

Approximative dimension について

高村 幸男

Approximative dimension および diametral dimension についての基本的な事実は, Bessaga - Pelczynski - Rolewicz の 2 論文

[1] Approximative dimension of linear topological spaces and some of its applications, Reports of Conference on Functional Analysis, Studia Math. Seria specjalna 1 (1963) 27 - 29

[2] On diametral approximative dimension and linear homogeneity of F -spaces, Bull. Acad. Polon. 9 (1961) 667-683
 に述べられているが、ほとんど証明なしなので、あまり理解されていなかったように思われる。実際、核型空間の標準的教科書の

[3] Pietsch, A. Nuclear locally convex spaces, Springer 1972
 では未解決とされている。

こゝでは [1], [2] の結果がすべて正しいこと、従って、[3] で提起された問題「Approximative dimension だけを用いて核型空間の理論を組立てられるか？」に答を得ること、を示す。(部分的には Terzioglu, Collectanea Math. XX (1969) 49-99, に与えられている)。

以下 E を locally convex linear space とする。

§ 1 記号と定義

$$\delta_r(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = \inf \{ \delta \mid \mathcal{V} \subset \delta \mathcal{U} + \overset{\exists}{F}_r \}, \quad F_r = r\text{-次元部分空間}$$

$$M_\varepsilon(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = \sup \{ m \mid \exists x_1 \dots x_m \in \mathcal{V} : x_i - x_j \notin \varepsilon \mathcal{U}, \forall i \neq j \}$$

ただし \mathcal{V}, \mathcal{U} は E の原点の近傍とする。

$$\Delta_{\mathcal{U}}(E) = \{ \delta_r \mid \forall \mathcal{U}, \exists \mathcal{V} : \delta_r(\mathcal{V}, \mathcal{U}) \leq \delta_r, r=1, 2, \dots \}$$

は E の diametral dimension,

$$\Phi_{\mathcal{U}}(E) = \{ \varphi = \varphi(\varepsilon) > 0 \mid \forall \mathcal{U}, \exists \mathcal{V} : \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi^{-1} M_\varepsilon(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = 0 \}$$

は E の approximative dimension と"う。

$$\Delta_{\mathcal{B}}(E) = \{ \delta_r \mid \forall A, \exists B : \delta_r(A, B) \leq \delta_r, r=1, 2, \dots \}$$

は E の dual diametral dimension と"う。

$$\Phi_{\mathcal{B}}(E) = \{ \varphi \mid \forall A, \exists B : \varphi(\varepsilon)^{-1} M_\varepsilon(A, B) \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \downarrow 0 \}$$

は E の dual approximative dimension と"う。

ただし A, B は E の bounded set とす。

さらに

$$\Delta_{\mathcal{U}\mathcal{B}}(E) = \{ \delta_r \mid \forall A, \forall \mathcal{U}, \delta_r(A, \mathcal{U}) \leq \delta_r \text{ for large } r \}$$

は diametral approximative dimension of E と"う。

§ 2 核型空間の

$$\text{定理 } E : \text{nuclear} \iff [(\gamma+1)^{-\lambda}] \in \Delta_{\mathcal{U}}(E), \exists \lambda > 0 (\forall \lambda > 0)$$

$$\iff [\exp(\varepsilon^{-p})] \in \Phi_{\mathcal{U}}(E), \exists p > 0 (\forall p > 0)$$

§ 3 部分空間・商空間

$F \subset E$ とする.

1. $\Phi_{\mathcal{N}}(F) \supset \Phi_{\mathcal{N}}(E)$
2. $\Phi_{\mathcal{N}}(E/F) \supset \Phi(E)$
3. $\Delta_{\mathcal{N}}(E/F) \supset \Delta_{\mathcal{N}}(E)$
4. E が nuclear ならば $\Delta_{\mathcal{N}}(F) \supset \Delta_{\mathcal{N}}(E)$

一般には $\Delta_{\mathcal{N}}(F) \not\supset \Delta_{\mathcal{N}}(E)$ も起こると予想された. 上の結果と § 2 の定理を組合せれば, $\Phi_{\mathcal{N}}$ と $\Delta_{\mathcal{N}}$ のいづれを用いても,

$$E : \text{nuclear} \Rightarrow F, E/F : \text{nuclear}$$

を示し得る.

§ 4 共役空間

$E'_b = E$ の dual space に strong topology を与えたものとする. 以下のことが成立する.

1. $E : \mathfrak{q}\text{-tonnelé}, \text{nuclear} \Rightarrow \Delta_{\mathcal{N}}(E) = \Delta_{\mathfrak{F}}(E'_b)$
2. $E'_b : \text{nuclear} \Rightarrow \Delta_{\mathfrak{F}}(E) = \Delta_{\mathcal{N}}(E'_b)$
3. $E : \mathfrak{q}\text{-tonnelé}, \text{nuclear} \Rightarrow \Phi_{\mathcal{N}}(E) = \Phi_{\mathfrak{F}}(E'_b)$
4. $E'_b : \text{nuclear} \Rightarrow \Phi_{\mathfrak{F}}(E) = \Phi_{\mathcal{N}}(E'_b)$

定理 $E : (\mathcal{F})$ or (DF)

$$\Rightarrow \Delta_{\mathcal{N}}(E) = \Delta_{\mathcal{N}\mathcal{B}}(E) = \Delta_{\mathcal{B}}(E)$$

$$\Phi_{\mathcal{N}}(E) = \Phi_{\mathcal{N}\mathcal{B}}(E) = \Phi_{\mathcal{B}}(E)$$

系. $E : \text{nuclear}, (\mathcal{F})$ or (DF)

$$\Rightarrow \Delta_{\mathcal{N}}(E) = \Delta_{\mathcal{N}}(E'_b)$$

$$\Phi_{\mathcal{N}}(E) = \Phi_{\mathcal{N}}(E'_b)$$

上の系と §2 の定理より, $\Delta_{\mathcal{N}}$ と $\Phi_{\mathcal{N}}$ のいづれを用いても

$$E : \text{nuclear}, (\mathcal{F}) \text{ or } (DF) \Rightarrow E'_b : \text{nuclear}$$

を示すことができる。