数理解析研究所講究録
265巻 1976年 1-9

Countable spectrum をもつ測度について

神奈川大 工 泉池敬司
北大 応電研 清水菩宏

G を L.C.A. group としその dual group を $\hat{G}$ とする。$M(G)$ で G 上の bounded regular Borel measure よりなる, convolution multiplication, total variation norm による Banach algebra とする。$L^1(G)$ は G 上の Haar measure に絶対連続な bounded measure よりなる group algebra とする。Taylor[5] により, $M(G)$ の maximal ideal space はある compact abelian semigroup S 上の semicharacter $\hat{S}$ と1対1の対応があり, $M(G)$ は $M(S)$ に weak$*$ dense にうめ込まれている。$\mu \in M(G)$ の Gelfand 変換は $\hat{\mu}(f) = \int f d\mu \ (f \in \hat{S})$ で与えられる。今後 $\hat{S}$ を $M(G)$ の maximal ideal space とみる。$Sp(\mu) = \{\hat{\mu}(f) : f \in \hat{S}\}$ を $\mu \in M(G)$ の spectrum と呼ぶ。$M(G)$ の idempotent に関しては次の定理はよく知られている。

Cohen の idempotent 定理([3])

$\mu \in M(G)$ が idempotent $\Rightarrow$ $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i m_{H_i}$, ここで $\gamma_i \in \hat{G}$,

m_{H_i} は compact subgroup H_i 上の normalized Haar measure,

a_i は整数。

Shilov の idempotent 定理（[2]）

$\hat{S} \supset E$ は open, compact subset

$\Rightarrow$ $\eta \in M(G)$ が存在して, $\hat{\eta} = 1$ on E, $\hat{\eta} = 0$ on E^c である。

μ が idempotent ならば $Sp(\mu) = \{0, 1\}$ である。又 $Sp(\mu)$ が finite set ならば Cohen と Shilov の定理より $\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \gamma_j m_{H_j}$ と表わせる。ということは $Sp(\mu)$ が finite set になる μ は完全にわかっている。ここでは，我々は $Sp(\mu)$ が countable set であるものを考える。一つは G の L.C.A. group としての構造とどの様に関係しているか捕えることである。もう一つは $M(G)$ の中でどの様な性質を持っているかである。

用いる記号

$M_0(G) \equiv \{\mu \in M(G) ; \hat{\mu}(\gamma_\alpha) \to 0 \text{ if } \gamma_\alpha \in \hat{G}, \gamma_\alpha \to \infty \text{ in } \hat{G}\}$

$M_c(G) \equiv \{\mu \in M(G) :$ μ は continuous measure$\}$

$\mathrm{Rad}\, L^1(G) \equiv \{\mu \in M(G) ; \hat{\mu}(f) = 0 \ \forall f \in \hat{S} \setminus \hat{G}\}$

$\mu \in M(G)$ に対して $\mu^*(E) \equiv \overline{\mu(-E)}$, E は G の Borel subset.

$\mathfrak{M} \equiv \{\mu \in M(G) : \widehat{\mu^*}(f) = \overline{\hat{\mu}(f)} \ \forall f \in \hat{S}\}$ symmetric measure の集合

$\mu \in M(G)$ に対して $L^1(\mu) \equiv \{\lambda \in M(G) ; \lambda \ll \mu\}$

$\mathcal{L}(G) \equiv \sum L^1(G_\tau)$, ここで $\sum$ は G 上のもとの topology より強い L.C.A. group topology で全体を動く。G_τ はこの備わった L.C.A. group を表わす。

$A(G) \equiv \{\mu \in M(G)\,;\, Sp(\mu)$ は countable set$\}$。

§1. $\mathrm{Rad}\,L^1(G)$, $M_0(G)$, $M_c(G)$, $\mathcal{M}$ と $A(G)$ の関係と G の構造。

M. Zafran [6] は次の事を示した。

定理（Zafran） G は compact abelian group, $\mu \in M_0(G)$, $Sp(\mu) = \hat{\mu}(\hat{G}) \Rightarrow \mu \in \mathrm{Rad}\,L^1(G)$

ここで μ を定理の仮定を満たすものとすると, $\mu \in A(G)$ である。まずこの定理の拡張から初める。

定理 1. $A(G) \cap M_0(G) \subset \mathrm{Rad}\,L^1(G)$。

（証明） $\mu \in A(G) \cap M_0(G)$ かつ $\mu \notin \mathrm{Rad}\,L^1(G)$ とする。$h \in \hat{S} \setminus \hat{G}$ が存在して $\hat{\mu}(h) \neq 0$ と出来る。$\mu \in A(G)$ より $|\hat{\mu}(h)| > \varepsilon > 0$ に対して $E = \{f \in \hat{S}\,;\, |\hat{\mu}(f)| \geq \varepsilon\}$ は $\hat{S}$ で open compact になっている。Shilov の定理より $\eta \in M(G)$ で $\hat{\eta} = 1$ on E, $\hat{\eta} = 0$ on E^c とできる。$\mu \in M_0(G)$ より $E \cap \hat{G}$ は $\hat{G}$ の中で compact である。よって $\eta \in L^1(G)$。しかし $\hat{\eta}(h) \neq 0$ より $\eta \notin \mathrm{Rad}\,L^1(G)$。矛盾。

（注） 実はもう少し強い型で, $\mu \in A(G)$ に対して $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_1 \in M_0(G)$, $\mu_2 \perp M_0(G)$ とする時 $\mu_1 \in A(G)$ が証明される。

命題 2. 次は同値である。

1) $A(G) \cap M_0(G) = \mathrm{Rad}\, L^1(G)$.

2) $\mathrm{Rad}\, L^1(G) \subset A(G)$

3) G: compact

(証明) 1) ⇒ 2), 3) ⇒ 1) は明らか。 2) ⇒ 3). Gは$R^n \times H$ (Hは compact subgroup) なる open subgroup を持つ。$n \neq 0$ ならば 2) に矛盾する。故に $n = 0$, つまり Gは compact open subgroup Hを持つ。G/H が finite group であることを示せばよい。もし G/H が infinite discrete group であるならば, $\hat{\mu}(\widehat{G/H})$ が uncountable set になる $\mu \in M(G/H)$ が存在するから, $L^1(G)$に uncountable spectrum を持つ measure が存在する。よって $\mathrm{Rad}\, L^1(G) \subset A(G)$ に矛盾する。よって G/H は finite group。故に G は compact。

次に $A(G) \cap M_c(G)$について見ることにする。

命題 3. 次は同値。

1) $A(G) \cap M_c(G) = \{0\}$.

2) G は infinite compact subgroup を持たない。

(証明) 1) ⇒ 2) は明らか。 2) ⇒ 1) $A(G) \cap M_c(G) \ni \mu$, $\mu \neq 0$ とする。$\varepsilon > 0$ で $E = \{f \in \hat{S} : |\hat{\mu}(f)| > \varepsilon\}$ が open compact になるものがある。Shilov の定理より $\eta \in M(G)$, $\hat{\eta} = 1$ on E, $\hat{\eta} = 0$ on E^c なるものがある。Cohen の定理より $\eta = \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i m_{H_i}$。所で $\eta \in M_c(G)$ より H_i は infinite compact subgroup である。

2)に矛盾する。

命題4. 次は同値。

1) $A(G)\cap M_c(G)\subset M_0(G)$

2) $A(G)\cap M_c(G)\subset \mathrm{Rad}\,L^1(G)$

3) Gの infinite compact subgroup は全て open。

(証明) 2)⇒1), 1)⇒3)は明らか。3)⇒2) 命題3の2)⇒1)の証明と同じくすればよい。$\mu\in A(G)\cap M_c(G)$, $\mu\notin \mathrm{Rad}\,L^1(G)$ とするとある H_i は open でない compact subgroupになることに注意すればよい。

系5. 次は同値.

1) $A(G)\cap M_c(G)=\mathrm{Rad}\,L^1(G)$

2) Gは compact でその infinite compact subgroup は全て open。

(注) Gが上の2)をみたすものは, $G=\mathbb{T}\oplus H$ 又は $G=\Delta(p^\infty)\oplus H$ (Hは finite group)の時のみである。

次に $\mathfrak{M}$ と $A(G)$ の関係をみる。所で $\mu\in M(G)$ が finite spectrum を持つならば Cohen の定理より $\mu\in\mathcal{L}(G)$ である。又 $\mathcal{L}(G)\subset\mathfrak{M}$ はよく知られている事実である。そこで μ が countable spectrum を持てば, $\mu\in\mathcal{L}(G)$ が成立するのではという問題が出てくるが実はこれは成立しない。([1],[4])。しかし $\mu\in\mathfrak{M}$ であることは示すことができる。$f\in\hat{S}$ に対して,

$M(G) \ni \mu \longrightarrow \overline{\widehat{\mu^*}(f)}$ は又 complex homomorphism である。この homomorphism を f^* で表わす。$\mu \in M(G)$ が symmetric であることは $\hat{\mu}(f) = \hat{\mu}(f^*)$ $(\forall f \in \hat{S})$ と同値である。

定理 6.　$A(G) \subset \mathfrak{M}$。

(証明)　$\mu \in A(G)$ とする。任意の $f \in \hat{S}$ に対して十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon = \{g \in \hat{S} ; |\hat{\mu}(g) - \hat{\mu}(f)| < \varepsilon\}$ が open compact in $\hat{S}$ になる様にできる。Shilov の定理より $\eta \in M(G)$, $\hat{\eta} = 1$ on B_ε, $\hat{\eta} = 0$ on B_ε^c とできる。所で $\eta \in \mathfrak{M}$ より $\hat{\eta}(f) = \hat{\eta}(f^*)$ $(\forall f \in \hat{S})$ である。よって $f^* \in B_\varepsilon$。ε は十分小さくてもよいから $\hat{\mu}(f) = \hat{\mu}(f^*)$。よって $\mu \in \mathfrak{M}$。

§2.　$A(G)$ と $L^1(\mu)$。

ここでは次の定理を示したい。

定理 7.　G を metrizable L.C.A. group, $\mu \in A(G)$, $\mu \geqq 0$ とする。もし $Sp(\mu)$ の集積点は存在しても 0 のみ。

$\Rightarrow$ $L^1(\mu) \subset A(G)$。

いくつかの補題を用意する。

補題 8　X : infinite discrete abelian group

$\mu \in A(X)$, $\mu \geqq 0$, $\|\mu\|$ が $Sp(\mu)$ で isolated

$\Rightarrow$ $\mu = \sum_{j=1}^{n} r_j \delta_{x_j}$, ここで $r_j > 0$, $x_j \in X$ は finite order。

(証明略)

補題9. $\mu\in M(G)$, $\mu\geqq 0$, $\|\mu\|$ が $Sp(\mu)$ で isolated, H を G の open subgroup とする。

$\Rightarrow \mu=\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}*\lambda_i$, ここで x_i+H は G/H で finite order, $\lambda_i\in M(H)$

証明は補題8より明らか。

補題10. $G\supset H$ を compact metrizable subgroup とする。
$\mu=\sum_{j=1}^{n}\delta_{x_j}*\lambda_j$, x_j+H は G/H で finite order, $\lambda_j\in M(H)$
$\Rightarrow \hat{\mu}(\hat{G})$ は countable set.

(明らか)

[定理7の証明] $h\in\hat{S}$ に対して $\hat{\mu}(|h|)>0$ とする。
$\hat{S}^+=\{|f|; f\in\hat{S}\}$ とする時 $\hat{\mu}(\hat{S}^+)\setminus\{0\}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とおく。
$\hat{\mu}(|h|)=a_n$ とする。仮定より $E_n=\{f\in\hat{S}; \hat{\mu}(f)=a_n\}$ は open compact である。Shilov の定理より idempotent η_n で $\hat{\eta}_n=1$ on E_n, $\hat{\eta}_n=0$ on E_n^c なるものがある。$\eta_n=\sum_{i=1}^{m}b_i\gamma_i m_{H_i}$ とする。K_n として $\hat{m}_{H_i}(|h|)=1$ となる H_i より generate される compact subgroup とする。すると $f_n\in\hat{S}^+$, $f_n^2=f_n$ が存在して $f_n\leq|h|$, $|f_n\cdot h|=|f_n|$, $f_n\cdot h\in\hat{G}_{K_n}$ となる。ここで G_{K_n} は K_n を open compact にする G にもっとも強い L.C.A. group topology が備わったものを表わす。又 $\hat{\mu}(f_n)=a_n$ でもある。よって $f_n=|h|$ a.e. μ である。そこで $\nu\ll\mu$ とする。$\hat{\nu}(h)=\hat{\nu}(h\cdot f_n)\in\nu(\hat{G}_{K_n})$。よって

$\hat{\nu}(\hat{S}) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{\nu}(\hat{G}_{K_n}) \cup \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{\nu}_n(\hat{G}_{K_n}) \cup \{0\}$, ここで ν_n は ν の $M(G_{K_n})$ に含まれる部分とする。所で $\nu_n \ll \mu_n$ であり μ_n は $G = G_{K_n}$ とした時 補題9の条件をみたすから $\mu_n = \sum_{j=1}^{m} \delta_{x_j^{(n)}} * \lambda_j^{(n)}$ と書ける，ここで $\lambda_j^{(n)} \in M(K_n)$, $x_j^{(n)} + K_n$ は G/K_n で finite order をもつ。補題10より $\hat{\nu}_n(\hat{G}_{K_n})$ は countable set。故に $Sp(\nu)$ は countable set である。

(注) 定理7において，metrizable の条件はなしでよいのかはまだわかっていない。しかし $\mu \geqq 0$, $Sp(\mu)$の集積点はあってもOのみ，の条件はそれぞれはずせない。

§3. 一般には $A(G) \not\subset \mathcal{K}(G)$ であるが，ここで $\mu \in A(G)$ に対してある compact subgroup H に対して $\mu \in \mathrm{Rad}\, L^1(H)$ になるための条件を最後に与える。

定理11. G を compact metrizable abelian group とする。次は同値である。

1) $Sp(\lambda) \subset \hat{\lambda}(\hat{G}) \cup \{0\}$ $\forall \lambda \in L^1(\mu)$

2) $Sp(\lambda) \subset \hat{\lambda}(\hat{G}) \cup \{0\}$ $\forall \lambda \in L^1(\mu)$, $\lambda \geqq 0$

3) compact subgroup H があって $\mu \in \mathrm{Rad}\, L^1(H)$

(証明略)

(注) metrizable の条件は必要である。

References

[1] K. Izuchi, On a problem of J.L. Taylor, Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975).

[2] C.E. Rickart, General theory of Banach algebras, Van Nostrand 1960.

[3] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience 1962.

[4] T. Shimizu, Independent sets and measure algebras, to appear.

[5] J.L. Taylor, Measure algebras, Regional conf. ser. Math. (AMS) 1973.

[6] M. Zafran, On the spectra of multipliers, Pacific J. Math 47 (1973), 609-626.