \in C([0,T]:\mathcal{D}(A^{1/4})) \cap C((0,T]:\mathcal{D}(A)) \cap C^1((0,T]:\mathbf{L}^2_\sigma) \equiv \mathcal{W}$ が存在して方程式(NSE′)を満たす。又此の方程式の解は $\mathcal{W}$ で unique である。

<u>定理(E. Hopf の弱解の大域的存在)</u> $\mathbf{f}$, $\mathbf{c}$ は共に C^∞-級とする。此の時任意の $\mathbf{a} \in \mathbf{L}^2_\sigma$ に対して

$X(t) \in C([0,\infty):\mathbf{L}^2_\sigma) \cap L^2_{loc}((0,\infty):\mathcal{D}(A^{1/2}))$ が存在して

任意の $\varphi(x,t) \in \mathbf{C}^{0,\infty}_\sigma([0,\infty)\times\Omega)$ に対して等式

$$(\mathbf{a}, \varphi(0)) + \int_0^\infty (X, \frac{d\varphi}{dt})dt = \int_0^\infty (A^{\frac{1}{2}}X, A^{\frac{1}{2}}\varphi) + \int_0^\infty\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} X_j \varphi_i \, dx\, dt$$

$$+ \int_0^\infty ((\mathbf{c}\cdot\nabla)X + (X\cdot\nabla)\mathbf{c} + (\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{c} - \mathbf{f} + A\mathbf{c} + \frac{d\mathbf{c}}{dt}, \varphi)\, dt$$

を満たす。但し、$\mathbf{C}^{0,\infty}_\sigma([0,\infty)\times\Omega)$ は $\varphi = \varphi(x,t) = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i(x,t)\mathbf{e}_i$ で $\varphi_i(x,t) \in C^{0,\infty}([0,\infty)\times\Omega)$ $i=1,2,3$ かつ $\mathrm{div}\,\varphi = 0$ となるものの全体から成る集合とする。

[III] Sattinger の結果.

此処では D.H.Sattinger の論文, The Mathematical Problem of Hydrodynamic Stability, (Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 19, No. 9 (1970), pp. 797−817) から後の議論の背景となる部分の結果を述べる。

$X^{(0)}=X^{(0)}(x)$ を定常方程式(SE)の解とする。此の解が安定であるか否かは非定常方程式(NSE)に於いて初期値を $a(x)=X^{(0)}+X^{(1)}$ で与えた時の解を $X^{(0)}(x)+X(x,t)$ とするとき $X(x,t)$ が t と共に減衰するか否かである。$X(x,t)$ の境界値が零である事を考慮すると、これは発展方程式

$$
(\mathrm{EE})\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}=-AX-P_\sigma\left[(X\cdot\nabla)X+(X^{(0)}\cdot\nabla)X+(X\cdot\nabla)X^{(0)}\right] \\ X(0)=X^{(1)} \end{cases}
$$

の解を調べる事になる。これを $X=0$ のまわりで線型化すると、

$$
(\mathrm{LEE})\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}=-AX-P_\sigma\left[(X^{(0)}\cdot\nabla)X+(X\cdot\nabla)X^{(0)}\right] \\ X(0)=X^{(1)} \end{cases}
$$

が得られる。$\varphi\in\mathcal{D}(A)$ に対して、

$$
L\varphi=-A\varphi-P_\sigma\left[(X^{(0)}\cdot\nabla)\varphi+(\varphi\cdot\nabla)X^{(0)}\right]
$$

とおく。此の作用素 L は一般に self-adjoint ではない。そこで問題を複素化する。これまでに述べた関数空間, 作用素等必要な修正を行ったとして今迄通りの記号で用いる。

補題（Sattinger）

(1) L のスペクトルは有限多重度の点スペクトルのみより成り ∞ 以外に集積しない。

(2) L のスペクトルは複素平面で右に凸な或る放物線の内部に含まれる。

(3) L の generalized eigen space は $\mathcal{D}(A^{1/2})$（graph topology を与えた）で complete である。」

次に非安定性の定義を述べる。（注：実の範囲である）

定義　定常解 $X^{(0)}$ が非安定であるとは $\varepsilon_0>0$ が存在して任意の $\delta>0$ に対し、次の (i)(ii) を満たす $X^{(1)}$ が存在する事である。

(i) $X^{(1)} \in \mathbf{L}^2_\sigma$ かつ $\|X^{(1)}\|_{\mathbf{L}^2_\sigma} < \delta$

(ii) $X^{(1)}$ を初期値とする (EE) の Hopf solution が存在して或る $t_0>0$ に対して $\|X(\cdot,t_0)\|_{\mathbf{L}^2_\sigma} > \varepsilon_0$。

定理（Sattinger）　$X^{(0)}$ を定常 Navier-Stokes 方程式の解とし、L の固有値 λ で $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ となるものが少くとも一つ存在するとする。此の時 $X^{(0)}$ は非安定である。」

此処で後の議論の為に次の定義をしておく。

定義　$\lambda \in \sigma(\mathrm{L})$（spectrum of L）に対してその generalized eigen space を $W(\lambda)$ とし、$W = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\sigma(\mathrm{L})\\ \mathrm{Re}\,\lambda>0}} W(\lambda)$ とおいて $X^{(0)}$ の unstable subspace と呼ぶ。

[IV] 問題とその対称性.

§IV-1. 問題の設定

$\Omega = \{x \in E_3 ;\ r_1 < |x| < r_2\}$ とおく。任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $X^{(\alpha)} = \alpha\, grad\left(\frac{-1}{r}\right)$, $p^{(\alpha)} = 2\rho\alpha^2 \int^r s^{-5}\, ds$ とおく。但し, $r = |x|$。此の $X^{(\alpha)}$, $p^{(\alpha)}$ は次の Navier-Stokes 方程式

$$(SE_\alpha)\ \begin{cases} \nu\Delta X - \nabla_X X - \frac{1}{\rho}\, grad\, p = 0 \\ div\, X = 0 \\ X|_{\partial G} = X^{(\alpha)}|_{\partial G} \end{cases}$$

の解となっている。此の解の安定性を調べるが, 即ち unstable subspace $\neq \{0\}$ かどうか調べるのが本稿の目的である。

以後 $X^{(\alpha)} = \alpha\, grad\left(\frac{-1}{r}\right)$ を対称ポテンシャル流と呼ぶ事にする。

§IV-2. 対称性

此処では先に設定した問題の持つ対称性について述べる。以後本稿を通して G で3次元回転群を表わす事にする。E_3 のデカルト座標系 (x_1, x_2, x_3) を固定して, G を $SO(3:R)$ と同一視し, 又 G の Euler 角を $(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ とする。G は Ω に等長変換群として作用している。$\mathcal{F}(\Omega)$ を Ω 上の関数の全体とする時, 各 $g \in G$, $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega)$ に対して線型作用素

$$U_g : \mathfrak{X}(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Omega),\quad U_g : \mathcal{F}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega)$$

を $(U_g X)(x) = g(X(g^{-1}x))$, $(U_g \varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x)$ で定義する。
但し $g(X(g^{-1}x))$ は $X(g^{-1}x)$ を基点が E_3 の原点と一致する様に平行移動して E_3 のベクトルと見てこれに g を作用させるとする。 U_g は Ω の等長変換 g が Ω 上のベクトル場に惹き起こす変換である。 g の等長性により U_g は $\mathbb{L}^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ に於ける G のユニタリー表現を与える。

次の定義を設ける。

<u>定義</u> 写像 (*linear or nonlinear*) $A : \mathfrak{X}(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Omega)$, $B : \mathfrak{X}(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{F}(\Omega)$, $C : \mathfrak{F}(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Omega)$, $D : \mathfrak{X}(\Omega) \times \mathfrak{F}(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Omega)$ が G-*invariant* であるとは任意の $g \in G$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}(\Omega) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "U_g"] & \mathfrak{X}(\Omega) \arrow[d, "U_g"] \\
\mathfrak{X}(\Omega) \arrow[r, "A"] & \mathfrak{X}(\Omega)
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}(\Omega) \arrow[r, "B"] \arrow[d, "U_g"] & \mathfrak{F}(\Omega) \arrow[d, "U_g"] \\
\mathfrak{X}(\Omega) \arrow[r, "B"] & \mathfrak{F}(\Omega)
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(\Omega) \arrow[r, "C"] \arrow[d, "U_g"] & \mathfrak{F}(\Omega) \arrow[d, "U_g"] \\
\mathfrak{F}(\Omega) \arrow[r, "C"] & \mathfrak{F}(\Omega)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}(\Omega) \times \mathfrak{F}(\Omega) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "U_g \times U_g"] & \mathfrak{X}(\Omega) \arrow[d, "U_g"] \\
\mathfrak{X}(\Omega) \times \mathfrak{F}(\Omega) \arrow[r, "D"] & \mathfrak{X}(\Omega)
\end{tikzcd}
$$

が可換となる事である。

次に *Navier-Stokes* 方程式の各項を与える写像の G-*invariance* を確認しておく。 それには各写像の *coordinate free* な表現を見ればよい。 $\frac{\partial}{\partial t}$ 及び g の等長性より, *grad*, *div* 及び $\Delta \overset{\mathrm{Def}}{\equiv} \mathrm{grad} \circ \mathrm{div} - \mathrm{rot} \circ \mathrm{rot}$ については殆んど自明である。

又∇についてはそれがE_3の Riemann 計量 $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ により決まる Riemannian connection である事により ∇ は G-invariant である。又 $X^{(\alpha)} = \alpha\,\mathrm{grad}(\frac{-1}{r})$ の G-invariance (e.i. $U_g X^{(\alpha)} = X^{(\alpha)}$ for $^\forall g \in G$) より 2 つの線型写像 $X \longmapsto \nabla_{X^{(\alpha)}} X$ 及び $X \longmapsto \nabla_X X^{(\alpha)}$ も共に G-invariant である。

故に此の場合の Navier-Stokes 方程式は G-invariant equation であり，G-invariant flow $X^{(\alpha)}$ のまわりで線型化した方程式も又 G-invariant equation である。その固有値問題を G のユニタリ表現論の結果を援用して調べるのが本稿の以後の program である。

[V] G のユニタリー表現

此処では G のユニタリー表現に関して以後用いるものを I. M. Gel'fand, R. A. Minlos and Z. Ya. Shapiro; Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications, Pergamon Press, 1963 より引用する。

先の様に E_3 にデカルト座標系 (x_1, x_2, x_3) を固定し G と $SO(3:\mathbb{R})$ を同一視し又 Euler 角を $(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ とすると，Euler 角 $(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ を持つ $g = g(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \in G$ には matrix

$$T_g = T(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\theta \sin\varphi_2 & -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\theta \cos\varphi_2 & \sin\varphi_1 \sin\theta \\ \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\theta \sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\theta \cos\varphi_2 & -\cos\varphi_1 \sin\theta \\ \sin\theta \sin\varphi_2 & \sin\theta \cos\varphi_2 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

が対応する。 又 $T_{g^{-1}} = T_g^{-1} = T(\pi-\varphi_2, \theta, \pi-\varphi_1)$ が成り立つ。

Gの既約ユニタリー表現は weight l が $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$ であるもので尽される。

x_j $(j=1,2,3)$軸のまわりの回転に対応する表現の生成元 用素を A_j とし $H_j = iA_j$, $H_\pm = H_1 \pm iH_2$ とし又 weight l の既約表現の canonical basis を $\{f_{-l}^l, f_{-l+1}^l, \cdots\cdots, f_l^l\}$ とすると

$$H_+ f_m^l = \alpha_{m+1}^l f_{m+1}^l, \quad H_- f_m^l = \alpha_m^l f_{m-1}, \quad H_3 f_m = m f_m^l,$$

但し $\alpha_m^l = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}$, が成り立つ。

又 $H^2 \equiv H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$ とおくと

$$H^2 f_m^l = l(l+1) f_m^l$$

が成り立つ。

ユニタリー表現 $U_g : L^2(S^2) \longrightarrow L^2(S^2)$ は integral weight l の既約表現の直和に分解される。 此の時 (ϑ, φ) を2次元球面S^2の極座標として, $H_\pm, H_3, H^2$ は

$$H_\pm = e^{\pm i\varphi}\left(\pm \frac{\partial}{\partial\vartheta} + i \cot\vartheta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \quad H_3 = i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$-H^2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

で与えられる。

又 weight integral l の既約表現の canonical basis は球関数 $\{Y_l^m(\vartheta,\varphi);$ $m = -l, -l+1, \cdots, l-1, l\}$ で与えられる。

$$Y_l^m(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi} P_l^m(\cos\vartheta),$$

$$P_l^m(\mu)=\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\frac{1}{2^l l!}(1-\mu^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{d^{l-m}}{d\mu^{l-m}}(1-\mu^2)^l$$

である。

weight l の既約表現の canonical basis に関する U_g $(g=g(\varphi_1,\theta,\varphi_2))$ の matrix を
$$T=T(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=\begin{bmatrix} T^l_{-l,-l} & \cdots & T^l_{-l,l} \\ T^l_{-l+1,-l} & & T^l_{-l+1,l} \\ \vdots & & \vdots \\ T^l_{l,-l} & \cdots & T^l_{l,l}\end{bmatrix}$$

とすると generalized spherical function $T^l_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ は

$$\begin{cases} T^l_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=e^{-im\varphi_1}P^l_{mn}(\cos\theta)e^{-in\varphi_2} \\ P^l_{mn}(\mu)=\dfrac{(-1)^{l-m}i^{n-m}}{2^l(l-m)!}\sqrt{\dfrac{(l-m)!(l+n)!}{(l+m)!(l-n)!}}(1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}}(1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}}\times \end{cases}$$

$$\times\frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}}\left[(1-\mu)^{l-m}(1+\mu)^{l+m}\right]$$

で与えられる。

表現のユニタリー性より $\overline{T^l_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)}=T^l_{nm}(\pi-\varphi_2,\theta,\pi-\varphi_1)$ が成り立つ。又 Y_l^m と T^l_{mn} の間には

$$Y_l^n(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\,T^l_{0,n}\left(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

の関係式が成り立つ。

更に G 上の関数 φ に対して，$(V_{g_0}\varphi)(g)=\varphi(gg_0)$ とおくと V_{g_0} は $L^2(G)$ (G 上の Haar measure $\frac{1}{8\pi^2}\sin\theta\, d\varphi_1 d\theta d\varphi_2$ に対する L_2-space) に於ける G のユニタリー表現を与えるが，此の表現は $(2l+1)$ 個の weight l の既約表現の直和の直和に分解する。$l=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots$。夫々の canonical basis は (normalization の後に)

$\{T^{l}_{m,n}(\varphi_1,\theta,\varphi_2) : -l \le n \le l\}$ で与えられる。normalization constant は $\frac{\sqrt{2l+1}}{4\pi}$ で m,n に依存しない。この事は後に利用する。表現 V_g に対しは

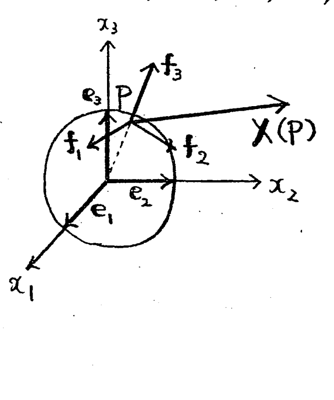
$$\begin{cases} H_{\pm} = e^{\mp i\varphi_2}\left(\pm \cot\theta \dfrac{\partial}{\partial\varphi_2} \mp \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi_1} + i\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) \\ H_3 = i\dfrac{\partial}{\partial\varphi_2} \\ -H^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} - 2\cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2}\right) \end{cases}$$

である。

[VI] $\mathfrak{X}(E_3)|_{S^2}$ の分解

此の[VI]では E_3 の(複素)ベクトル場を単位球面に制限して得られる(ベクトル値)関数で S^2 で二乗可積分なものの全体からなるヒルベルト空間 $L^2(S^2)$ の分解を行う。$\varphi \in L^2(S^2)$, $g \in G$ に対して $(U_g\varphi)(x) = g(\varphi(g^{-1}x))$ は G の $L^2(S^2)$ に於けるユニタリー表現を与える。

$\mathfrak{F}$ を S^2 上の点を起点とする (x_1, x_2, x_3) に関する右手系の正規直交基底 $\{f_1, f_2, f_3\}$ で f_3 が S と直交するものの全体とする。



$\{f_1, f_2, f_3\}$ を起点 P が (x_1, x_2, x_3) 座標の原点と一致する様に平行移動すると $\mathfrak{F}$ は E_3 の右手系正規直交基底の全体と同一視出来る。此の同一視の下で

$g\in G$ に対し $f_i = ge_i$ とおくと $\mathfrak{F}$ は G と同一視出来る。
(此の $G \longrightarrow \mathfrak{F}$ は bijective) 又 $\{f_1, f_2, f_3\}$ の起点 P と f_3 を同一視する。$X \in L^2(S^2)$ に対して G 上の関数 $X_i(g)$ を

$X_i(g) =$ ge_3 を起点とするベクトル $X(ge_3)$ の基底 $\{ge_1, ge_2, ge_3\}$ に関する才 i 成分

で定義する。表現 U_{g_0} が X_i に惹き起こす変換を調べる。
$U_{g_0}X$ に対応する X_i を $\tilde{X}_i$ とすると、

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_i(g) &= i\text{-th component of } U_{g_0}X \text{ with respect to the basis } \{ge_1, ge_2, ge_3\} \\
&= \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{of } g_0(X(g_0^{-1}ge_3)) \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \\
&= \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{of } X(g_0^{-1}ge_3) \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \{g_0^{-1}ge_1, g_0^{-1}ge_2, g_0^{-1}ge_3\} \\
&= X_i(g_0^{-1}g).
\end{aligned}$$

故に $\tilde{X}_i(g) = X_i(g_0^{-1}g) \equiv (U_{g_0}X_i)(g)$ となる。

此の表現 U_g と先の[V]で定義した表現 V_g とは互にユニタリー同値である。即ちユニタリー変換 $U: L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$ を $F \in L^2(G)$ に対して $(UF)(g) = F(g^{-1})$ で定義すると、任意の $g \in G$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
L^2(G) & \xrightarrow{U_g} & L^2(G) \\
\downarrow U & & \downarrow U \\
L^2(G) & \xrightarrow{V_g} & L^2(G)
\end{array}$$

は可換である。各 $X_i(g)$ は $T^l_{m,n}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$, $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots, -l \leq m, n \leq l$ で展開出来る訳であるが、$X_i(g)$ の代りに $\hat{X}_i(g) \equiv X_i(g^{-1})$ を

考えればGの作用に関して compatible な展開が出来る。

$\hat{\chi}_i(g)$ を展開するのには全ての $T^l_{m,n}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ が必要ではない。その為に $P=ge_3$, $g=g(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ の Euler 角と P の極座標 (ϑ,φ) の関係を調べる。

$P=g(\varphi_1,\theta,\varphi_2)e_3$ の $\{e_1,e_2,e_3\}$ に関する座標 $=T(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ の才3列

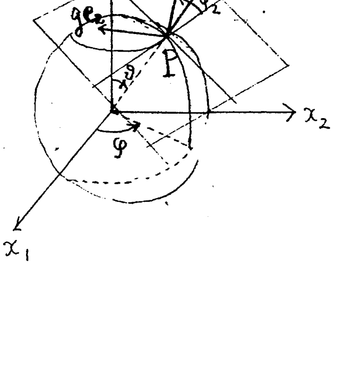
$$=\begin{pmatrix} \sin\varphi_1\sin\theta \\ -\cos\varphi_1\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

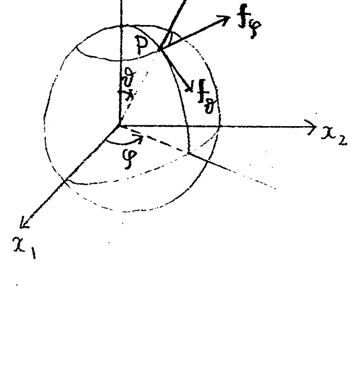
より $\varphi_1=\frac{\pi}{2}+\varphi$, $\theta=\vartheta$ を得る。従って $f_r, f_\vartheta, f_\varphi$ を E_3 のベクトル場で各点 $P=(\vartheta,\varphi)$ (spherical coordinate) で夫々 r,ϑ,φ-方向の長さが1のベクトル場とすると、$g=g(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ $(\theta=\vartheta,\varphi_1=\frac{\pi}{2}+\varphi_2)$ として

$$(ge_1,ge_2,ge_3)=(f_\vartheta,f_\varphi,f_r)\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}+\varphi_2) & -\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi_2) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{2}+\varphi_2) & \cos(\frac{\pi}{2}+\varphi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=(f_\vartheta,f_\varphi,f_r)\begin{pmatrix} -\sin\varphi_2, & -\cos\varphi_2, & 0 \\ \cos\varphi_2, & -\sin\varphi_2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。何故ならば $g(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=g_1\cdot g(\varphi_1,\theta,0)$,（但し g_1 は $ge_3=f_r$ を軸とする角度 φ_2 の回転とする）が成り立つ。





従って $X \in L^2(S^2)$ に対して $X = \sum_{i=1}^{3} X_i g e_i = X_\vartheta f_\vartheta + X_\varphi f_\varphi + X_r f_r$

とおくと。 但し $g = g(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi$, $\theta = \vartheta$

$$(\mathrm{VI}\text{-}1)\quad \begin{cases} X_1 = -\sin\varphi_2 X_\vartheta + \cos\varphi_2 X_\varphi \\ X_2 = -\cos\varphi_2 X_\vartheta - \sin\varphi_2 X_\varphi \\ X_3 = X_3 \end{cases}$$

が成り立つ。 故に $X_\pm(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = X_1(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \pm i X_2(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$

とおくと

$$(\mathrm{VI}\text{-}2)\quad \begin{cases} X_+(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{-i\varphi_2}(-iX_\vartheta(\vartheta, \varphi) + X_\varphi(\vartheta, \varphi)) \\ \qquad = e^{-i\varphi_2}(-iX_\vartheta(\theta, \varphi_1 - \frac{\pi}{2}) + X_\varphi(\theta, \varphi_1 - \frac{\pi}{2})) \\ X_-(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{i\varphi_2}(iX_\vartheta(\vartheta, \varphi) + X_\varphi(\vartheta, \varphi)) \\ \qquad = e^{i\varphi_2}(iX_\vartheta(\theta, \varphi_1 - \frac{\pi}{2}) + X_\varphi(\theta, \varphi_1 - \frac{\pi}{2})) \\ X_3(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = X_r(\vartheta, \varphi) \\ \qquad = X_r(\theta, \varphi_1 - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

が得られる。 $\hat{X}_\pm(g) = X_\pm(g^{-1})$ に対しては

$$(\mathrm{VI}\text{-}3)\quad \begin{cases} \hat{X}_+(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = X_+(\pi - \varphi_2, \theta, \pi - \varphi_1) = -e^{i\varphi_1}(-iX_\vartheta(\theta, \frac{\pi}{2} - \varphi_2) + X_\varphi(\theta, \frac{\pi}{2} - \varphi_2)) \\ \hat{X}_-(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = X_-(\pi - \varphi_2, \theta, \pi - \varphi_1) = -e^{-i\varphi_1}(iX_\vartheta(\theta, \frac{\pi}{2} - \varphi_2) + X_\varphi(\theta, \frac{\pi}{2} - \varphi_2)) \\ \hat{X}_3(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = X_3(\pi - \varphi_2, \theta, \pi - \varphi_1) = X_r(\theta, \frac{\pi}{2} - \varphi_2) \end{cases}$$

が得られる。 此処で $T^l_{m,n}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{-im\varphi_1} P^l_{mn}(\cos\theta) e^{-in\varphi_2}$

を考慮すれば, 次式の形の展開が出来る事が判る。

$$(\mathrm{VI}\text{-}4)\quad \begin{cases} \hat{X}_\pm(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = \sum_{l=1,2,\cdots} \sum_{n=-l}^{l} a^l_{\pm,n} T^l_{\mp 1,n}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \\ \hat{X}_3(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = \sum_{l=0,1,2\cdots} \sum_{n=-l}^{l} a^l_{3,n} T^l_{0,n}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \end{cases}$$

(VI−3), (VI−4) で $\vartheta=\theta, \varphi=\frac{\pi}{2}-\varphi_2$ とおくと

$$
(\mathrm{VI}-5)\left\{
\begin{aligned}
-iX_\vartheta(\vartheta,\varphi)+X_\varphi(\vartheta,\varphi) &= -e^{-i\varphi_1}\sum_{l}\sum_{n} a^{l}_{+,n}\, T^{l}_{-1,n}\left(\varphi_1,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \\
&= \sum_{l=1,2,\cdots}\ \sum_{n=-l}^{l} b^{l}_{-,n}\, T^{l}_{-1,n}\left(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \\
iX_\vartheta(\vartheta,\varphi)+X_\varphi(\vartheta,\varphi) &= -e^{i\varphi_1}\sum_{l}\sum_{n} a^{l}_{-,n}\, T^{l}_{+1,n}\left(\varphi_1,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \\
&= \sum_{l=1,2,\cdots}\ \sum_{n=-l}^{l} b^{l}_{+,n}\, T^{l}_{+1,n}\left(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \\
X_r(\vartheta,\varphi) &= \sum_{l=0,1,2,\cdots}\ \sum_{n=-l}^{l} b^{l}_{r,n}\, Y^{n}_{l}(\vartheta,\varphi).
\end{aligned}
\right.
$$

の形に展開出来ることが分る。 但し最後の式では

$Y^{n}_{l}(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\ T^{l}_{0,n}\left(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ を用いる。

[VII] 線型化されたNavier-Stokes方程式の固有値問題

§VII−1 線型化されたNavier-Stokes方程式

対称ポテンシャル流 $X^{(\alpha)}=\alpha\,\mathrm{grad}\left(\frac{-1}{r}\right)$ の安定性を調べる事は先に述べた様に、$X^{(\alpha)}$ のまわりで線型化された定常Navier-Stokes方程式の固有値問題

$$-\nu\Delta X - P_\sigma\left[\nabla_{X^{(\alpha)}}X + \nabla_X X^{(\alpha)}\right]=\lambda X$$

の研究に帰着される。 これは $L^2(\Omega)$ の分解に関する補題により次の境界値問題と同等である。

$$
(\mathrm{BVP})\left\{
\begin{array}{l}
\nu\Delta X-\nabla_{X^{(\alpha)}}X-\nabla_X X^{(\alpha)}+\ \mathrm{grad}\,p=\lambda X,\ \mathrm{div}\,X=0,\ X|_{\partial\Omega}=0 \\
\text{for some scalar function } p=p(x).
\end{array}
\right.
$$

§VII-2. 種々の公式

[VI]の結果から分る様に上の境界値問題は極座標 (r, ϑ, φ) を用いた方が研究し易い。その為に (r, ϑ, φ) を用いに種々の公式を列挙しておく。

$X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ に対して $X = X_r \mathbf{f}_r + X_\vartheta \mathbf{f}_\vartheta + X_\varphi \mathbf{f}_\varphi$ とおく.

このとき

$$\text{(VII-1)}\quad \begin{aligned} \Delta X = & \left\{ \Delta X_r - \frac{2}{r^2} X_r - \frac{2}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, X_\vartheta) - \frac{2}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi} \right\} \mathbf{f}_r \\ & + \left\{ \Delta X_\vartheta - \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} X_\vartheta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial X_r}{\partial\vartheta} - \frac{2\cos\vartheta}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi} \right\} \mathbf{f}_\vartheta \\ & + \left\{ \Delta X_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} X_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial X_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\vartheta}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial X_\vartheta}{\partial\varphi} \right\} \mathbf{f}_\varphi \end{aligned}$$

である。

これを $\mathcal{A}_r(X)\mathbf{f}_r + \mathcal{A}_\vartheta(X)\mathbf{f}_\vartheta + \mathcal{A}_\varphi(X)\mathbf{f}_\varphi$ とおく。

但し関数に対しては $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left\{ \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right\}$ である.

又一般に $X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$, $X = X_r \mathbf{f}_r + X_\vartheta \mathbf{f}_\vartheta + X_\varphi \mathbf{f}_\varphi$, $Y = Y_r \mathbf{f}_r + Y_\vartheta \mathbf{f}_\vartheta + Y_\varphi \mathbf{f}_\varphi$ に対して

$$\text{(VII-2)}\quad \begin{aligned} \nabla_X Y = & \left(X(Y_r) - \frac{X_\vartheta Y_\vartheta}{r} - \frac{X_\varphi Y_\varphi}{r} \right) \mathbf{f}_r \\ & + \left(X(Y_\vartheta) + \frac{X_\vartheta Y_r}{r} - \frac{X_\varphi Y_\varphi \cot\vartheta}{r} \right) \mathbf{f}_\vartheta \\ & + \left(X(Y_\varphi) + \frac{X_\varphi Y_r}{r} + \frac{X_\varphi Y_\vartheta \cot\vartheta}{r} \right) \mathbf{f}_\varphi \end{aligned}$$

である。但し $X(Y_r)$, はベクトル場 X を一次の斉次偏微分作用素と見做して，即ち $X = X_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{X_\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{X_\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ として

関数$X_r, \cdots$に作用させたものである。特に我々の$X^{(\alpha)} = \alpha\, \mathrm{grad}\left(\frac{-1}{r}\right)$に対しては

$$(\text{VII}-3)\begin{cases} \nabla_{X^{(\alpha)}} X = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\partial X_r}{\partial r} f_r + \frac{\alpha}{r^2}\frac{\partial X_\vartheta}{\partial r} f_\vartheta + \frac{\alpha}{r^2}\frac{\partial X_\varphi}{\partial r} f_\varphi \\ \nabla_X X^{(\alpha)} = -\frac{2\alpha}{r^3} X_r f_r + \frac{\alpha}{r^3} X_\vartheta f_\vartheta + \frac{\alpha}{r^3} X_\varphi f_\varphi \end{cases}$$

である。最後に

$$(\text{VII}-4)\qquad \mathrm{grad}\, p = \frac{\partial p}{\partial r} f_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} f_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$(\text{VII}-5)\qquad \mathrm{div}\, X = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 X_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta X_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi}$$

である。

§VII−3 変数分離

取り扱うべき方程式は次の連立方程式である。

$X \in \mathfrak{X}(\Omega)$, $X = X_r f_r + X_\vartheta f_\vartheta + X_\varphi f_\varphi$ として

$$(E_r)\qquad \nu A_r(X) - (\nabla_{X^{(\alpha)}} X + \nabla_X X^{(\alpha)})_r + \mathrm{grad}\, p = \lambda X_r$$

$$(E_\vartheta)\qquad \nu A_\vartheta(X) - (\nabla_{X^{(\alpha)}} X + \nabla_X X^{(\alpha)})_\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \lambda X_\vartheta$$

$$(E_\varphi)\qquad \nu A_\varphi(X) - (\nabla_{X^{(\alpha)}} X + \nabla_X X^{(\alpha)})_\varphi + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \lambda X_\varphi$$

$$(E_\sigma)\qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 X_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta X_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

$$(E_\beta)\qquad X_r\big|_{\partial\Omega} = X_\vartheta\big|_{\partial\Omega} = X_\varphi\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

〔VI〕の結果は

$$X_\pm = X_\varphi \pm i X_\vartheta$$

と置くことを示唆している。故にそうする。これに対応して

$$\Pi_\pm = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial p}{\partial\varphi} \pm i\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\vartheta},\quad \Pi_r = \frac{\partial p}{\partial r}$$

とおく。

以下，方程式系(E_r)—(E_σ)を$X_\pm, X_r, \Pi_\pm, \Pi_r$を用いて方程式系に書き換える。

先ず$(E_\varphi)\pm i(E_\vartheta)$を計算する。

$$\mathcal{A}_\varphi(X) \pm i\mathcal{A}_\vartheta(X)$$

$$= \left\{\Delta X_\varphi - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}X_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial X_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial X_\vartheta}{\partial\varphi}\right\}$$

$$\pm i\left\{\Delta X_\vartheta - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}X_\vartheta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial X_r}{\partial\vartheta} - \frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi}\right\}$$

$$= \Delta X_\pm - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}X_\pm \mp i\frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial X_\pm}{\partial\varphi} + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial X_r}{\partial\varphi} \pm i\frac{2}{r^2}\frac{\partial X_r}{\partial\vartheta}$$

故に

$$\boxed{\mathcal{A}_\varphi(X) \pm i\mathcal{A}_\vartheta(X) = \left(\Delta - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} \mp i\frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)X_\pm + \frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)X_r}$$

$$\mathcal{A}_r(X) = \Delta X_r - \frac{2}{r^2}X_r - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta X_\vartheta) - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$= \left(\Delta - \frac{2}{r^2}\right)X_r - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cdot\frac{X_+ - X_-}{2i}\right) - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{X_+ + X_-}{2}$$

$$= \left(\Delta - \frac{2}{r^2}\right)X_r + i\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\sin\vartheta(X_+ - X_-)\right\} - \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(X_+ + X_-)$$

$$= \left(\Delta - \frac{2}{r^2}\right)X_r - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\frac{\partial}{\partial\vartheta} - i\cot\vartheta\right)X_+$$

$$- \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\right)X_-$$

故に

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{A}_r(X) = \left(\Delta - \frac{2}{r^2}\right)X_r - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\frac{\partial}{\partial\vartheta} - i\cot\vartheta\right)X_+ \\ - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\right)X_- \end{aligned}}$$

一方

$$(\nabla_{X^{(\alpha)}}X + \nabla_X X^{(\alpha)})_\varphi \pm i(\nabla_{X^{(\alpha)}}X + \nabla_X X^{(\alpha)})_\vartheta$$

$$= \left(\frac{\alpha}{r^2}\frac{\partial X_\varphi}{\partial r} + \frac{\alpha}{r^3}X_\varphi\right) \pm i\left(\frac{\alpha}{r^2}\frac{\partial X_\vartheta}{\partial r} + \frac{\alpha}{r^3}X_\vartheta\right)$$

$$= \frac{\alpha}{r^2}\frac{\partial X_\pm}{\partial r} + \frac{\alpha}{r^3}X_\pm$$

$$\boxed{\begin{aligned} (\nabla_{X^{(\alpha)}}X + \nabla_X X^{(\alpha)})_\varphi \pm i(\nabla_{X^{(\alpha)}}X + \nabla_X X^{(\alpha)})_\vartheta &= \alpha\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^3}\right)X_\pm \\ (\nabla_{X^{(\alpha)}}X + \nabla_X X^{(\alpha)})_r &= \alpha\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^3}\right)X_r \end{aligned}}$$

最後に

$$(\mathrm{E}_\sigma) \quad 0 = \operatorname{div} X = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2X_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta X_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2X_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{X_+ - X_-}{2i}\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\frac{X_+ + X_-}{2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2X_r) - \frac{i}{2r}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cot\vartheta + i\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)X_+$$

$$+ \frac{i}{2r}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cot\vartheta - i\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)X_-$$

故に方程式系(E_r)—(E_φ)は次の方程式系と同値になる。

$$(\mathcal{E}_\pm)\ \nu\left\{\left(\Delta-\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\mp i\frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)X_\pm+\frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\pm i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)X_r\right\}$$

$$-\alpha\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^3}\right)X_\pm+\Pi_\pm=\lambda X_\pm$$

$$(\mathcal{E}_r)\ \nu\left\{\left(\Delta-\frac{2}{r^2}\right)X_r-\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-i\frac{\partial}{\partial\vartheta}-i\cot\vartheta\right)X_+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+i\frac{\partial}{\partial\vartheta}+i\cot\vartheta\right)X_-\right\}$$

$$-\alpha\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2}{r^3}\right)X_r+\Pi_r=\lambda X_r$$

$$(\mathcal{E}_\sigma)\ \ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2X_r)-\frac{i}{2r}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\cot\vartheta+i\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)X_+$$

$$+\frac{i}{2r}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\cot\vartheta-i\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)X_-=0$$

$$(\mathcal{E}_\beta)\ \ X_\pm\Big|_{\partial\Omega}=X_r\Big|_{\partial\Omega}=0.$$

さて[VI]の結果より、$X_\pm, X_r$, は

$$X_\pm(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{l=1}^{\infty}f_\pm^l(r)\sum_{n=-l}^{l}T_{\pm1,n}^l\left(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

$$X_r(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}f_0^l(r)\sum_{n=-l}^{l}T_{0,n}^l\left(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right).$$

の形に展開出来る。 $p=p(r,\vartheta,\varphi)$は

$$p(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}g^l(r)\sum_{n=-l}^{l}Y_l^n(\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}p^l(r)\sum_{n=-l}^{l}T_{0,n}^l\left(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

の形に展開出来る。

$$
\begin{cases}
X_\pm(r,\vartheta,\varphi) = f^l_\pm(r)\, T^l_{\pm 1,n}\left(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \\
X_r(r,\vartheta,\varphi) = f^l_r(r)\, T^l_{0,n}\left(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right). \\
p(r,\vartheta,\varphi) = p^l(r)\, T^l_{0,n}\left(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right).
\end{cases}
$$

とおいて $(\mathcal{E}_\pm)$, $(\mathcal{E}_r)$, $(\mathcal{E}_\sigma)$ に代入して $T^l_{m,n}$ の項を消去しない訳であるが、その時次の事に注意する。即ち $\{T^l_{m,n}(\varphi_1,\theta,\varphi_2);\ -l\leq n\leq l\}$ は $L^2(G)$ に於ける G のユニタリー表現 $(V_{g_0}f)(g)=f(gg_0)$ ののweight l の既約成分の表現空間の基底をなしており、l のみに依存する normalization constant を乗じてその canonical basis となる。故に $H_\pm$, H_3, H^2 等を作用させると $T^l_{m,n}$ は canonical basis と同じ関係式を満たす。この事を用いて問題の reduction に必要な recurrence formula を導く。

G 上でユニタリー表現 $(V_{g_0}f)(g)=f(gg_0)$ に対しては

$$
\begin{cases}
H_\pm = e^{\mp i\varphi_2}\left(\pm\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \mp \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
H_3 = i\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \\
-H^2 = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} - 2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2}\right).
\end{cases}
$$

であった。又 $\overline{T^l_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)} = T^l_{n,m}(\pi-\varphi_2,\theta,\pi-\varphi_1)$ であった。

まず

$$
\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) T^l_{0,n}\left(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) \overline{T^l_{n,0}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi,\vartheta,\pi\right)}
$$

$$
= \overline{\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \mp i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) T^l_{n,0}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi,\vartheta,0\right)}
$$

$$
= \mp e^{\mp i\pi}\overline{\left(e^{\mp i\pi}\left(\pm\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \mp \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right) T^l_{n,0}\right)\left(\varphi+\frac{\pi}{2},\vartheta,\pi\right)}
$$

$$= \pm\, \overline{(H_{\pm} T^{\,l}_{n,0})(\varphi+\tfrac{\pi}{2},\vartheta,\pi)} = \pm\, \overline{\alpha^{l}_{1}\, T^{\,l}_{n,\pm 1}(\varphi+\tfrac{\pi}{2},\vartheta,\pi)}$$

$$= \pm\sqrt{l(l+1)}\; T^{\,l}_{\pm 1,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi).$$

故に.

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)T^{\,l}_{0,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi) = \pm\sqrt{l(l+1)}\; T^{\,l}_{\pm 1,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)}$$

次に.

$$\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \mp i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)T^{\,l}_{\pm1,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi) = \left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \mp i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\overline{T^{\,l}_{n,\pm1}(\tfrac{\pi}{2}+\varphi,\vartheta,\pi)}$$

$$= \overline{\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)T^{\,l}_{n,\pm1}(\tfrac{\pi}{2}+\varphi,\vartheta,\pi)}$$

$$= \pm\,\overline{\left(\left(\mp\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \pm \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)T^{\,l}_{\pm1,n}\right)(\tfrac{\pi}{2}+\varphi,\vartheta,\pi)} + \overline{\left(\cot\theta\,\frac{\partial T^{\,l}_{n,\pm1}}{\partial\varphi_2}\right)(\tfrac{\pi}{2}+\varphi,\vartheta,\pi)}$$

$$= \pm\,\overline{\left\{e^{\mp i\varphi_2}\left[e^{\pm i\varphi_2}\left(\mp\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \pm \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)T^{\,l}_{n,\pm1}\right]\right\}(\tfrac{\pi}{2}+\varphi,\theta,\pi)}$$

$$+\ \overline{\cot\theta\;\frac{\partial T^{\,l}_{n,\pm1}}{\partial\varphi_2}(\tfrac{\pi}{2}+\varphi,\vartheta,\pi)}$$

$$= \pm\, e^{\pm i\pi_2}\cdot\overline{(H_{\mp} T^{\,l}_{n,\pm1})(\tfrac{\pi}{2}+\varphi,\vartheta,\pi)} + \overline{(-i)\cot\vartheta (H_3 T^{\,l}_{n,\pm1})(\tfrac{\pi}{2}+\varphi,\vartheta,\pi)}$$

$$= \mp\sqrt{l(l+1)}\;\overline{T^{\,l}_{n,0}(\tfrac{\pi}{2}+\varphi,\vartheta,\pi)} + i\,(\pm)\cot\vartheta\;\overline{T^{\,l}_{n,\pm1}(\tfrac{\pi}{2}+\varphi,\vartheta,\pi)}$$

$$= \mp\sqrt{l(l+1)}\;T^{\,l}_{0,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi) \pm i\cot\vartheta\; T^{\,l}_{\pm1,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi).$$

故に.

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \mp i\frac{\partial}{\partial\vartheta} \mp i\cot\vartheta\right)T^{\,l}_{\pm1,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi) = \mp\sqrt{l(l+1)}\; T^{\,l}_{0,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)}$$

次に $-H^2 T^l_{m,n} = -l(l+1) T^l_{m,n}$ より

$$-l(l+1)T^l_{m,n}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2}-2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2}\right)\right\}T^l_{mn}$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)T^l_{m,n}+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(-m^2T^l_{m,n}+2im\cos\theta\frac{\partial T^l_{mn}}{\partial\varphi_2}+\frac{\partial^2 T^l_{mn}}{\partial\varphi_2^2}\right)$$

$$\therefore -l(l+1)T^l_{mn}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)=\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}+\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)T^l_{m,n}$$

$$+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left\{-m^2T^l_{m,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)-2im\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}T^l_{mn}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}T^l_{m,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)\right\}$$

故に $m=+1,-1,0$ とおいて.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}+\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-i\frac{2\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)T^l_{+1,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)$$
$$=-l(l+1)T^l_{+1,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}+\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+i\frac{2\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)T^l_{-1,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)$$
$$=-l(l+1)T^l_{-1,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}+\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)T^l_{0,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)$$
$$=-l(l+1)T^l_{0,n}(0,\vartheta,\tfrac{\pi}{2}-\varphi)$$

次に $X_\pm(r,\vartheta,\varphi)=f_\pm^l(r)T_{\pm1,n}^l(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi)$

$X_r(r,\vartheta,\varphi)=f_0^l(r)T_{0,n}^l(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi)$

$p(r,\vartheta,\varphi)=p^l(r)T_{0,n}^l(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi)$

を$(\mathcal{E}_\pm)$, $(\mathcal{E}_r)$, $(\mathcal{E}_\sigma)$ に代入する。

先ず$(\mathcal{E}_\pm)$であるが、まず

$$\Pi_\pm=\Pi_\varphi\pm i\Pi_\vartheta=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\pm i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

$$=p^l(r)\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\pm i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)T_{0,n}^l(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi)$$

$$=p^l(r)\frac{1}{r}(\pm1)\sqrt{l(l+1)}\,T_{\pm1,n}^l(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi).$$

即ち

$$\Pi_\pm=\pm p^l(r)\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}T_{\pm1,n}^l(0,\vartheta,\frac{\pi}{2}-\varphi).$$

に注意しておく。 $X_\pm, X_r, p$ を$(\mathcal{E}_\pm)$に代入すると.

$$\lambda f_\pm^l T_{\pm1,n}^l=\lambda X_\pm$$

$$=\nu\left\{\left(\Delta-\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\mp i\frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)f_\pm^l T_{\pm1,n}^l+\frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\pm i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)f_0^l T_{0,n}^l\right\}$$

$$-\alpha\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^3}\right)f_\pm^l T_{\pm1,n}^l+\Pi_\pm$$

$$=\nu\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df_\pm^l}{dr}\right)T_{\pm,n}^l+f_\pm^l\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\mp i\frac{2\cot\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)T_{\pm1,n}^l\right.$$

$$\left.+f_0^l\frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\pm i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)T_{0,n}^l\right\}-\alpha\left(\frac{1}{r^2}\frac{df_\pm^l}{dr}+\frac{1}{r^3}f_\pm^l\right)T_{\pm1,n}^l$$

$$\pm\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}p^l T_{\pm1,n}^l$$

$$=\nu\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df_\pm^l}{dr}\right)T_{\pm1,n}^l-\frac{l(l+1)}{r^2}f_\pm^l T_{\pm1,n}^l\pm\frac{2\sqrt{l(l+1)}}{r^2}f_0^l T_{\pm1,n}^l\right\}$$

$$-\alpha\left(\frac{1}{r^2}\frac{df_\pm^l}{dr}+\frac{1}{r^3}f_\pm^l\right)T_{\pm1,n}^l\pm\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}p^l\ T_{\pm1,n}^l$$

故に $f_\pm^l, f_0^l, p^l$ の満たすべき方程式は.

$$\boxed{(D_\pm)\quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df_\pm^l}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}f_\pm^l\pm\frac{2\sqrt{l(l+1)}}{r^2}f_0^l-\alpha\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}+\frac{1}{r^3}\right)f_\pm^l\pm\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}p^l=\lambda f_\pm^l}$$

次に $(\mathcal{E}_r)$ については

$$\lambda f_0^l T_{0,n}^l=\lambda X_r$$

$$=\nu\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial X_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}+\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)X_r\right.$$

$$-\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-i\frac{\partial}{\partial\vartheta}-i\cot\vartheta\right)X_+$$

$$\left.-\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+i\frac{\partial}{\partial\vartheta}+i\cot\vartheta\right)X_-\right\}$$

$$-\alpha\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2}{r^3}\right)X_r+\Pi_r$$

$$=\nu\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df_0^l}{dr}\right)T_{0,n}^l+\frac{f_0^l}{r^2}(-l(l+1))T_{0,n}^l\right.$$

$$\left.+\frac{f_+^l}{r^2}\sqrt{l(l+1)}\ T_{0,n}^l-\frac{f_-^l}{r^2}\sqrt{l(l+1)}\ T_{0,n}^l\right.$$

$$-\alpha\left(\frac{1}{r^2}\frac{df_0^l}{dr}-\frac{2}{r^3}f_0^l\right)T_{0,n}^l+\frac{df_0^l}{dr}T_{0,n}^l$$

故に

$$\boxed{\begin{aligned}(D_r)\ \nu\Big\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{df_0^l}{dr}\Big)-\frac{l(l+1)}{r^2}f_0^l+\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r^2}(f_+^l-f_-^l)\Big\}\\ -\alpha\Big(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}-\frac{2}{r^3}\Big)f_0^l+\frac{dp^l}{dr}=\lambda f_0^l\end{aligned}}$$

$(\mathcal{E}_\sigma)$ より

$$0=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_0^l T_{0,n}^l)-i\frac{f_+^l}{2r}\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\cot\vartheta+i\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)T_{+1,n}^l$$

$$+i\frac{f_-^l}{2r}\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\cot\vartheta-i\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)T_{-1,n}^l$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{df_0^l}{dr}\Big)T_{0,n}^l-\frac{f_+^l}{2r}\sqrt{l(l+1)}\,T_{0,n}^l+\frac{f_-^l}{2r}\sqrt{l(l+1)}\,T_{0,n}^l$$

故に

$$\boxed{(D_\sigma)\quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 f_0^l)-\frac{\sqrt{l(l+1)}}{2r}(f_+^l-f_-^l)=0}$$

[VII] 固有値問題

次に常微分方程式系 $(D_\pm)$, (D_r), (D_σ) に対する境界値問題の固有値問題を調べる。 示は $f_\pm^l\to f_\pm$, $f_0^l\to f_0$, $p^l\to p$ と略記して.

$$(D_\pm)\ \nu\Big\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{df_\pm}{dr}\Big)-\frac{l(l+1)}{r^2}f_\pm\pm\frac{2\sqrt{l(l+1)}}{r^2}f_0\Big\}$$
$$-\alpha\Big(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}+\frac{1}{r^3}\Big)f_\pm\pm\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}p=\lambda f_\pm$$

$$(D_r)\ \nu\Big\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{df_0}{dr}\Big)-\frac{l(l+1)}{r^2}f_0+\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r^2}(f_+-f_-)\Big\}$$
$$-\alpha\Big(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}-\frac{2}{r^3}\Big)f_0+\frac{dp}{dr}=\lambda f_0$$

$$(D_\sigma)\quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 f_0)-\frac{\sqrt{l(l+1)}}{2r}(f_+-f_-)=0$$

$$(D_\beta)\quad f_\pm(r_i)=f_0(r_i)=0,\ (i=1,2).$$

$(l=1,2,\cdots)$

である。 (D_0)より $f_+ - f_-$ を各$(D_\pm)$, (D_r)に代入しこれを消去すればf_0に対する四階の常微分作用素に対する境界値問題を得るが、非常に複雑な為筆者は未だその問題を解く事に成功していない。 此処では部分的な結果を報告する。

$f_0 \equiv 0$となるものに限る。 すると(D_0)より $f_+ - f_- = 0$ を得る。 これと(D_r)より $p = c$ (constant)を得るが、$f = f_+ = f_-$として$(D_\pm)$より

$$\pm \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} p = \lambda f - \nu\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} f\right\} + \alpha\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^3}\right) f$$

従って $p \equiv 0$ を得る。 従って結局 $(\nu = 1$とする$)$

$$(BVP)_\alpha \begin{cases} \dfrac{d^2 f}{dr^2} + \left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{\alpha}{r^2}\right)\dfrac{df}{dr} - \left(\dfrac{l(l+1)}{r^2} + \dfrac{\alpha}{r^3}\right) f = \lambda f \\ f(r_i) = 0, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

此処でf'の項を消去する為 $f(r) = a_\alpha(r) g(r)$, $a_\alpha(r) = \frac{1}{r} e^{-\frac{\alpha}{2r}}$ とおくと

$$(BVP)_\alpha \text{ は } \begin{cases} g''(r) + Q_\alpha(r) g(r) = \lambda g(r) \\ g(r_i) = 0, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

となる。 但し $Q_\alpha(r) = \dfrac{1}{a_\alpha(r)}\left\{a''_\alpha(r) + \left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{\alpha}{r^2}\right) a_\alpha(r) - \dfrac{l(l+1)}{r^2} - \dfrac{\alpha}{r^3}\right\}$ とする。

この固有値問題の最大固有値λ_{max}は

$$\lambda_{max} = \sup\left\{-\int_{r_1}^{r_2} |g'(r)|^2 dr + \int_{r_1}^{r_2} Q_\alpha(r) |g(r)|^2 dr\right\}$$

但し, sup は $g \in C^2([r_1, r_2])$, $g(r_i) = 0$, $i=1,2$
$\int_{r_1}^{r_2} |g(r)|^2 dr = 1$ となる g にわたってとる。

更に

$$\lambda_{max} \geqq \sup\left(-\int_{r_1}^{r_2} |g'(r)|^2 dr\right) + \min_{r_1 \leqq r \leqq r_2} Q_\alpha(r) \int_{r_1}^{r_2} |g(r)|^2 dr$$

$$= \sup\left(-\int_{r_1}^{r_2} |g'(r)|^2 dr \right) + \min_{r_1 \leqq r \leqq r_2} Q_\alpha(r)$$

$$= -\left(\frac{\pi}{r_2 - r_1}\right)^2 + \min_{r_1 \leq r \leq r_2} Q_\alpha(r)$$

$$\therefore\ \lambda_{max} \geqq -\left(\frac{\pi}{r_2 - r_1}\right)^2 + \min_{r_2 \leq r \leqq r_2} \left\{\left(\frac{1}{4r^5} + \frac{1}{2r^4}\right)\alpha^2 - \left(\frac{1}{2r^4} + \frac{9}{2r^3}\right)\alpha + \frac{4 - l(l+1)}{r^2}\right\}$$

となる。 $Q_\alpha(r)$ の形により分る様にある $l_0 \geqq 1$ に対して, 上式の右辺 >0 ならば, 任意の $l_0 \geqq l \geqq 1$ に対してもそうである。 かつ各 l に対して多重度が $2l+1$ あることにより $\sum_{l=1}^{l_0} (2l+1) = l_0(l_0+2)$ に注意すると, 次の結果を得る。

[VIII] 結果

ある $l_0 \geqq 1$ に対して

$$\min_{r_1 \leq r \leq r_2} \left\{ \left(\frac{1}{4r^5} + \frac{1}{2r^4} \right) \alpha^2 - \left(\frac{1}{2r^4} + \frac{9}{2r^3} \right) \alpha + \frac{4 - l_0(l_0+1)}{r^2} \right\} > \left(\frac{\pi}{r_2 - r_1} \right)^2$$

が成り立つならば，対応する対称ポテンシャル流 $\boldsymbol{X}^{(\alpha)}$ は少くとも $l_0(l_0+2)$ 次元の instability subspace をもつ。此の instability subspace は $\boldsymbol{X} = X_r \boldsymbol{e}_r + X_\vartheta \boldsymbol{e}_\vartheta + X_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$、$X_\pm = X_\varphi \pm i X_\vartheta$ として

$$X_r = 0, \quad X_\pm = f_n^l(r)\, T_{\pm 1, n}^{l}\left(0, \vartheta, \frac{\pi}{2} - \varphi\right), \quad 1 \leqq l \leqq l_0, \; -l \leqq n \leqq l$$

の形のベクトル場で張られるものを含む。