

抽象ハーディ空間における共役化可能な有界函数  
について

東北大 理 数田公三

1. ここで,  $(0, 2\pi)$  上の有界函数の共役函数に対する色々な不等式が, 抽象ハーディ空間の設定の下でも大体平行に成り立つことを見ると同時に, (1) < つか, 古典的な場合の別証が示されることを見てみたい。まず, 空間の設定を再び一度おさえておく。 $(X, \Sigma, \mu)$  は確率空間であり,  $H = H(X, \Sigma, \mu)$  は抽象  $H^p$  空間とする。すなわち,  $H$  は  $L^\infty(\mu)$  の自明でない weak\* 閉な subalgebra で,  $1 \in H$ ,  $\int u v d\mu = \int u d\mu \int v d\mu$  ( $u, v \in H$ ) が成り立つとする。  $m$ -可測函数の全体  $L(m)$  の元  $u_n, u$  に対して,  $u_n \rightarrow u$  は  $u_n$  が  $u$  に  $m$ -a.e. 収束することと約束する。古典的な時のクラス  $N^*$  に相当するクラス  $H^\#$  を次のように導入する。

$$L^\# = \{ f \in L(m); \exists u_n \in H, \text{s.t. } |u_n| < 1, u_n \rightarrow 1, u_n f \in L^\infty(m) \}.$$

$$H^\# = \{ f \in L(m); \exists u_n \in H, \exists F \in L^\# \text{ s.t. } |u_n| \leq F, u_n \rightarrow f \}.$$

$$L^\# \text{ と } H^\# \text{ も algebra で } L^\infty \subset L^\#, H \subset H^\# \subset L^\#, H = H^\# \cap L^\infty.$$

$\varphi: u \in H \rightarrow \int u d\mu \in \mathbb{C}$  とすると,  $\varphi$  は  $H^\#$  上の乗法的線形形式  
 函数で, 次の意味で連続なものとして, 一意に拡張される.

$u_n, u \in H^\#$  から  $\exists F \in L^\infty, u_n \rightarrow u, |u_n| \leq F$  ならば  $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u)$ .

又  $H^+ = \{ f \in L^1(\mu); \operatorname{Re} f \geq 0, e^{-\alpha f} \in H, \forall \alpha > 0 \}$  とする.

$H^+ \subset H^\#$ .  $f \in H$  から  $\operatorname{Re} f \geq 0$  ならば  $f \in H^+$ .  $f_n \in H^+, f_n \rightarrow f$   
 ならば  $f \in H^+$ .  $f \in H^+$  が null 函数でないならば  $\forall f \in H^+$ .

さて共役函数は次のように定義する.

定義 1.  $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$  に対して, (1)  $\exp t(f+ig) \in H^\#$  から  
 $\forall t \in \mathbb{R}$  に対して成り立つような  $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$  が存在するとし,  $f$   
 が共役化可能であるとい). この時,  $\varphi(\exp t(f+ig))$   
 $= e^{\alpha t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$  とする  $\alpha \in \mathbb{R}$  と  $g$  は一意に定まる.  $\alpha$  を  $f$   
 $f$  の共役函数と呼び  $\tilde{f}$  で表わす. (g)

$f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$  に対しては, (1) と  $\exp t(f+ig) \in H \quad \forall t \in \mathbb{R}$  は同  
 値である.  $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$  が共役化可能の時  $\varphi(\exp t(f+ig)) = e^{\alpha t} \int f d\mu$   
 $t \in \mathbb{R}$  で  $\tilde{f} \in L^1(\mu)$  ( $\alpha < \infty$ ) で  $\int \tilde{f} d\mu = 0$  である. すべての  
 $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$  が共役化可能ならば  $\mu$  は  $\varphi$  に対する Szegő measure (

$\alpha \in L^1(\mu), \alpha \geq 0 \int u \alpha d\mu = \int u d\mu \quad \forall u \in H \Rightarrow \alpha = 1$ . 又は,  $H$  が  
 weak\* Dirichlet というのも同値) であり, 逆も正しい).

したがって次の近似定理が成り立つ.

補題 1.  $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$  が共役化可能とすると, 次のような  $h_n \in H$   
 が存在する.

$$i) h_n \longrightarrow f + i\tilde{f}$$

$$ii) |h_n| \cong |f + i\tilde{f}|$$

$$iii) |\operatorname{Re} h_n| \cong |f|$$

$$iv) \int \operatorname{Re} h_n \, d\mu = 0$$

$$v) \int h_n \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu.$$

証明 (König).  $s = u + iv \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha|u| < 1$  ならば,

$$(2) \left| \frac{s}{2} \left( \frac{1}{1+\alpha s} + \frac{1}{1-\alpha s} \right) \right| \leq \frac{|s|}{1-(\alpha u)^2}$$

$$(3) \left| \operatorname{Re} \frac{s}{2} \left( \frac{1}{1+\alpha s} + \frac{1}{1-\alpha s} \right) \right| \leq \frac{|u|}{1-(\alpha u)^2}.$$

$$h = f + i\tilde{f}$$

$\tau > 0$ ,  $c = \|f\|_\infty \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$  は  $\alpha c < 1$  とする。  $1 - \alpha c > 0$  かつ

$\forall t > 0$  に対して  $\tau \exp -t(1+\alpha h) \in \exp -t(1-\alpha c) \leq 1$  であるから

$\tau \exp -t(1+\alpha h) \in H^\# \cap L^\infty = H$ .  $f, \tau$

$$(4) \frac{1}{1+\alpha h} = \int_0^\infty e^{-t(1+\alpha h)} \, d\mu \in H.$$

$$h_\alpha = (1-(\alpha c)^2) \frac{h}{2} \left( \frac{1}{1+\alpha h} + \frac{1}{1-\alpha h} \right) = (1-(\alpha c)^2) \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{1}{1-\alpha h} - \frac{1}{1+\alpha h} \right)$$

と  $\alpha < c$ ,  $h_\alpha \in H$  である。  $\pm$  は (1), (2), (3) により  $|h_\alpha| \leq |h|$ ,

$|\operatorname{Re} h_\alpha| \leq |f|$  である。  $f \in L^\infty$  である限り可能と...  $\int = \int \tau$

$$\varphi(e^{-t(1+\alpha h)}) = \int e^{-t(1+\alpha h)} \, d\mu = \exp -t(1+\alpha \int f \, d\mu) \text{ である。}$$

$f, \tau$  (4) により  $\int \frac{1}{1+\alpha h} \, d\mu$  は実数である。  $\varphi$  により  $\int \operatorname{Re} h_\alpha \, d\mu$

$= 0$ 。  $\pm \tau \alpha_n \in \alpha_n \rightarrow 0$  である勝手な  $1 - \alpha_n c > 0$  である正数列

$\Rightarrow$   $h_n = h_{\alpha_n}$  とする。  $(e^{zh_n}) \leq e^{t|\operatorname{Re} h_n|} \leq e^{t|f|} \in L^\infty(\mu) \subset L^1$

よって  $\varphi$  の連続性から

$$\varphi(e^{zh_n}) = e^{t\varphi(h_n)} \longrightarrow \varphi(e^{zh}) = e^{t\int f d\mu} \quad (t > 0).$$

よって  $\varphi(h_n) = \int h_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu$ .  $\square$

あと二つの補題を挙げておく。

補題 2.  $u \in H$ ,  $|u| \leq 1$ ,  $\int u d\mu = b$ ,  $|b| < 1$  とする。すると、

$\mathbb{T}$  の  $u$  の値が可測集合  $E \subset \mathbb{T} = \{|z|=1\}$  に対して

$$\int_E d\theta \int_{\{|u(z)| < 1\}} \frac{1-|u|^2}{|e^{i\theta}-u|^2} d\mu = \int_E \frac{1-|b|^2}{|e^{i\theta}-b|^2} d\theta - 2\pi m\{u(z) \in E\}.$$

とくに,  $|u|=1$ ,  $\int u d\mu = 0$  のとき

$$m\{u(z) \in E\} = \frac{1}{2\pi} |E|.$$

[5, p. 90]

24 [6, p. 519]

補題 3.  $u$  は上と同じとする。  $f(z)$  は  $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$  で調和かつ

$\sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) とする。すると合成函数  $f \circ u(z)$

$= f(u(z))$  は well-defined である。

$$i) \left( \int |f \circ u|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \frac{1+|b|}{1-|b|} \right)^{1/p} \|f\|_p,$$

$$ii) \int f \circ u d\mu = f(\int u d\mu).$$

[6, p. 521].

2. Zygmund-Pichorides type の結果。

補題 1 から, 次の Pichorides の不等式が示せる。

定理 1.  $f \in L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mu)$  は実数値可積分である。かつ  $|f| \leq k < \frac{\pi}{2}$  である。

$$\left\| \sinh \frac{f}{2} \right\|_2 \leq (\cos k)^{-1/2} \left\| \sin \frac{f}{2} \right\|_2$$

証明.  $h = f + i\tilde{f}$  とし、 $h_n$  を補題 1 で保証した  $h$  に  $h_n = u_n + i\tilde{u}_n$  の列をとる。すなわち  $u_n \in H$  と  $\int \cos h_n d\mu = \cos \int h_n d\mu \in \mathbb{R}$ 。すなわち

$$\begin{aligned} \int \cosh v_n \cos u_n d\mu &= \int \operatorname{Re} \cos h_n d\mu = \int \cos h_n d\mu \\ &= \cos \int h_n d\mu = \cos \int u_n d\mu \quad (\int h_n d\mu = \int u_n d\mu) \end{aligned}$$

したがって、 $\cos u_n \geq \cos |f| \geq \cos k$  ( $k > |u_n|$ ) である。

$$\begin{aligned} \cos k \int \sinh^2 \frac{u_n}{2} d\mu &= \cos k \left( \int (\cosh v_n - 1) d\mu \right) \\ &\leq \int (\cosh v_n - 1) \cos u_n d\mu = \cos \int u_n d\mu - \int \cos u_n d\mu \\ &= \int \sin^2 \frac{u_n}{2} - \sin^2 \left( \frac{u_n}{2} \right) d\mu \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  とし、求める不等式を得る。  $\square$

~~exp ± i k~~ exp  $\pm i k$  に上と同様に  $i$  の議論をして、Zygmund の不等式を一般化できた。

定理 2.  $f \in L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mu)$  は実数値可積分であり、 $|f| \leq 1$ ,  $0 < k < \frac{\pi}{2}$  である。

$$\int \exp k|f| d\mu \leq \frac{2}{\cos k}$$

注意. 定理 1 から  $f \in L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\mu)$  が実数値可積分ならば  $|f| < 1$  である。

$0 < h < \frac{\pi}{2}$  に対し

$$m\{x \in X; |\tilde{f}(x)| > y\} \leq 2\pi \sin^2 \frac{h}{2} \cos^{-1} h \sinh^2 \frac{h}{2} y, \quad y > 0$$

と  $\pi$  が、実は  $\pi \cos h \leq \cos h \exp -\frac{\pi}{2} y$  であることを示せる。それについては、又後程にしたい。

### 3. Stein-Weiss 型の結果

補題 1, 2 を使って次の命題がよせられる。

定理 3.  $E \subset X$  は  $m$  可測集合で、 $\chi_E$  が共役化可能であるとす  
る。すると、すべての  $\{i\mathbb{R}\} \cup \{1+i\mathbb{R}\}$  上のルベグ可測集合  
 $F$  に対して

$$(*) \quad m\{x; (\chi_E + i\tilde{\chi}_E)(x) \in F\} = \frac{1}{2\pi} |h(F)|,$$

ここで、 $h(z)$  は  $\{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$  から単位円板  $\{|z| < 1\}$  への等角  
写像で、 $h(z) = \left[ \tan \frac{\pi}{2}(z - \frac{1}{2}) - \tan \frac{\pi}{2}(m(E) - \frac{1}{2}) \right] / \left[ 1 - \tan \frac{\pi}{2}(m(E) - \frac{1}{2}) \times \right.$   
 $\left. \tan \frac{\pi}{2}(z - \frac{1}{2}) \right]$  である。又  $| \cdot |$  は  $\mathbb{T} = \{|z|=1\}$  上の  
 $|\mathbb{T}| = 2\pi$  とするルベグ測度で、 $h(F) = \{z \in \mathbb{T}; z = h(w);$   
 $w \in F\}$ 。特に  $(*)$  の左辺は  $m(E)$  だけに依存することがわかる。

この系として Stein-Weiss の一般化及び、恒等への別証が  
得られる。

系 1.  $E$  は上と同じとする。  $\lambda_E(y) = m\{x; |\tilde{\chi}_E(x)| > y\}$  とす  
ると、

$$e^{-\pi i \lambda_E(y)} = \frac{\sinh \pi y + i \sin \pi m(E)}{\sinh \pi y - i \sin \pi m(E)}.$$

定理 3 の証明  $0 < m(E) < 1$  としよ。  $\alpha = \tan \frac{\pi}{2}(m(E) - \frac{1}{2})$  と

おこす,  $-1 < \alpha < 1$ ,  $\pm \tau$ ,  $g = \chi_E + i \tilde{\chi}_E$ ,  $f = \frac{\pi}{2}(g - \frac{1}{2})$  とおこす。

$\tan \frac{\pi}{2}(z - \frac{1}{2})$  は  $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$  と  $\{|w| < 1\}$  に等角写像す。

補題 1 より  $f_n = u_n + i v_n \in H$   $\tau$   $f_n \rightarrow f$ ,  $|u_n| \leq \frac{\pi}{2} |\chi_E|$ ,  $\varphi(f_n) = \int f_n dm$

$= \int u_n dm \rightarrow \int \operatorname{Re} f dm = \frac{\pi}{2}(m(E) - \frac{1}{2}) = \alpha$  と  $\tau$  3 列が存在す。若  $f_n =$

$\tau$  (2),  $e^{i f_n} \in H$ ,  $\operatorname{Re} e^{i f_n} = \cos u_n \geq 0$  と  $\tau$  3 かす,

$e^{i f_n} \in H^+$ 。よ  $\tau$   $e^{i f} \in H^+$  と  $\tau$  3。従  $\tau$   $e^{i f} + 1 \in H^+ \subset H^\#$

$\tau$   $(e^{i f} + 1)^{-1} \in H^+ \subset H^\#$ 。よ  $\tau$

$$\tan \frac{f}{2} = -i \frac{e^{i f} - 1}{e^{i f} + 1} \in H^\#.$$

$\pm$   $\tau$   $|\tan \frac{f}{2}| = 1$  と  $\tau$  3 かす  $\tan \frac{f}{2} \in H^\# \cap L^\infty = H$ 。  $-1 < \alpha < 1$

と  $\tau$  3 かす  $h(g) = \frac{\tan \frac{f}{2} - \alpha}{1 - \alpha \tan \frac{f}{2}} \in H$  と  $\tau$  3。又  $|\tan \frac{f}{2}| = 1$

よ  $|h(g)| = 1$  と  $\tau$  3。  $\pm$   $\tau$   $|\tan \frac{f_n}{2}| \leq 1$ ,  $f_n \rightarrow f$  と  $\tau$  3

よ  $\tau$  ~~4.1.12 の証明~~  $\tau$  3

$$\int (\tan \frac{f}{2}) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\tan \frac{f_n}{2}) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan \frac{\int f_n dm}{2} = \frac{\tan \alpha}{2} = \frac{\int \operatorname{Re} f dm}{2}$$

$$= \frac{\int \frac{\pi}{2}(m(E) - \frac{1}{2}) dm}{2} =$$

$$\int (\tan \frac{f}{2}) dm = (\int \tan \frac{f}{2} dm - \alpha) / (1 - \alpha \int \tan \frac{f}{2} dm) = 0.$$

$\{x: (\chi_E + i\tilde{\chi}_E)(x) \in F\} = \{x: h(g)(x) \in h(F)\}$  であるから、補題 2  
により

$$m\{x: (\chi_E + i\tilde{\chi}_E)(x) \in F\} = \frac{1}{2\pi} |h(F)|. \quad \square$$

系 1 の証明  $\alpha = \tan \frac{\pi}{2} (m(E) - \frac{1}{2})$  とおくと  $\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} = \sin \pi m(E)$ .

$\lambda_E^+(y) = m\{\tilde{\chi}_E(x) > y\}$  とおくと、定理 3 から

$$\lambda_E^+(y) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\frac{1}{i} \frac{1-ie^{\pi y}}{1+ie^{\pi y}} - \alpha}{1 - \frac{\alpha}{i} \frac{1-ie^{\pi y}}{1+ie^{\pi y}}} , \frac{\frac{1}{i} \frac{1+ie^{\pi y}}{1-ie^{\pi y}} - \alpha}{1 - \frac{\alpha}{i} \frac{1+ie^{\pi y}}{1-ie^{\pi y}}} \right|.$$

よって

$$e^{2\pi i \lambda_E^+(y)} = \frac{(1+\alpha^2) \sinh \pi y + (1-\alpha^2)i}{(1+\alpha^2) \sinh \pi y - (1-\alpha^2)i} = \frac{\sinh \pi y + i \sin \pi m(E)}{\sinh \pi y - i \sin \pi m(E)}.$$

同様にして  $\lambda_E^-(y) = m\{\tilde{\chi}_E(x) < -y\}$  として、同じ手順を得るから、  
合せて結果を得る。  $\square$

4. (より一般に) weak type の結果 (B. Davis の結果の拡張)

定理 4.  $f \in L^{\infty}_R(m)$  は実数値可変で  $0 \leq f \leq 1$  とする。  $a = \int f dm$   
とし、  $g(z)$  は  $\{z: |z| < 1\}$  から  $\{w \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$  への等角写像  
で  $g(0) = a$  をみたすものとする。すると  $\lambda > 0$  に対して

$$m\{x: \tilde{f}(x) \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\pi} |\{0 \leq \theta < 2\pi; \operatorname{Im} g(e^{i\theta}) \geq \lambda\}| \leq C e^{-\pi \lambda}$$

が成り立つ。



証明.  $v(x) = f(x) + i\hat{f}(x)$  とおくと, 前定理の証と同じで,

$g^{-1}(v) \in H$ ,  $|g^{-1}(v)| \leq 1$  と成す.  $u = g^{-1}(v)$  とおく.

さて,  $\zeta = \rho e^{i\alpha} \in U = \{ |z| < 1 \}$  で  $\operatorname{Im} g(\zeta) \geq \lambda$  とする.  $\mu_{g(\zeta)}$

は  $\{ 0 < \operatorname{Re} z < 1 \}$  の境界上の  $g(\zeta)$  に関する調和測度とする.

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{\{ \operatorname{Im} g(e^{i\theta}) \geq \lambda \}} \frac{1-\rho^2}{|e^{i\theta} - \rho e^{i\alpha}|^2} d\theta \quad \text{とおくと}$$

$A$  は  $\partial U$  上の  $\zeta$  に関する  $\{ \operatorname{Im} g(e^{i\theta}) \geq \lambda \}$  の調和測度である.  $g$  は等角写像であり, 調和測度は等角写像で不変であるから,

$$A = \mu_{g(\zeta)}(\{ iy; y \geq \lambda \} \cup \{ 1+iy; y \geq \lambda \}).$$

$\operatorname{Im} g(\zeta) \geq \lambda$  であるから,  $\{ 0 < \operatorname{Re} z < 1 \}$  での調和測度の対称性から  $A \geq \frac{1}{2}$  を得る. よって,  $\operatorname{Im} v(x) = \hat{f}(x) \geq \lambda, 0 < f(x) < 1$

ならば (\*)  $\frac{1}{2\pi} \int_{\{ \operatorname{Im} g(e^{i\theta}) \geq \lambda \}} \frac{1-|u(x)|^2}{|e^{i\theta} - u(x)|^2} d\theta \geq \frac{1}{2}$  を得る.

又,  $\int u(x) dm = \int \mathcal{R}^{-1}(u(x)) dm = \mathcal{R}^{-1}(\int v(x) dm) = \mathcal{R}^{-1}(a) = 0$  であるから,

(\*) の両辺を  $\{ \operatorname{Im} v(x) = \hat{f}(x) \geq \lambda, 0 < \operatorname{Re} v(x) = f(x) < 1 \}$  上で  $m$  に

ついで積分して, 補題 2 を使えば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} |\{ \operatorname{Im} g(e^{i\theta}) \geq \lambda \}| - m\{x: u(x) \in \{ \operatorname{Im} g(e^{i\theta}) \geq \lambda \}\} \\ & \geq \frac{1}{2} m\{x: \hat{f}(x) \geq \lambda, 0 < f(x) < 1\}. \end{aligned}$$

よって

$$m\{x: \hat{f}(x) \geq \lambda\} + m\{x: \hat{f}(x) \geq \lambda, f(x) = 0 \text{ or } 1\} \leq \frac{1}{\pi} |\{ \operatorname{Im} g(e^{i\theta}) \geq \lambda \}|.$$

最後の評価は系(1)より従う。  $\square$

最後に証明をし、補題2と、補題2の中の  $u$  に対しては、 $0 < v < 1$  かつ

$$\int \frac{1 - |u(\omega)|^2}{|e^{i\theta} - u(\omega)|^2} d\mu = \frac{1 - |u_0|^2}{|e^{i\theta} - u_0|^2} \text{ となることから、次の定理を注意して}$$

おきたい、定理2も次から直ちに従う。

定理5.  $f, g$  は定理4と同じとする。すなわち、 $\Phi$  が  $(-\infty, \infty)$  上の非負値凸函数ならば

$$\int \Phi(\tilde{f}) d\mu \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\operatorname{Im} g(e^{i\theta})) d\theta.$$

### 参考文献

1. E. Davis, On the distributions of conjugate functions of nonnegative measures, Duke Math. J. 40(1973), 695-700.
2. S.K. Pichorides, On the conjugate of bounded functions, Bull. Amer. Math. Soc. 81(1975), 143-144.
3. E. Stein and G. Weiss, An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications, J. Math. Mech. 9(1959), 263-294.
4. Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, Wiley, New York, 1968.
5. K. Yabuta, On the distribution of values of functions in some function classes in the abstract Hardy space theory, Tohoku Math. J. 25(1973), 89-102.
6. K. Yabuta, On bounded functions in the abstract Hardy space theory II, Tohoku Math. J. 26(1974), 513-533.
7. A. Zygmund, Trigonometric series, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1968.
8. 藪田乙三, 抽象  $H^p$  空間について, 数学(論説), 27(1975), 221-230.
9. ———, 抽象ハーディ空間について, 数学(論説), 近刊.