数理解析研究所講究録
265巻 1976年 38-47

Szegöの定理について

北大 理　大滝 博
勝股 修
越 昭三

§1

最初に一般にSzegöの定理と呼ばれている定理について述べる。

定理　$h \geq 0$, $h \in L^1(d\theta)$, $A \equiv \{ f \in C(T)\ ;\ \hat{f}(n) = 0\ ; n = -1, -2, \cdots \}$

$$A_0 \equiv \{ f \in A\ ;\ \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = 0 \}$$

$$\Longrightarrow \inf_{f \in A_0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |1 - f(\theta)|^2 h(\theta)\, d\theta = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log h(\theta)\, d\theta \right)$$

Aはdisk環と呼ばれるものでDirichlet環になる。従ってlogmodular環でもある。この定理の拡張は色々なされているがここではこの定理（と類似した定理）がlogmodular環に対して特別なOrlicz－Nakano spaceで成立することを示す。

X を Compact Hausdorff space, λ を X 上の regular finite positive measure とする。 $\phi_x(t)$ は $X\times[0,\infty)$ 上の関数で次の条件を満すものとする。

i) 各 $x\in X$: $\phi_x(t)$ は $[0,\infty)$ 上の狭義単調増加な t の連続関数で, $\phi_x(0)=0$, $\lim_{t\to\infty}\phi_x(t)=\infty$

ii) 各 $t>0$; $\phi_x(t)$ は x の Borel 可測な関数で

(A) $\quad 0<\inf_{x\in X}\phi_x(t)\leqq\sup_{x\in X}\phi_x(t)<+\infty$ を満す。

次に $\Phi_x(u)$ $(x\in X,\ u\geqq 0)$ を $\Phi_x(u)=\int_0^u\phi_x(t)\,dt$ により定義する。このとき $\Phi_x(u)$ は各 $x\in X$ を固定すると, u の凸連続函数で $u\geqq 0$ を固定すると x の可測函数になる。そこで汎函数 $M_{\Phi_x}(\cdot)$ を

(B) $\quad M_{\Phi_x}(f)\equiv\int_X\Phi_x(|f(x)|)\,d\lambda(x)$ (f; 可測函数)

により定義する。

<u>定義</u> $\quad L_{\Phi_x}(X)\equiv\{f;\ \text{可測},\ M_{\Phi_x}(cf)<+\infty\ \text{for}\ {}^{\exists}c>0\}$

$$\psi_x(u)\equiv\sup_{\phi_x(t)\leqq u}t,\quad \Psi_x(u)\equiv\int_0^u\psi_x(t)\,dt\quad(x\in X,\ u\geqq 0)$$

このとき $\psi_x(u)$, $\Psi_x(u)$ はそれぞれ $\phi_x(u)$, $\Phi_x(u)$ と同じ性質を持ち, 従って $M_{\Psi_x}(\cdot)$, $L_{\Psi_x}(X)$ を同上に定義できる。

<u>補題</u>　f, g を複素可測函数とするとき，$M_{\Phi_x}(\cdot)$ は次の性質を満す。

1) $M_{\Phi_x}(0) = 0$

2) $M_{\Phi_x}(af) = 0$ for ${}^\forall a > 0 \Longrightarrow f = 0 \quad (\text{a.e } \lambda)$

3) $a, b \geq 0,\ a + b = 1 \Longrightarrow M_{\Phi_x}(af + bg) \leq a M_{\Phi_x}(f) + b M_{\Phi_x}(g)$

4) $|f| \wedge |g| = 0 \Longrightarrow M_{\Phi_x}(f + g) = M_{\Phi_x}(f) + M_{\Phi_x}(g)$

5) $0 \leq f_n \uparrow f \ (n = 1, 2, \cdots),\quad \sup_n M_{\Phi_x}(f_n) < +\infty$

$$\Longrightarrow M_{\Phi_x}(f) = \sup_n M_{\Phi_x}(f_n)$$

$M_{\Phi_x}(\cdot)$ も同じ性質を持ち，又上のことから $L_{\Phi_x}(X)$, $L_{\Phi_x}(X)$ は linear space になる。次に $L_{\Phi_x}(X)$ の dual $\overline{L_{\Phi_x}}(X)$ を定義する。

<u>定義</u>

$$\overline{L_{\Phi_x}}(X) \equiv \left\{ \varphi;\ L_{\Phi_x}(X) \text{上の線型汎函数},\ \sup_{M_{\Phi_x}(f) \leq 1} |\varphi(f)| < +\infty \right\}$$

$$\overline{M_{\Phi_x}}(\varphi) \equiv \sup_{f \in L_{\Phi_x}(X)} \{ |\varphi(f)| - M_{\Phi_x}(f) \} \qquad (\varphi \in \overline{L_{\Phi_x}}(X))$$

定理　$g \in L_{\Psi_x}(X)$;　$\bar{g}(f) \equiv \int_X f(x)g(x)\,d\lambda(x)$　$(f \in L_{\Phi_x}(X))$

により定義すると，$\bar{g}(\cdot) \in \overline{L_{\Phi_x}}(X)$ で，

$$\overline{M_{\Phi_x}}(\bar{g}) = M_{\Psi_x}(g)$$

次に $L_{\Phi_x}(X)$ ($L_{\Psi_x}(X)$) に norms $\|\cdot\|_{\Phi_x}$，$\|\cdot\|_{(\Phi_x)}$ ($\|\cdot\|_{\Psi_x}$，$\|\cdot\|_{(\Psi_x)}$) を導入する。　$f \in L_{\Phi_x}(X)$ に対して

$$\|f\|_{\Phi_x} \equiv \sup_{\overline{M_{\Phi_x}}(\varphi) \leq 1} |\varphi(f)| \left(= \sup\left\{ \left|\int_X g(x) f(x)\,d\lambda(x)\right| ; g \in L_{\Psi_x}, M_{\Psi_x}(g) \leq 1 \right\} \right)$$

$$\|f\|_{(\Phi_x)} \equiv \inf\left\{ \frac{1}{c} ; c > 0,\ M_{\Phi_x}(cf) \leq 1 \right\}$$

定理　$f \in L_{\Phi_x}(X)$，$g \in L_{\Psi_x}(X)$ に対して

$$\|f\|_{\Phi_x} = \inf\left\{ \frac{1 + M_{\Phi_x}(cf)}{c} ; c > 0 \right\}$$

$$\left| \int_X f(x)\, g(x)\, d\lambda(x) \right| \leq \begin{cases} \|f\|_{\Phi_x} \cdot \|g\|_{(\Psi_x)} \\ \|f\|_{(\Phi_x)} \cdot \|g\|_{\Psi_x} \end{cases}$$

§ 2

__定義__　　Eは X 上の実可測函数の集合とする。Eが次の i)~iii) を満すとき便宜上 E を M-set と呼ぶことにする。

i)　$^\forall f \in E\ ;\ ^\exists M_f > 0$　s.t　$-\infty \leq f(x) \leq M_f < \infty$　for $^\forall x \in X$

ii)　$^\forall c \in R,\ ^\forall f \in E \quad \Longrightarrow \quad c + f \in E$

iii)　$^\forall f \in C_R(X),\ ^\forall \varepsilon > 0\ ;\ ^\exists g \in E$　s.t

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

◎　μ は定理1まで X 上の regular probability measure とする。

__Lemma 1__　　E; M-set,　$f \in L_{\Phi_x}(X)$,　$\|f\|_{\Phi_x} \leq 1$,

$\int_X \log|f(x)|\, d\mu(x)$ が $\pm\infty$ もこめて定義されている

$\Longrightarrow$　$^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists g \in E$　s.t

$\|\exp(g)\|_{\Phi_x} \leq 1$,　$\int_X g\, d\mu(x) \geq \int_X \log|f(x)|\, d\mu(x) - \varepsilon$

[注]　$\int_X \log|f(x)|\, d\mu(x) = \infty$ のときは; $^\forall c > 0,\ ^\exists g \in E$　s.t

$\|\exp(g)\|_{\Phi_x} \leq 1$,　$\int_X g\, d\mu(x) > c$　なることを意味する。

__Lemma 2__　　もし μ が λ に関して絶対連続でない

$\Longrightarrow$　$^\forall K > 0,\ ^\exists f \in L_{\Phi_x}(X)$　s.t

$\|f\|_{\Phi_x} \leq 1$,　$\int_X \log|f(x)|\, d\mu(x) > K$

定義　$I_x(u) \equiv (u\phi_x(u))^{-1}$ $(x\in X,\ u\geq 0)$ により定義する。
このとき $\phi_x(u)$ の性質により，Borel 可測函数 $f(x)$ に対して
$I_x(|f(x)|)$ は Borel 可測函数である。

Lemma 3　もし μ が λ に関して絶対連続

$\Longrightarrow$ i) $^\exists\alpha_\mu>0$ s.t. $\int_X \Phi_x(\phi_x(I_x(\alpha_\mu \frac{d\mu}{d\lambda}(x))))\,d\lambda(x)=1$

ii) もし，$c>0$

$\Longrightarrow$ $\int_X \log I_x(c\frac{d\mu}{d\lambda}(x))\,d\mu(x)$ は有限か又は $+\infty$.

定理 1　E ; M-set

(1) もし μ が λ に関して絶対連続

$\Longrightarrow$ $^\exists\alpha_\mu>0$ (Lemma 3 の α_μ) s.t.

$$\inf\{\|\exp(f)\|_{\Phi_x}\ ;\ f\in E,\ \int_X f(x)\,d\mu(x)\geq 0\}$$
$$=\alpha_\mu \exp\left(-\int_X \log I_x(\alpha_\mu\frac{d\mu}{d\lambda}(x))\,d\mu(x)\right)$$

(2) もし，μ が λ に関して絶対連続でない

$\Longrightarrow$ $\inf\{\|\exp(f)\|_{\Phi_x}\ ;\ f\in E,\ \int_X f(x)\,d\mu(x)\geq 0\}=0$

[証明]　Lemma 1 より

$$(*)\begin{cases}\inf\{\|\exp(f)\|_{\Phi_x}\ ;\ f\in E\ ,\ \int_X f\,d\mu\geq 0\ \}\\ =\exp(-\sup\{\int_X f(x)\,d\mu(x)\ ;\ f\in E,\ \|\exp(f)\|_{\Phi_x}\leq 1\})\\ =\exp(-\sup\{\int_X \log|f(x)|\,d\mu(x)\ ;\ \ \|f\|_{\Phi_x}\leq 1\})\end{cases}$$

この等式と Lemma 2 より (2) は明らか。次に (1) を示す。

$h(x) \equiv \alpha_\mu^{-1} I_X(\alpha_\mu \frac{d\mu}{d\lambda}(x))$ とおく。但し $\alpha_\mu > 0$ は Lemma 3 のもの。

このとき; $\|h\|_{\Phi_X} \le 1$, $\sup\{\int_X \log|f(x)|\,d\mu(x)\ ;\ \|f\|_{\Phi_X} \le 1\} = \int_X \log h(x)\,d\mu(x)$

なることが容易に確かめられる。 従って (*) より

$$\inf\{\|\exp(f)\|_{\Phi_X}\ ;\ f \in E,\ \int_X f(x)\,d\mu(x) \ge 0\}$$

$$= \alpha_\mu \exp\left(-\int_X \log I_X\left(\alpha_\mu \frac{d\mu}{d\lambda}(x)\right) d\mu(x)\right) \qquad \text{q.e.d} //$$

§3 Logmodular Algebra

$A \subset C(X)$ を logmodular 環とする。 m を A 上の non-zero multiplicative measure とする。 このとき Jensen's inequality が成り立つ。 i.e $\log|\int_X f\,dm| \le \int_X \log|f|\,dm$ for $\forall f \in A$

従って特に, $f \in A^{-1} = \{f \in A\ ;\ f\ ;\ \text{invertible in } A\}$ に対しては, 等号が成り立つ。

<u>定理2</u> A; X 上の logmodular 環。 m; A 上の non-zero multiplicative measure とする。 $A_0 \equiv \{f \in A\ ;\ \int_X f\,dm = 0\}$ とおく。

(1) もし m が λ に関して絶対連続

$$\Longrightarrow \inf\{\|1+f\|_{\Phi_X}\ ;\ f \in A_0\} = \alpha_m \exp\left(-\int_X \log I_X\left(\alpha_m \frac{dm}{d\lambda}(x)\right) dm(x)\right)$$

ここで $\alpha_m > 0$ は Lemma 3 (i) に現れたもの

(2) もし m が λ に関して絶対連続でない

$$\Longrightarrow \inf\{\|1+f\|_{\Phi_X}\ ;\ f \in A_0\} = 0$$

[証明]　$E_1 \equiv \{\log|f(x)|; f \in A^{-1}\}$,　$E_2 \equiv \{\log|f(x)|; f \in A\}$　とおく.

明らかに, E_1, E_2 は M-set である。　又,

$A_1 \equiv \{1+f; f \in A_0\}$,　$A_1^+ \equiv \{cg; |c| \geq 1, g \in A_1\}$

$|A_1| \equiv \{|h|; h \in A_1\}$, $|A_1^+| \equiv \{|h'|; h' \in A_1^+\}$　とおく。この時,

(i)　$\inf\{\|h\|_{\Phi_x}; h \in A_1\} = \inf\{\|h\|_{\Phi_x}; h \in |A_1|\}$

$= \inf\{\|h\|_{\Phi_x}; h \in |A_1^+|\} = \inf\{\|h\|_{\Phi_x}; h \in A_1^+\}$。これは明らか.

(ii)　$\inf\{\|\exp(f)\|_{\Phi_x}; f \in E_i, \int_X f\,dm \geq 0\}$ = (1) の右辺　$(i=1,2)$

[理由]　E_i $(i=1,2)$ が M-set なることと, 定理 1 より。

(iii)　$\inf\{\|\exp(f)\|_{\Phi_x}; f \in E_2, \int_X f\,dm \geq 0\} \leq \inf\{\|h\|_{\Phi_x}; f \in |A_1|\}$

[理由]　$^\forall f \in A_0$,　$\int_X \log|1+f|\,dm \geq \log|\int_X (1+f)\,dm| = 0$

故に,　$|A_1| \subset \{\exp(g); g \in E_2, \int_X g\,dm \geq 0\}$

(iv)　$\inf\{\|h\|_{\Phi_x}; h \in |A_1^+|\} \leq \inf\{\|\exp(f)\|_{\Phi_x}; f \in E_1, \int_X f\,dm \geq 0\}$

[理由]　$^\forall f \in A^{-1}$,　$\int_X \log|f|\,dm \geq 0 \Rightarrow \log|\int_X f\,dm| \geq 0$

故に, $c \equiv \int_X f\,dm$ とおくと,　$|c| \geq 1$

従って,　$f = c(1+\frac{1}{c}(f-c)) \in A_1^+$

故に,　$\{\exp(f); f \in E_1, \int_X f\,dm \geq 0\} \subset |A_1^+|$

(i)〜(iv) と前の Lemmas より 定理 2 を得る

q.e.d //

注意

$1 < p < \infty$ のとき, $\varphi_x(t) \equiv t^{p-1}$ $(x \in X,\ t \geq 0)$ とおく。

このとき, $\Phi_x(u) = \frac{1}{p}u^p$, $\Psi_x(u) = \frac{1}{q}u^q$ $(x \in X,\ u \geq 0)$

但し, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。 従って, $L_{\Phi_x}(X) = L^p(d\lambda)$, $L_{\Psi_x}(X) = L^q(d\lambda)$

尚, このとき, $\alpha_m = q$ となる。 更に, もし, m と λ が

互いに絶対連続なら, $d\lambda = h\,dm$ とおくと, 定理2は,

$$\inf\left\{ \int_X |1-f|^p h\,dm \;;\; f \in A_0 \right\} = \exp\left(\int_X \log h\,dm\right)$$

となる。

References

1) T. Gamelin ; Uniform algebra ; Prentice Hall Englewood Cliffs, N. J. 1969

2) K. Hoffman ; Banach space of analytic functions ; Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1962

3) H. Nakano ; Modular semi-ordered linear space, Maruzen, Tokyo, 1950

4) H. Nakano ; Topology and linear topological spaces,
Maruzen , Tokyo , 1951

5) K. Urbanik; Szegö's theorem for Orlicz spaces,
Bull. Acad , Polonaise des Sci 14,
P 503 ~ 509 (1966)