

Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換について (I)

京大 理 室政知

§0 序

Prehomogeneous vector space (G, V, \mathcal{F}) を考える。
その real form $(G_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}, \mathcal{F})$ をひきつづめる。そして $|\mathcal{F}|^S$
という hyperfunction の Fourier 変換を求めることを考
える。ある条件のもとで、この問題は、zero section と 原
点の conormal における、 $|\mathcal{F}|^S$ の 同位数の関係を求めるこ
とであることが佐藤幹夫氏によ、指摘され、具体的にその
関係を求めるアルゴリズムが、柏原正樹氏によ、はじめ
て決定された。(柏原-三輪 [1] 参照) そして具体的な計
算は、鈴木 [2] によ、こ、いっつかなされている。

しかしながら、常に計算が可能であったわけではない。た
とえば、 $G = GL(n, \mathbb{R}) \times SO(p, q)$, p or $q < n$ の相対
不変式の Fourier 変換は、柏原-三輪 [1] の方法によ、こ
だけでは、不可能である。

この場合には、二次型式と言われる型の、相対不変式の、
 同伴数のつながりの公式をあてはめることにより、計算が
 できる。その公式は、相原正樹氏により、提出された。([3]
 を参照)

今日の講演では、次のことが、なされた。

1) [3] においては、二次型式の局所化を行って、公式を
 導いたが、さらに一般の *prehomogeneous vector space* の
 相対不変式の局所化、およびつながりの公式の予想が提出
 され、Matrix の determinant, binary cubic forms の dis-
 criminant などにおいて実際正しいことが示された。

$$2) \text{ i) } G = GL(n, \mathbb{R}) \times SO(p, q, \mathbb{R}) \quad V = M(n, m, \mathbb{R})$$

$$f = \det X I_{p, q} {}^t X \quad [E \in L \quad X = m \times n \text{ 行列}]$$

$$\text{ii) } G = GL(n, \mathbb{C}) \times SU(p, q, \mathbb{C}) \quad V = M(n, m, \mathbb{C})$$

$$f = \det X I_{p, q} {}^t \bar{X}$$

$$\text{iii) } G = GL(n, \mathbb{H}) \times SU(p, q, \mathbb{H}), \quad V = M(n, m, \mathbb{H})$$

$$f = \det X I_{p, q} {}^t \bar{X}$$

の相対不変式の Fourier 変換の計算がなされ、これによつて P. 8 に条件のつかない公式が出た。

その後の発展、および計算などは、すべて次回の報告にゆずり、今回は、とくに計算のやり方と結果を中心にしておいて報告する。公式の並びかたの詳しいことは、[3]の前半に示してある。全体を通じて (G, V, f) は regular であることを仮定する。

文献

- [1] 柏原-三輪 Micro-local calculus と 概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換
(数研講究録 238, p60 ~ p147)
- [2] 鈴木利明. 概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換について (修士論文)
- [3] 佐藤-柏原-三輪-塚 Imaginary Lagrangian の現われの Fourier 変換について
(数研講究録 "超函数と線型微分方程式 IV" に出版予定)

§1 計算法及び簡略化.

(G, V, f) を (Complex) prehomogeneous vector space としよう。 $(G_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}, f)$ とそのひとつの Real form とする。すると $V_{\mathbb{R}} = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_N$ と Connected Component 分解をとることが出来る。そこで、

$$|f|_i^S = \begin{cases} |f(x)|^S & x \in V_i \\ 0 & x \notin V_i \end{cases}$$

とおいたとき、 $\sum_{i=1}^N C_i^0 |f(x)|_i^S$ の Fourier 変換を考える。

Definition (同伴数).

$\mathcal{M} \in \mathcal{F}^S$ の \mathcal{H} に \mathcal{M} を Maximally over determined system とする。そして $\text{Supp}(\mathcal{M}) = \cup \Delta_i \subset T^*V$ を適切に成分分解とある Δ_i が simple な Lagrange mf とするとき Δ_i は real に制限して $\Delta_i^{\mathbb{R}} = \cup \Delta_i' \subset \mathcal{F}S^*V_{\mathbb{R}}$ の各 Connected Component 上の solution の base として $|f_{\Delta_i}|^S \sqrt{|\omega_{\Delta_i}| dx}$ ととることが出来る。この Constant 係数によつて \mathcal{M} の solution をあらわすことが出来る。この Constant $C_i^0 \in \mathcal{M}$ の Δ_i' の同伴数という。($|f_{\Delta_i}|^S$, ω_{Δ_i} の定義については、柏原-三輪を参照のこと。)

さて Δ_i の同伴数たち (C_i^0) と Δ_i' の同伴数たち (C_i^0') の間には、線型な関係がある。これを同伴数の

間のつながりの行列という。とくに, zero section V と
原点, の conormal V^* は V の support に存している。

以下, (G, V, f) は regular であることを仮定する。
すると, $V_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{R}}^*$ の Connected Component の数は同じである。
同位数の間のつながりの行列を $A(S)$ とするとき,
Fourier 変換は次の式で与えられる。

Theorem (柏原)

$$\begin{bmatrix} |f(x)|_1^S \\ \vdots \\ |f(x)|_N \end{bmatrix} = \int (\mathbb{R}\pi)^{-\frac{n}{2}} |C_0|^S |C_1|^{-1} A(S) \begin{bmatrix} |f^*(y)|_1^{-S-\frac{n}{r}} \\ \vdots \\ |f^*(y)|_N^{-S-\frac{n}{r}} \end{bmatrix} \exp \pi i \langle x, y \rangle dy$$

$$\begin{cases} C_0 = f^*(y) f(\text{grad}_y \log f^*(y)) & r = \text{deg } f \\ C_1 = f^*(y)^{\frac{2n}{r}} \text{Hess } \log f^*(y) & n = \dim V. \end{cases}$$

ただし, $D_{y_i} = \partial_{y_i}$ は, $-D_{y_i} \exp \langle x, y \rangle = x_i \exp \langle x, y \rangle$ とする。
ように定義して, $\text{grad}_y = (D_{y_1}, \dots, D_{y_n})$ である。そして
Hess は $d \text{grad}_y$ で与えられる。([3] 参照)

ただしこれは相対不変式が, 一個の場合である。多数の場合も, 同様の考察はできる。

さてこの定理によって, $V_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{R}}^*$ の間の同位数のつながりの行列を求めることに問題は帰着された。柏原-三輪においては, これを求めるために, $V_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{R}}^*$ までを余次元

1 の Lagrange mfs で、つなぎ、その間の同伴数の関係を求め、それを総和あることにより、 $V_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{R}}^*$ の間の同伴数のつながりの行列を求める方法を示した。これは言わば、 \mathcal{X}^S という、とも基本的な Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換を何度もや、たものであると思、これもよい。あるいは、 \mathcal{F}^S のみならず、Maximally overdetermined system を Micro-local に、 \mathcal{X}^S のみならず、Maximally overdetermined system に、直して、つながりの行列を求めたのであ、た。

しかしながら、すでに、Fourier 変換のわか、こいる、Prehomogeneous vector space の相対不変式の Complex power が、みならず、Maximally overdetermined system が、途中に出てくれば、それをそのまま適用すれば、よいはずで、これにより、計算は簡略化されるはずである。そこで次の予想を提出する。

Conjecture

あるきやくな、相対不変式-個の regular prehomogeneous vector space (G, V, \mathcal{F}) において、

$$\begin{bmatrix} |\mathcal{F}|_1^s \\ \vdots \\ |\mathcal{F}|_2^s \end{bmatrix} \underset{V^*}{=} \int (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |C_0| \sqrt{|C_1|} \tau(A(S)) \begin{bmatrix} |\mathcal{F}^*|_1^{-s-\frac{n}{2}} \\ \vdots \\ |\mathcal{F}^*|_2^{-s-\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \exp \tau \langle x, y \rangle dy$$

$$C_0 = f^*(y) f(\text{grad log } f^*(y))$$

$$r = \text{deg } f.$$

$$C_1 = f^*(y)^{\frac{2n}{r}} \text{Hess. log } f^*(y)$$

$$n = \dim V$$

が成立してゐるとする。それとさらに別の Prohomogeneous vector space (G', V', f') があって、その相対不変式 f' の Complex power f'^s のための Maximally overdetermined system $\mathcal{H}\mathcal{C}_{f'^s}$ の局所化 (すなわち f'^s のための $\mathcal{H}\mathcal{C}_{f'^s} \in$ Micro-local に quantized contact transformation で変換すること) によつて f' のための Maximally overdetermined system $\mathcal{H}\mathcal{C}_{f'^\lambda}$ ができてきたとする。このとき f'^λ の原点の conormal, zero section に対応する $\mathcal{H}\mathcal{C}_{f'^s}$ の support $\in \Lambda' \cap \Lambda$ とするとき、 $\Lambda^{\mathbb{R}}, \Lambda'^{\mathbb{R}}$ の同件数のつながり行列は、次のようにあらわされる。

$$A(\lambda) \left[\begin{array}{c} \exp \frac{\pi}{4} (\tau(\Lambda) - \tau(\Lambda \cap \Lambda')) \\ \vdots \\ \exp \frac{\pi}{4} (\tau(\Lambda_2) - \tau(\Lambda \cap \Lambda')) \end{array} \right]$$

$$\Lambda^{\mathbb{R}} = \bigsqcup_{i=1}^q \Lambda_i \quad \Lambda'^{\mathbb{R}} = \bigsqcup_{i=1}^q \Lambda'_i$$

$$\tau(\Lambda_i) = \sqrt{\pi} \int_{A \in \mathcal{C}G} \langle Ax_i, -Ay_i \rangle$$

$$\tau(\Lambda \cap \Lambda') = \sqrt{\pi} \int_{A \in \mathcal{C}G} \langle Ax, -Ay \rangle$$

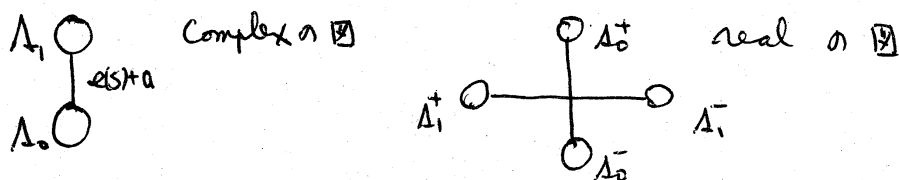
(x_i, y_i) は Λ_i の generic point. (x, y) は $\Lambda^{\mathbb{R}} \cap \Lambda'^{\mathbb{R}}$ の generic pt.

もし λ は (G, V, f) の f^S の原点の conormal の order が $\Re s + a$ のとき $\text{ord}_{\Delta_1} f^S - \text{ord}_{\Delta_0} f^S = \Re \lambda + a$ となる。

もしこの Conjecture が正しいとすれば、次の定理はその系として出る。

Theorem

i) 交点の局所化が α^S のとき、つぎの行列は



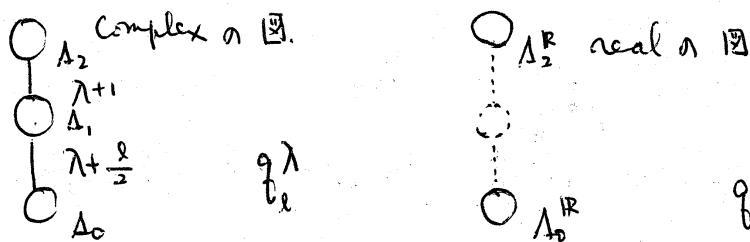
$C_0^\pm \in \Delta_0^\pm$ の同位数 $C_1^\pm \in \Delta_1^\pm$ の同位数

$$\begin{bmatrix} C_0^+ \\ C_0^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{\pi}{2}\sqrt{t}(\Re s + a)\right) & \exp\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}(\Re s + a)\right) \\ \exp\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}(\Re s + a)\right) & \exp\left(-\frac{\pi}{2}\sqrt{t}(\Re s + a)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau(\Delta_1^+) - \tau(\Delta_1 \cap \Delta_0) \\ \tau(\Delta_1^-) - \tau(\Delta_1 \cap \Delta_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_0^+ \\ C_1^- \end{bmatrix} = z^{\alpha} \cdot \Re(s) + a = \text{ord}_{\Delta_1} f^S - \text{ord}_{\Delta_0} f^S + \frac{1}{2}$$

(柏原 - 三輪 P.84)

ii) つぎの行列が二次型式に局所化されるとき、つぎの



$g \geq 1 = \left(\sum_{i=1}^g \alpha_i^2\right)^{1/2}$ の時 $k \leq 4$
Maximally overdetermined system.

このとき、 $C_0 = C_2 \left(-\frac{\sin \pi \lambda}{\pi} \right) \Gamma(\lambda+1) \Gamma(\lambda+\frac{l}{2}) \exp \frac{\pi}{4} (I(\Lambda_2) - I(\Lambda_2 \wedge \Lambda_0))$

そしてここで

$$\lambda+1 = \text{ord}_{\Lambda_1} f^S - \text{ord}_{\Lambda_1} f^S + \frac{1}{2}$$

$$\lambda+\frac{l}{2} = \text{ord}_{\Lambda_1} f^S - \text{ord}_{\Lambda_0} f^S + \frac{1}{2}$$

そして実際に、この Conjecture は、相対不変式がわかっている場合、(たとえば symmetric matrix の determinant, 通常の matrix の determinant, binary cubic form の discriminant など……) については成立することがたしかめられている。(証明は次回の報告を見ていただく。)。

§2 具体的な Fourier 変換の計算.

この節では Fourier 変換のための、同位数のつなかりを示す行列を求めることを目的とする。i) ii) iii) で、各々の

場合 $G = GL(n, \mathbb{R}) \times SO(p, q)$

$$G = GL(n, \mathbb{C}) \times SU(p, q)$$

$$G = GL(n, \mathbb{H}) \times SU(p, q, \mathbb{H})$$

を示して置く。

まず、相対不変式や内積を書きおこう。

以下、相対不変式、内積、表現と反傾表現、反傾表現による相対不変式、 $|C_0|, |C_1|$ の定数項、相対不変式の degree、変数の数、の順に書き並べてゆく。

$$i) \quad f(X) = \det(X I_{p\bar{q}} {}^t X) \quad \langle X, Y \rangle = \text{tr}(X I_{p\bar{q}} {}^t Y)$$

ただし X は $n \times m$ 行列で

$$X \mapsto g X h$$

$$Y \mapsto {}^t g^{-1} Y h \quad (g, h) \in G$$

$$f^*(Y) = \det(Y I_{p\bar{q}} {}^t Y)$$

$$|C_0| = 4^n \quad |C_1| = 2^{mn} \quad \deg f = 2n \quad \dim X = nm$$

よって f, f^* の character は $\chi = (\det g)^2 \quad \chi^*$
 $= (\det g)^{-2}$ である。

$$ii) \quad f(X) = \det(X I_{p\bar{q}} {}^t \bar{X}) \quad \langle X, Y \rangle = \text{Re tr}(X I_{p\bar{q}} {}^t Y)$$

ただし X は $n \times m$ (complex) 行列で

$$X \mapsto g X h$$

$$Y \mapsto {}^t g^{-1} Y h$$

$$(g, h) \in G$$

$$f^*(Y) = \det(Y I_{p\bar{q}} {}^t \bar{Y})$$

$$|C_0| = 4^n \quad |C_1| = 4^{mn} \quad \deg f = 2n \quad \dim X = 2nm$$

よって f, f^* の character は $\chi = (\det g)^2 \quad \chi^*$
 $= (\det g)^{-2}$ である。

$$\text{iii) まず, } L: Z = x + \sqrt{-1}y \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \text{ という}$$

\mathbb{H} の $GL(2, \mathbb{C})$ への埋め込みを定義する。したがって自然に $n \times m$ \mathbb{H} 行列を $2n \times 2m$ \mathbb{C} 行列への埋め込むことができる。

$$f(X) = \det L(X I_{p,q} t \bar{X}) \quad \langle X, Y \rangle = \operatorname{Re} T_{\mathbb{R}} L(X I_{p,q} t Y)$$

$E \in \mathbb{R}^L$ X は $n \times m$ (quaternion) 行列で、

$$X \mapsto g X h$$

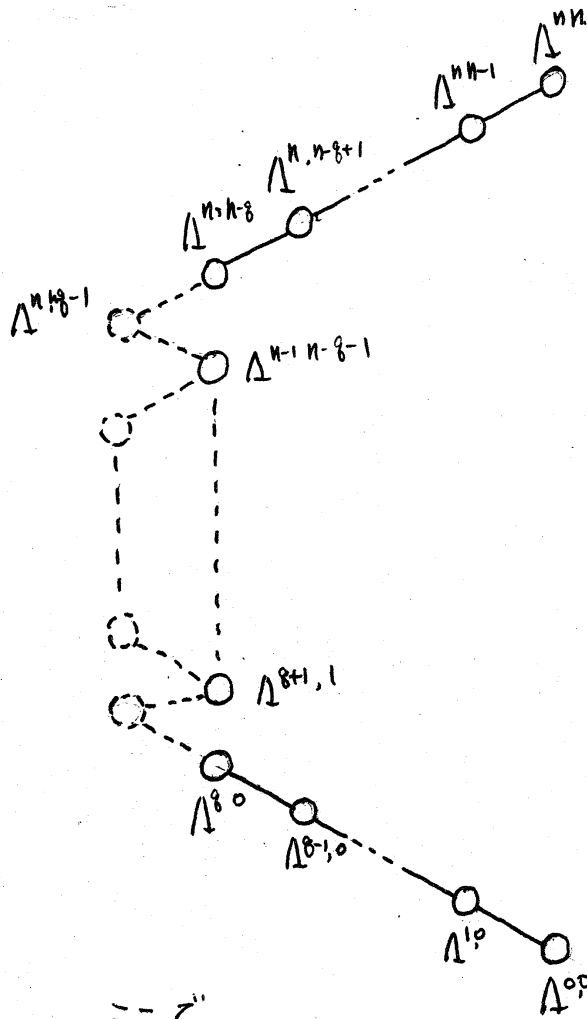
$$Y \mapsto t g^{-1} Y h \quad (g, h) \in G.$$

$$f^*(Y) = \det L(Y I_{p,q} t \bar{Y})$$

$$|C_0| = 4^n \quad |C_1| = 4^{2nm} \quad \deg f = 2n \quad \dim X = 4nm.$$

すなわち f, f^* の character は $\chi = (\det L(g))^2 \chi^* = (\det L(g))^{-2}$ である。

次に complex 領域 T^*V 上での極大過剰^法決定系 \mathcal{W} を定義し、その holonomy diagram を書く。この \mathcal{W} の real pure imaginal tangent bundle $\sqrt{-1}T^*V_{\mathbb{R}}$ への制限がちょうど \mathbb{H}^S のための極大過剰決定系と存しているのである。たいてしこでは、同伴数のつながり)を定めるのに必要な Lagrangian \mathcal{M}_f のみを書く。以下は $p < p > n$ を仮定する。



$p > n$

$$= \begin{matrix} \Delta^{n-i, n-g-i} \\ (r') \end{matrix} \begin{bmatrix} I_{l_1} & & & \\ & & & \\ & & I_g & I_g \\ & & & \end{bmatrix} - \begin{matrix} (l_1 = n-g-i) \\ \begin{bmatrix} & & & \\ & I_{l_2} & & \\ & & E_g^{r'} & E_g^{r'} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \Delta^{n-k, n-k} \\ (l_1, l_2, r') \end{matrix} \begin{bmatrix} I_{l_1} & & & \\ & & & \\ & & I_r & I_r \\ & & & \end{bmatrix} - \begin{matrix} (k=r) \\ \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & E_r^{r'} & E_r^{r'} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \Delta^{n-k, n-k} \\ (l_1, l_2, r') \end{matrix} \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & I_r & I_r \\ & & & \end{bmatrix} - \begin{matrix} (k=r) \\ \begin{bmatrix} I_{l_1} & & & \\ & & & \\ & & I_r & I_r \\ & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

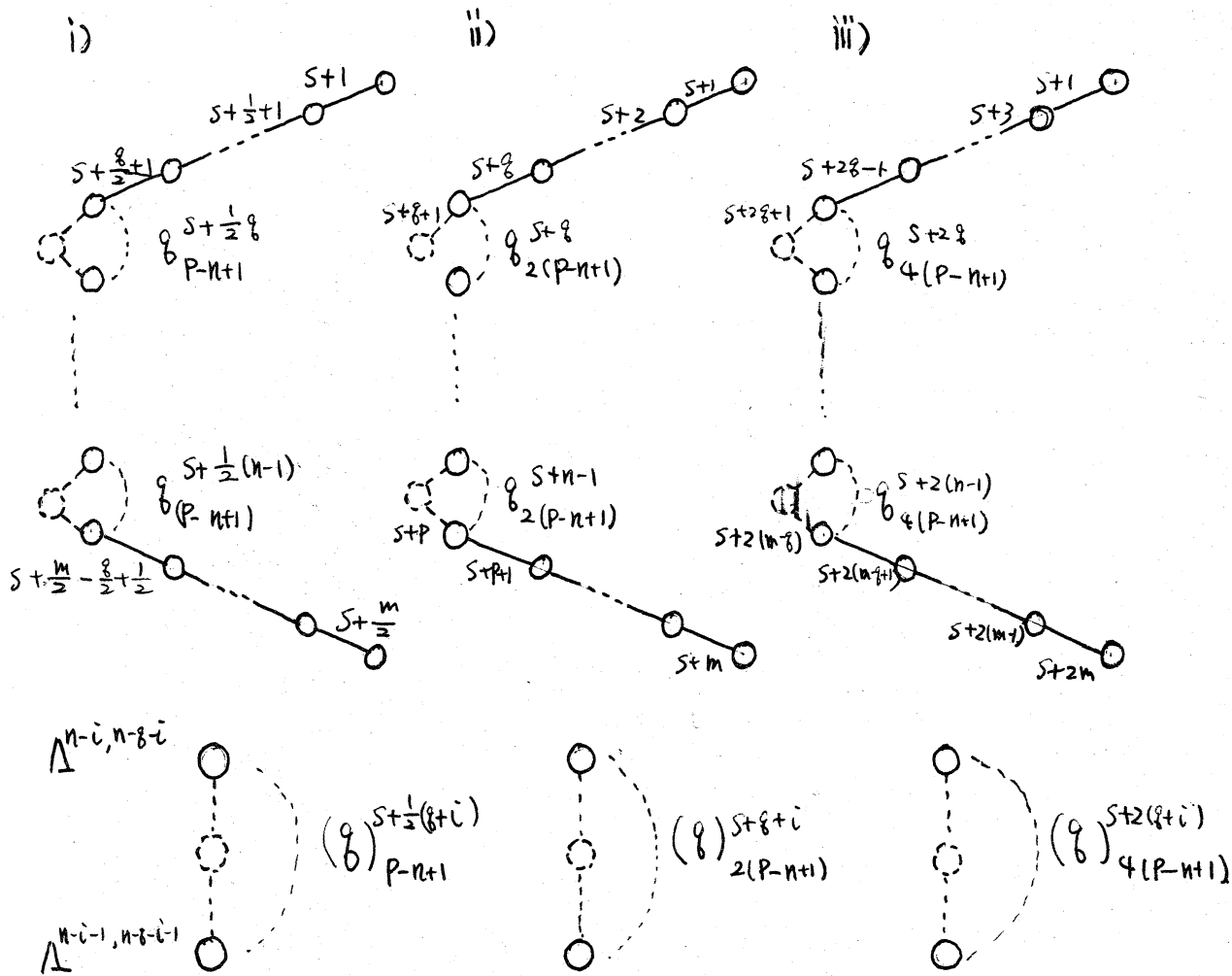
$\leftarrow p \quad * \quad g \quad \rightarrow$

$= z'$

$$E_r^{r'} = \begin{bmatrix} I_r & & \\ & \ddots & \\ & & I_r \end{bmatrix}$$

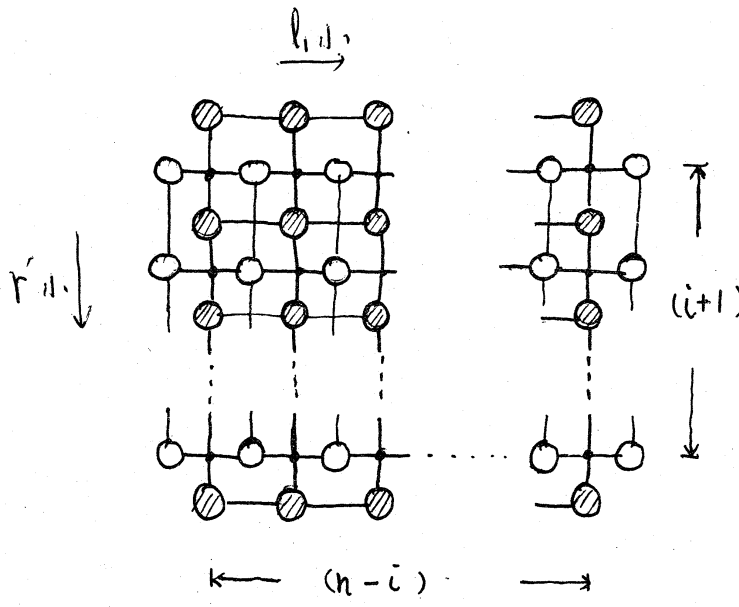
() 内は complex では同一 orbit (Lagrangian) として real に制限すると、いくつかに分かれるため、それらを区別するため導入した index である。

次につるガリの様子を書き入れよう。ここで、 $(S+i)$ と、書いたのは、余次元 1 の good intersection ([1]) であ



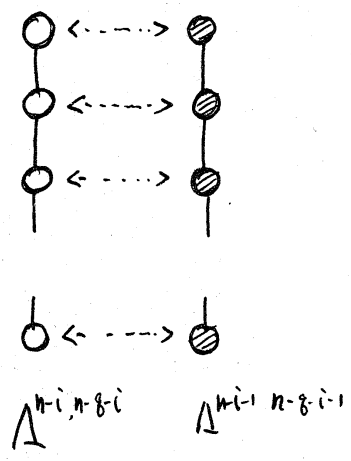
i). order 差 $+\frac{1}{2}$ が $(S+i)$ であることを示している。また g と書いたのは、その極大過剰決定系は Micro-local に $(\sum_{i=1}^p x_i^2)^t$ のみならず、極大過剰決定系と同型であることを言っている。

次に Real での orbit (Lagrangian) の Connected component 分解を示し、あわせて、各々の状態 (まじわり方) を書く。



これは $\Lambda^{n, n-i}$ のつながり
 $\Lambda^{n, n-i-1}$ のつながり
 • かわり
 ● が $\Lambda^{n, n-i}$ の real orbit
 ○ が $\Lambda^{n, n-i-1}$ の real orbit

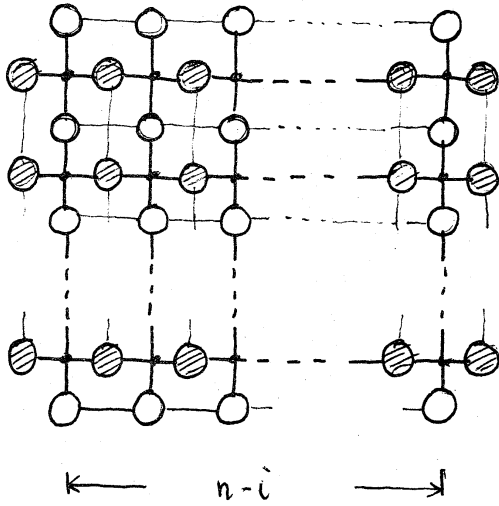
$\Lambda^{n, n-i}$ において 11ちばん左上が $\Lambda_{(n-i, 0, i)}^{n, n-i}$ で
 下に進ませれば r' が小さくなり、右へ進めば l_1 が小さくなり、とゆく。
 $\Lambda^{n, n-i-1}$ も同様。



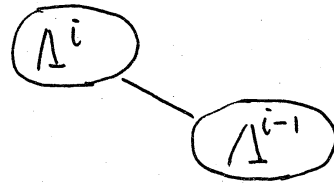
これは $\Lambda^{n-i, n-8-i}$
 $\Lambda^{n-i-1, n-8-i-1}$

の間につながり。
 右へ11ちばん上の ○ が $\Lambda_{(8)}^{n-i, n-8-i}$
 $\Lambda_{(8)}^{n-i-1, n-8-i-1}$ とあわせてゆく。

下へ11くれば r' が小さくなり、とゆく。



これは



のつなぎめ。

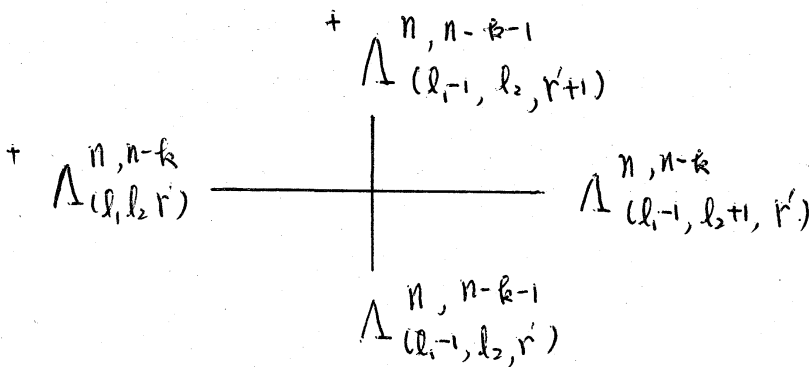
• が交わり.

⊗ が Δ^{i-1} の real orbit

○ が Δ^{n-i} の real orbit

Δ^i においては いちばん左上が $\Delta^i_{(n-i, 0, i)}$ をあらわし、
右に進むにしたがって r' が小さくなる、とゆき。下へ進むほど
 l_1 が小さくなる、とゆく。 Δ^{i-1} も同様。

次に Maslov index による修正の項を書いておこう。

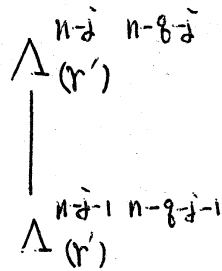


によるものは.

$$i) \begin{bmatrix} \exp \frac{\pi}{4} \sqrt{l} (k-2r') \\ \exp -\frac{\pi}{4} \sqrt{l} (k-2r') \end{bmatrix}$$

$$ii) \begin{bmatrix} \exp \frac{\pi}{2} \sqrt{l} (k-2r') \\ \exp -\frac{\pi}{2} \sqrt{l} (k-2r') \end{bmatrix}$$

$$iii) \begin{bmatrix} \exp \sqrt{l} (k-2r') \\ \exp -\sqrt{l} (k-2r') \end{bmatrix}$$



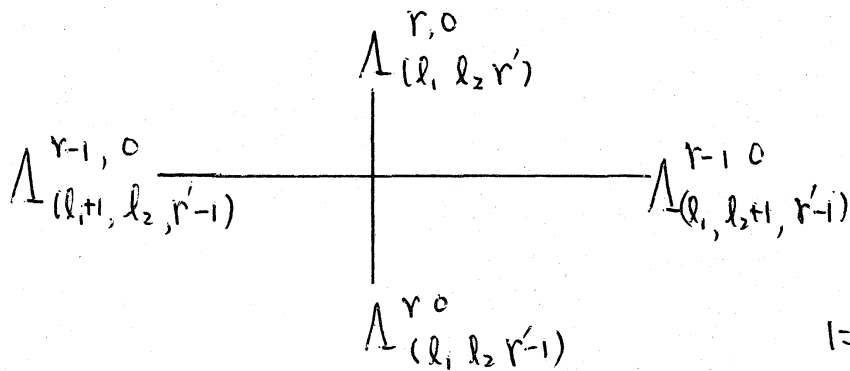
の間 においては.

$$i) \exp \frac{\pi}{4} \sqrt{l} (g-2(g-r'))$$

$$ii) \exp \frac{\pi}{2} \sqrt{l} (g-2(g-r'))$$

$$r' = g, g-1, \dots, 0$$

$$iii) \exp \pi \sqrt{l} (g-2(g-r'))$$



によるものは.

$$i) \begin{bmatrix} \exp \frac{\pi}{4} \sqrt{1} (p-g+l_2-l_1) \\ \exp -\frac{\pi}{4} \sqrt{1} (p-g+l_2-l_1) \end{bmatrix}$$

$$ii) \begin{bmatrix} \exp \frac{\pi}{2} \sqrt{1} (p-g+l_2-l_1) \\ \exp -\frac{\pi}{2} \sqrt{1} (p-g+l_2-l_1) \end{bmatrix}$$

$$iii) \begin{bmatrix} \exp \pi \sqrt{1} (p-g+l_2-l_1) \\ \exp -\pi \sqrt{1} (p-g+l_2-l_1) \end{bmatrix}$$

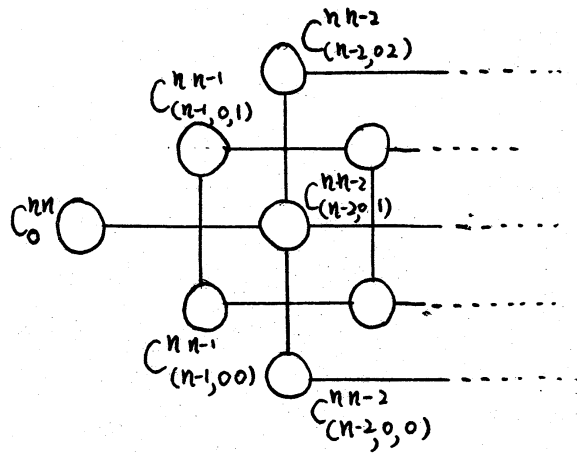
\forall 人上には、この計算に必要な資料は、すべてそろった。あとは、これにより、この計算をすればよい。しかし、最初と最後（つまり、zero section と、原点の conormal）の間の同位数の関係を求めるためには、少々工夫を要する。ここでは、多項式の係数が同位数をあらわすように、多項式をつくらせて、それとうまく計算して求めてゆく方法を示そう。

例として iii) の場合をとってみる。

まず、 Λ^{nn} から $\Lambda^{n, n-g}$ までの同位数のつながりを記述する行列を求めてみよう。 Λ^{nn} は、 $r=0$ であるから、 $(g+1)$ 個の連結成分 $\Lambda_{(n-i, i, 0)}^{nn}$ ($i=0 \dots g$) を分かれる。

各々の同僚数を $C_i^{n,n}$ ($i=0 \dots g$) と書こう。

また $\Delta^{n,n-g}$ もやはり $\Delta_{(n-g, c, r')}^{n,n-g}$ ($r'=0, \dots, g$) と g 個の連結成分に分かれる。各々の同僚数は $C_{r'}^{n,n-g}$ ($r'=0 \dots g$) とあらわすものとあろう。



同僚数の関係を $\frac{\Gamma(\dots)}{\sqrt{2\pi}}$ の定数倍の part を除いて計算してしよう。まず $C_0^{n,n}$ と関係のある同僚数としてみる。

$$\begin{bmatrix} C_{(n-1,0,1)}^{n,n-1} \\ C_{(n-1,0,0)}^{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp -\frac{\pi\sqrt{t}}{2}(s+1) \\ \exp \frac{\pi\sqrt{t}}{2}(s+1) \end{bmatrix} [C_0^{n,n}]$$

$$\begin{bmatrix} C_{(n-2,0,2)}^{n,n-2} \\ 2 C_{(n-2,0,1)}^{n,n-2} \\ C_{(n-2,0,0)}^{n,n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp -\frac{\pi\sqrt{t}}{2}(s+3) + \pi\sqrt{t}(-1) \\ \exp -\frac{\pi\sqrt{t}}{2}(s+3) + \pi\sqrt{t}(-1), \exp -\frac{\pi\sqrt{t}}{2}(s+3) + \pi\sqrt{t} \\ \exp \frac{\pi\sqrt{t}}{2}(s+3) + \pi\sqrt{t} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} C_{(n-1,0,1)}^{n,n-1} \\ \vdots \\ C_{(n-1,0,0)}^{n,n-1} \end{bmatrix} \dots$$

などとなる、とゆく。その他の同位数 $C_i^{n,n}$ に対して同じように見てゆくと、結局次のように計算すればよいことが分かる。

$$\begin{bmatrix} C_0^{n,n} \\ C_1^{n,n} \\ \vdots \\ C_g^{n,n} \end{bmatrix} \text{ と } \begin{bmatrix} C_\varepsilon^{n,n-g} \\ \vdots \\ C_0^{n,n-g} \end{bmatrix} \text{ の つながり と あらわす 行列 を 求 め よう。}$$

$$\varphi_1 = t a^{-1} - a \quad a = \exp\left(\frac{\pi\sqrt{5}}{2} S\right) \quad \text{と する。}$$

$$\varphi_2 = -t a + a^{-1}$$

$$A_{g+1} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & & & & \\ \varphi_2 & \varphi_1 & & & \\ & \varphi_2 & \ddots & & \\ & & & \varphi_1 & \\ & & & \varphi_2 & \end{bmatrix} \times (\sqrt{t}) \quad (g+1) \times (g+1) \text{ 行列}$$

とおいて $A_g \cdots A_1$ を求めると、これは $(g+1)$ 次元の縦ベクトルを係数とする g 次の t についての多項式となる。

これを $A(t)$ とする。この多項式の i 次の係数を行列の第 $(g-i+1)$ 列 $(i=0 \cdots g)$ とみてできる $(g+1) \times (g+1)$ 行列を

$$A' \text{ と する。 } \widehat{A} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_g \end{bmatrix}^{-1} A' \quad \text{が、} \frac{\Gamma(\cdots)}{\sqrt{2\pi}} \text{ の 定数倍 の}$$

項を除いた同位数の関係をあらわしている。

$$\tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} {}_g C_0 & & & \\ & {}_g C_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & {}_g C_g \end{bmatrix}^{-1} A(t) = (-1)^g \begin{bmatrix} \varphi_1^g \\ \varphi_1^{g-1} \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_2^g \end{bmatrix}$$

次に $\Lambda^{n, n-g}$ と $\Lambda^{g, 0}$ の間の同位数の関係を求めよう。
この間にでてくる Orbit (Lagrangian) はすべて $(g+1)$ 個の連結成分に分かれる。そしてこの場合の Maslov index による修正は、どの2つの間も $(-1)^g$ であるので、この間の変化は、ただ、定数倍になる。それは、

$$\begin{aligned} & (-1)^{g(n-g)} \prod_{i=1}^{n-g} \frac{-\sin \pi (s+2(g+i))}{\pi} \Gamma(s+2(g+i)+1) \Gamma(s+2(g+i)+2(p-g+1)) \\ &= \left(-\frac{\sin \pi s}{\pi} \right)^{n-g} \prod_{i=1}^{n-g} \Gamma(s+2(g+i)+1) \Gamma(s+(p+i)2+1) \times (-1)^{g(n-g)} \end{aligned}$$

である。

$\Lambda^{g, 0}$ の連結成分は $\Lambda_{(n-g, 0, r')}^{g, 0}$ $r'=0, \dots, g$ の $(g+1)$ 個の連結成分に分かれ、その同位数 $C_{r'}^{g, 0}$ と書くと $C_{r'}^{n, n-g}$ と $C_{r'}^{g, 0}$ の間が上の定数倍で関係づけられる。

次に Λ^{g_0} と Λ^{0_0} の連結成分の同位数の関係を求めよう。 $\Lambda_{(n-i, i; 0)}^{0_0}$ ($i=0, \dots, g$) と Λ^{0_0} は分かれる。各々の同位数を $C_i^{0_0}$ と書く。これは最初や、たのと同様の方法で求まる。

$\begin{bmatrix} C_0^{g_0} \\ \vdots \\ C_g^{g_0} \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} C_0^{0_0} \\ \vdots \\ C_g^{0_0} \end{bmatrix}$ の間の関係は、 $\frac{\Gamma(\dots)}{\sqrt{2\pi}}$ の定数倍を除いて次のようにして求まる。

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= at + a^{-1} & \text{として} & B(t) = (-1)^{g(n-1)} \begin{bmatrix} \varphi_1^g \\ C_1 \varphi_1^{g-1} \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_2^g \end{bmatrix} \text{とおく。} \\ \varphi_2 &= at + a^{-1} \end{aligned}$$

この $B(t)$ の t の係数ベクトルを $(g-i+1)$ 列として得られる行列 $((g+1) \times (g+1))$ 行列) である。これを B' としよう。

$$\widehat{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon^C & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon^C \end{bmatrix}^{-1} B' \text{ とあるとき、これが求まる行列}$$

である。

あとは、 \widehat{B} と \widehat{A} をかけあわせなければならぬが、ここで次の trick を使う。

$B(t)$ の第 i 成分を $B_i(t)$ とし、次の多項式を考える。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^g \cancel{B_{i+1}(t)} s'^{g-i} &= \sum_{i=0}^g {}_g C_i \tilde{\varphi}_1^{g-i} \tilde{\varphi}_2^i s'^{g-i} \\ &= (\tilde{\varphi}_1 s' + \tilde{\varphi}_2)^g = ((a^{-1}t+a)s' + (at+a^{-1}))^g \\ &= (t(a^{-1}s'+a) + (as'+a^{-1}))^g = \sum_{i=0}^g {}_g C_i (a^{-1}s'+a)^{g-i} (as'+a^{-1})^i t^{g-i} \end{aligned}$$

すなわち、 B' は、 $B''(s) = [{}_g C_0 (a^{-1}s'+a)^g, {}_g C_1 (a^{-1}s'+a)^{g-1} (as'+a^{-1}), \dots, {}_g C_g (as'+a^{-1})^g]$ という $(g+1)$ 次元横ベクトルに係数が、とする s の多項式で、 s^{g-i+1} の係数が、第 i 行目をあらわしている。

すると $B''(s) \cdot \hat{A}(t) = \sum_{i=1}^g {}_g C_i (a^{-1}s'+a)^{g-i} (as'+a^{-1})^i \varphi_1^{g-i} \varphi_2^i$ の $s'^j t^i$ の係数が、第 $(g-j+1)(g-i+1)$ 成分をあらわす行列が、ちやうど、 $B' \hat{A}$ をあらわしていることがわかる。

$$\begin{aligned} &B''(s) \cdot \hat{A}(t) \\ &= \sum_{j=0}^g (a^{-1}s'+a)^{g-j} (as'+a^{-1})^j \varphi_1^{g-j} \varphi_2^j {}_g C_j \\ &= \sum_{j=0}^g {}_g C_j \{(a^{-1}s'+a)(ta^{-1}a)\}^{g-j} \{(as'+a^{-1})(-ta+a^{-1})\}^j \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{2} (a^{-1}s+a)(-a^{-1}-a) + \frac{1}{2} (a^{-1}s+a^{-1})(-a^{-1}+a) \right]^g$$

$$= \left[(a^{-2}-a^2)st + (a^{-2}-a^2) \right]^g = \sum_{j=0}^g C_{g,j} (st)^j (-1)^g (2\sqrt{1}\pi s)$$

したがって、この変換の行列は、

$$A(s) = (-1)^{g(n-g)} \left(-\frac{2\sqrt{1}\pi s}{\pi} \right)^{n-g} \prod_{i=1}^{n-g} \Gamma(s+2(g+i)+1) \Gamma(s+(n+i)+1)$$

$$\prod_{j=0}^{g-1} \Gamma(s+2j+1) \Gamma(s+2n-2j) \quad (2\pi)^{-g} (-1)^{g(n+1)} (-\sqrt{1})^g$$

$$\left[\begin{array}{c} (-2\sqrt{1}\pi s)^g \\ (-2\sqrt{1}\pi s)^g \\ \vdots \\ (-2\sqrt{1}\pi s)^g \end{array} \right]_g$$

これは、 $\begin{bmatrix} C^{nn} \\ 0 \\ \vdots \\ C^{nn} \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} C^{00} \\ 0 \\ \vdots \\ C^{00} \end{bmatrix}$ の同位数の変換をあらわしている。

公式の形で、さらにと述べよう。

$$|f|_s(x) = \begin{cases} |f(x)|^s & x \in \Delta_{(n-i, i, 0)}^{nn} \\ 0 & x \notin \Delta_{(n-i, i, 0)}^{nn} \end{cases}$$

$$|f|_i^s(y) = \begin{cases} |f|_i^s(y) & y \in \Lambda_{(n-i, i, 0)}^{00} \\ 0 & y \notin \Lambda_{(n-i, i, 0)}^{00} \end{cases} \quad \text{と } \tau$$

$$|f|_i^s(x) = \int 4^{ns} (\pi)^{(2m-1)n} (-\det \pi S)^n \gamma(s) |f|_i^{-s-2m}(y) \\ \times \exp \sqrt{T} \langle x, y \rangle dy$$

$$= : \tau^n \gamma(s) = \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(s+2j+1) \Gamma(s+2m-2j)$$

$P > n$ の仮定のもとに (ii) iii) の場合は $P \geq n$ の仮定のもとに) 全く同じような (多少めんどうにはなるものの) trick で. i) ii) iii) の場合もできる。以下それと結果だけ示そう。 $P \leq n$ の場合は、図式、orbit 分解が異ってくるので、それは次に解説あることにある。

ii) $P > n$ $q < n$ を仮定して

$$\begin{bmatrix} |f|_0^s(x) \\ \vdots \\ |f|_q^s(x) \end{bmatrix} = \int (2\pi)^{-\frac{2nm}{2}} |C_0|^s \sqrt{|C_1|} (\det \pi S)^n \pi^n \gamma(s) A \begin{bmatrix} |f|_0^{-s-m}(y) \\ \vdots \\ |f|_q^{-s-m}(y) \end{bmatrix} \exp \sqrt{T} \langle x, y \rangle dy$$

$$T = T^{-1}, \quad C_0 = 4^n, \quad C_1 = 4^{m \cdot n}.$$

$$A = \begin{cases} \begin{matrix} (\sqrt{T})^{(n-1)^2} & (\sqrt{T})^{n-1} \\ & \ddots \\ & & 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ (-1)^{p+1} \\ \vdots \\ (-1)^{p+1} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} (\sqrt{T})^{(n-1)^2} & (\sqrt{T})^n \\ & \ddots \\ & & 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ (-1)^p \\ \vdots \\ (-1)^p \end{bmatrix} \end{cases} \quad \begin{matrix} q = \text{odd} \\ q = \text{even} \end{matrix}$$

i) $p > n$ $q < n$ を仮定して

$$\begin{bmatrix} |f|_0^s(x) \\ \vdots \\ |f|_q^s(x) \end{bmatrix} = \int (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} |c_0|^s |c_1|^{\frac{1}{2}} t_A(s) \begin{bmatrix} |f^*|_0^{-s-\frac{m}{2}}(y) \\ \vdots \\ |f^*|_q^{-s-\frac{m}{2}}(y) \end{bmatrix} \exp \sqrt{T} \langle x, y \rangle dy.$$

$$A(s) = \frac{\gamma(s)}{(2\pi)^q} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\sin(-\pi(s + \frac{1}{2}(q+i)))}{\pi} \right) \tilde{A}(s) \quad \text{と} \quad \tilde{A}(s) \text{ は}$$

次のように与える。 $a = \exp(\frac{\pi}{2} \sqrt{T} s)$ をあらわして置く。

1) $\mathfrak{g} = 4\tilde{\mathfrak{g}} + 1$ と $\mathfrak{a} \in \mathfrak{z}$.

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^{n+1} a^2) & , & -1 + (-1)^n \\ (\sqrt{F})^{p+1} (1 - (-1)^{p+1+n}) & , & -(\sqrt{F})^{p+1} (a^2 + (-1)^{p+1} a^{-2}) \end{bmatrix} \text{ と } \mathfrak{a} \in \mathfrak{z}$$

$$\tilde{A}(s) = (-1)^{\tilde{\mathfrak{g}}} (\sqrt{F})^{1-n} (-2\sqrt{F} \sin 2\pi s)^{\tilde{\mathfrak{g}}}$$

$$X \begin{bmatrix} \star & & & \\ & (-1)^{p+1} \star & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{p+1+2\tilde{\mathfrak{g}}} \star \end{bmatrix} \quad (4\tilde{\mathfrak{g}}+2) \times (4\tilde{\mathfrak{g}}+2) \text{ 行列}$$

2) $\mathfrak{g} = 4\tilde{\mathfrak{g}} + 2$ のとき.

$$\star = \begin{bmatrix} \sqrt{F} (-1)^{n+1} (a^4 - a^{-4}) & , & 0 & , & 0 \\ (a^{-2} + (-1)^{p+1} a^2) (-1)^{p+1} (\sqrt{F})^{p+1} + (-\sqrt{F})^{p+1} & , & -(\sqrt{F})^{p+1} (a^2 + (-1)^{p+1} a^{-2}) (a^2 + a^{-2}) & , & (\sqrt{F})^{p+1} (-1)^n + 1) (a^2 + (-1)^{p+1} a^{-2}) \end{bmatrix}$$

と $\mathfrak{a} \in \mathfrak{z}$.

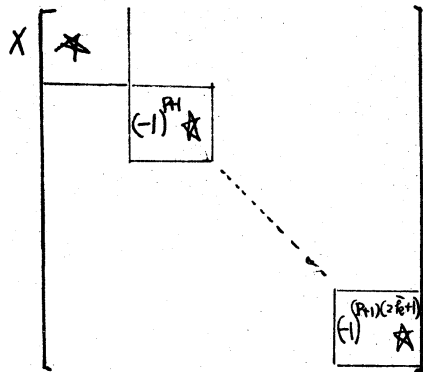
$$\tilde{A}(s) = (-1)^{\tilde{\mathfrak{g}}} (-2\sqrt{F} \sin 2\pi s)^{\tilde{\mathfrak{g}}}$$

$$X \begin{bmatrix} \star & & & \\ & (-1)^p \star & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{p+2\tilde{\mathfrak{g}}} \star \\ & & & & \star \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \star' &= (-1)^{p+n+1} \sqrt{F} (a^4 - a^{-4}) \\ &= \text{行列 } (4\tilde{\mathfrak{g}}+3) \times (4\tilde{\mathfrak{g}}+3) \text{ 行列} \end{aligned}$$

3) $\tilde{g} = 4\tilde{g} + 3$ のとき.

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^{n+1} a^2), & -(1 + (-1)^{n+1}) \\ -(\sqrt{-1})^{p+1} (1 + (-1)^{n+p}), & (\sqrt{-1})^{p+1} (a + (-1)^{n+p} a^{-2}) \end{bmatrix} \text{ と } \tilde{a} \text{ n } \tilde{z}.$$

$$\tilde{A}(s) = (-1)^{\tilde{g}+1} (-\sqrt{-1})^n (-2\sqrt{-1} \sin \pi s)^{2\tilde{g}+1}.$$

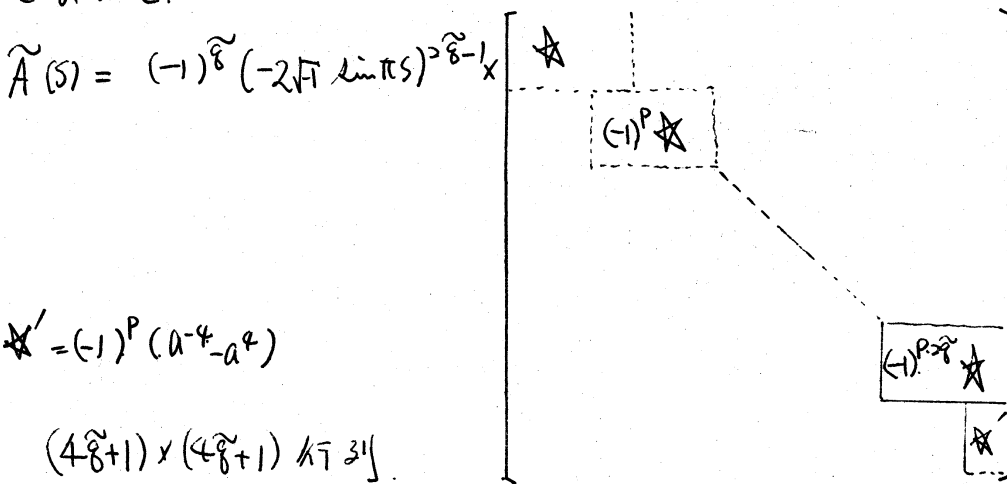


$$(4\tilde{g}+4) \times (4\tilde{g}+4) \text{ 行 } \tilde{z}$$

4) $\tilde{g} = 4\tilde{g}$ のとき.

$$\star = \begin{bmatrix} (a^4 - a^4) & 0 & 0 \\ (\sqrt{-1})^p (1 + (-1)^{n+p}) (a^{-2} + (-1)^{n+p} a^2) & (\sqrt{-1})^p (-1)^n (-1)^{p+1} a^{-2} + a^{-2} & (\sqrt{-1})^p (-1)^n a^2 + (-1)^p a^{-2} & (-1)^{n+1} \end{bmatrix}$$

と \tilde{a} n \tilde{z} .



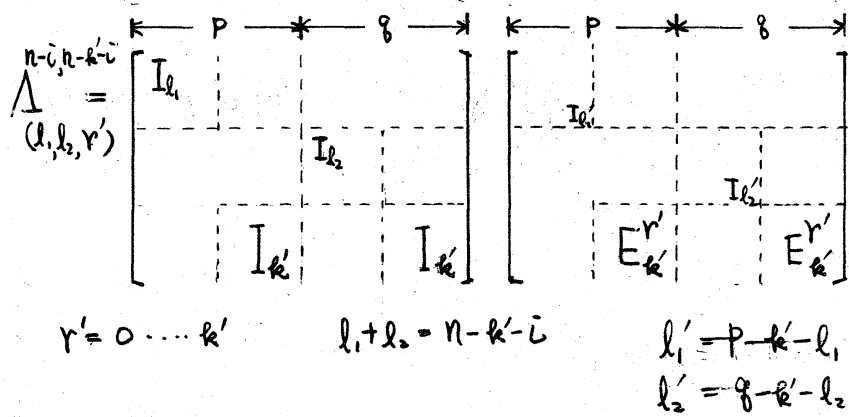
$$\star' = (-1)^p (a^{-4} - a^4)$$

$$(4\tilde{g}+1) \times (4\tilde{g}+1) \text{ 行 } \tilde{z}$$

さてついでに $P < n$, $q < n$ の場合を考察しよう。

Complex X における 必要なる Lagrangian mf のみを書き入れた holonomy diagram は $P \parallel$ にあるものと 同じであつて、 q のかわりに $k' = (n - P)$ とおけば、(図にあらわれる部分) 同じである。

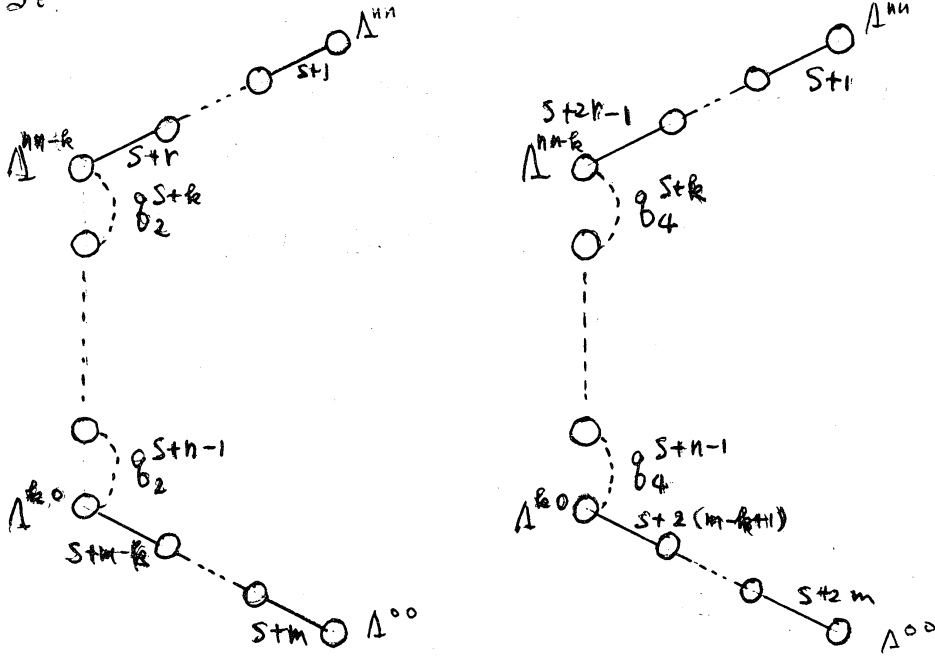
若 orbit (Lagrangian) の Real \cap 制限したときの分解を書いておこう。 $\Delta^{n, n-k} \quad \Delta^{k, 0} \quad (0 \leq k \leq k')$ については、同じである。したがつて書かぬ。



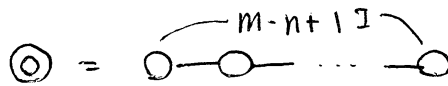
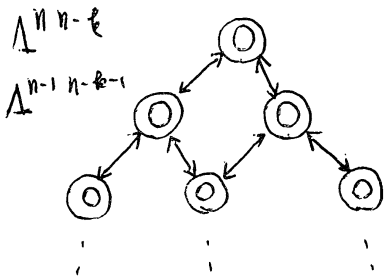
さて、交わり方の問題である。

$P \parallel$ の図式で、上と下の余次元1で、交わつてゐる。その交り方をこめて、 $P > n$ の場合と同じになる。問題は、たこの ---- でつるゐたところであるが、これは、i) の場合には、余次元1での交わりで下までつるが、こゆへ。この場合は特別であるので、我々は先に ii) iii) の場合を考へることによつて。

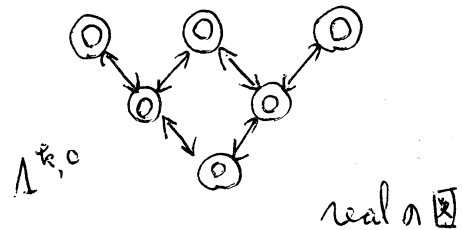
ii) iii) の場合は $p \leq n$, $q < n$ の場合までこめて計算できる。



Λ^{n-k} と $\Lambda^{k,0}$ の間の交わり方は少し複雑である。



\updownarrow は余次元 2 以上の交わりで、その間の 2 つは、2 次型式のみで、極大過剰決定系に、変換される。各々横にならんと \odot が同じ。(complex) orbit (λ, τ) が、real で異なると、Maslov index の影響も、異なる、 $\tau < 2$ 。



これを使, ? 計算してもよいのであるが, じつは, も, とうまくやれる。 $\Delta^{n, n-k}$, と $\Delta^{k, 0}$ の間を同所化して, あらわされる。 極大過剰決定系を調べ, 隣接する間の, 同件数の関係を出してしまふことである。(P.S. の conjecture の特別な場合への, 適用である。 この場合 conjecture は, 正しい。)

$\Delta^{n, n-k}$, $\Delta^{k, 0}$ は ii), iii) の場合 $(k+1)$ 個の連結成分に分かれる。 $\Delta_{(r')}^{n, n-k} = \Delta_{(p-k, q-k, r')}$ $\Delta_{(r')}^{k, 0} = \Delta_{(p-k, q-k, r')}$ とおく。 $r' = k, k-1, \dots, 0$ である。

$\Delta_{(r')}^{n, k-k}$ と $\Delta_{(r')}^{k, 0}$ の間の極大過剰決定系は 群の作用を調べることによ, 2わかる)。

$$\text{ii) } \underset{\square}{GL(n-k, \mathbb{C})} \times \underset{\square}{SU(p-k, q-k)}$$

$$\text{iii) } \underset{\square}{GL(n-k, \mathbb{H})} \times \underset{\square}{SU(p-k, q-k, \mathbb{H})}$$

の相対不変式である。

(より正確な表現をすれば, $\Delta_{(r')}^{(n, n-k)}$ $\Delta_{(r')}^{(k, 0)}$ は, 交わり, その交わりの generic pt. での極大過剰決定系は $\underset{\square}{GL(n-k, \mathbb{C})} \times \underset{\square}{SU(p-k, q-k, \mathbb{C})}$ (あるいは $\underset{\square}{GL(n-k, \mathbb{H})} \times \underset{\square}{SU(p-k, q-k, \mathbb{H})}$) の相対不変式 $h(\alpha)$ の complex power $h(\alpha)^\lambda$ $\delta(\alpha')$ の $\mathbb{H}^1 = \mathbb{R}$ 極大過剰決定系に同型 ということである。)

その間の同僚数の変化は.

$$ii) \prod_{i=1}^{n-k} \left(-\frac{\sin(s+(k+i)-1)}{\pi} \right) \Gamma(s+k+i)^2 \cdot \left(\exp -\frac{\pi\sqrt{k}}{2} (2r'-k) \right)^{p-q}$$

$$iii) \prod_{i=0}^{n-k-1} -\frac{\sin(s+2(k+i))}{\pi} \Gamma(s+2(k+i)+1) \Gamma(s+2(k+i)+2) \cdot \left(\exp \pi \sqrt{k} \right)^{n-k}$$

であることは、公式にあてはめてみればわかる。

あとは同じ方法 ($p > n$) で計算すればよろし。結果だけ書く。

ii) $p \leq n$ $q \leq n$ の場合.

$$\begin{bmatrix} |f|_0^s(x) \\ \vdots \\ |f|_k^s(x) \end{bmatrix} = \int (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} |c_0| \sqrt{|k|} (\sin \pi s)^{\frac{n\chi(s)}{\pi^n}} A(s) \begin{bmatrix} |f|_0^{*-s-m}(y) \\ \vdots \\ |f|_k^{*-s-m}(y) \end{bmatrix}$$

$$\times \exp \sqrt{k} \langle x, y \rangle dy$$

と $k < 0$ のとき.

$k = m - n$ が odd. ならば

$$A(s) = (\sqrt{\Gamma})^{(m+1)(p-k)} (-1)^{k+n+1} (\sqrt{\Gamma})^{k+1} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & (-1)^{m+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{m+1} \end{bmatrix}$$

$k = m - n$ が even. ならば

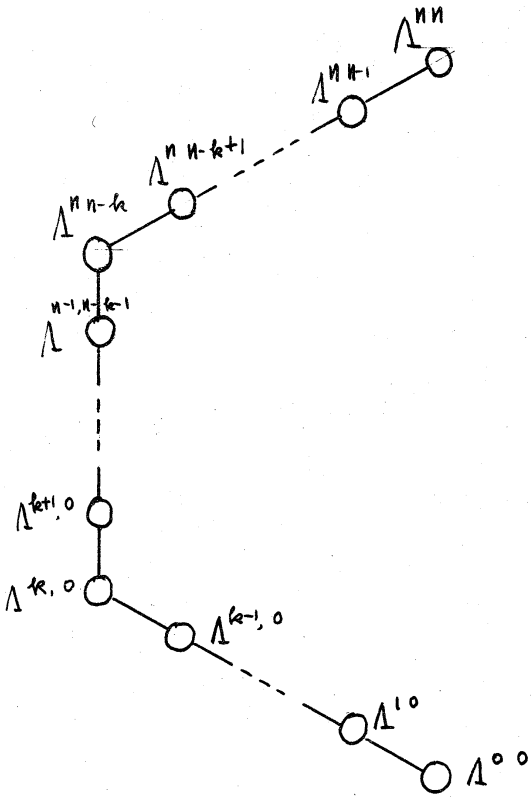
$$A(s) = (\sqrt{\Gamma})^{(m+1)(p-k)} (\sqrt{\Gamma})^k \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & (-1)^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

いま Γ は $(k+1) \times (k+1)$ 行列. $|\Gamma|$ 等の意味は $P > n$ のときと同様である. C_0, C_1 は最初に書いたとおり.

iii) $p \leq n, q \leq n$ のとき.

$$|\mathcal{F}|_i^s(x) = \int 4^{ns} (\pi)^{-(2m-1)n} (-\sin \pi s)^n \gamma(s) |\mathcal{F}|_i^{-s-2m}(y) \exp \sqrt{\Gamma} \langle x, y \rangle dy$$

最後に、i) の $p \leq n, q < n$ の場合である。 $p = n$ の場合は少し、orbit に変化が起るが、これを無視して結果を書く。 $p < n, q < n$ として説明を可とする。



Complex の 必要な holonomy diagram の Lagrangian 条件を Λ^i と書く。左のようになる。

$$\Lambda^{n-k}, \Lambda^{i,0} \quad 0 \leq i < k$$

の real orbit 分解 (connected component 分解) は $p > n$ の場合と全く同じである。

ただし $\Lambda^{n,n-k}$ は様子が異なる。

可なり右のようになる。

$$l_1 = p - k, \quad l_2 = q - k$$

$$I'_{l_2} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \quad r' = 0 \dots k$$

$$\Lambda_{(r')}^{n,n-k} = \left[\begin{array}{c|c} I_{l_1} & \\ \hline & I_{l_2} \quad I_{l_2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline E_{l_2}^{r'} & E_{l_2}^{r'} \end{array} \right]$$

$$\Lambda_{(r')}^{n,n-k} = \left[\begin{array}{c|c} I_{l_1} & \\ \hline & I'_{l_2} \quad I_{l_2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline E_{l_2}^{r'} & E_{l_2}^{r'} \end{array} \right]$$

← P ← i *

また $\Lambda^{k,0}$ は右
のように分かれる。

$$\Lambda^{k,0}_{(r')} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ F_{k,1}^{r'} & F_{k,2}^{r'} \\ \vdots & \vdots \\ F_{k,1}^{r'} & F_{k,2}^{r'} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_{k_1} & & \\ & I_{k_2} & \\ & & I_{k_3} \\ & & & I_{k_4} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^{k,0}'_{(r')} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ F_{k,1}^{r'} & F_{k,2}^{r'} \\ \vdots & \vdots \\ F_{k,1}^{r'} & F_{k,2}^{r'} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_{k_1} & & \\ & I_{k_2}' & \\ & & I_{k_3} \\ & & & I_{k_4} \end{bmatrix}$$

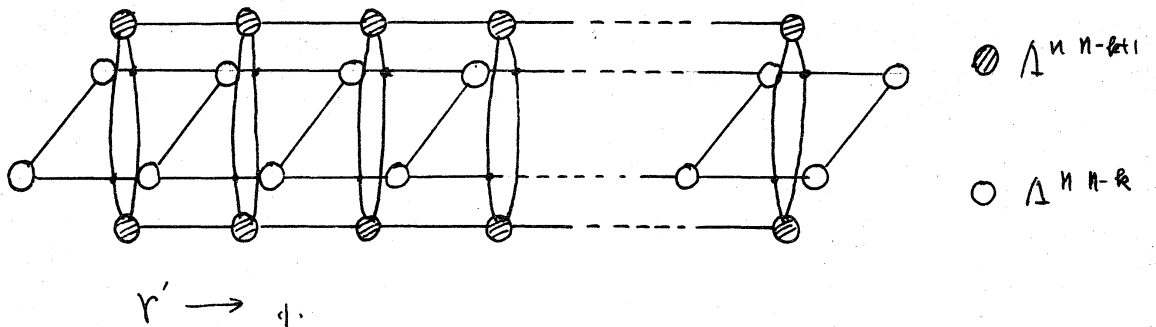
$r' = 0 \dots k.$

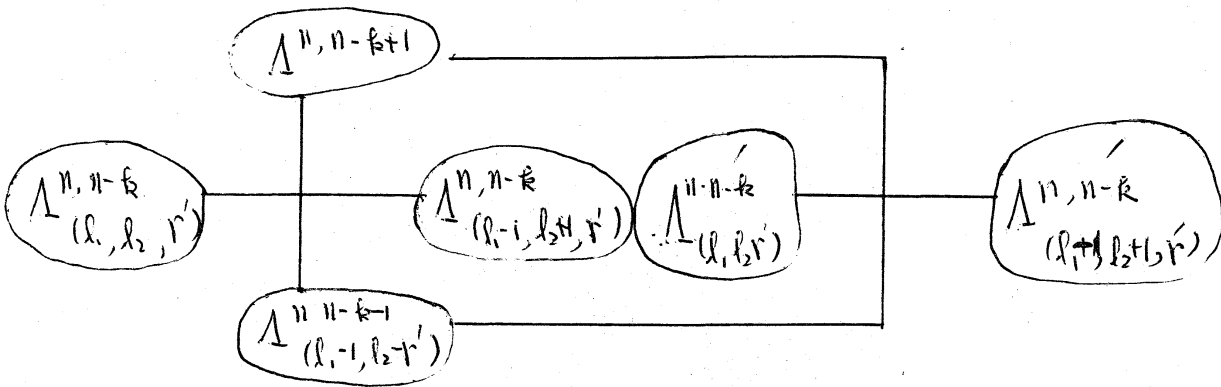
そして $\Lambda^{(n,n-k)}_{(r')} \rightarrow \Lambda^{n,n-k}_{(r')} \in \Lambda^{k,0}_{(r')} \rightarrow \Lambda^{k,0}'_{(r')}$ は.

codimension $(n-k)^2$ で交わり. その交わりの generic point における局所化は $GL(n-k, \mathbb{R}) \times SO(n-k)$ の相対不変式のみによる極大過剰決定系 (すなわち $GL(n-k) \times GL(n-k)$) になる, といる。

したが, この場合やはり conjecture の特別な場合を使って計算ができる。

$\Lambda^{n,n-k+1}$ と $\Lambda^{n,n-k}$ の間のつながりを書いておく。





$\Lambda^{k,0}$ と $\Lambda^{k+1,0}$ の関係もこれを見ればわかる。すると
 $\Lambda^{n, n-k} \in \Lambda^{k,0}$, $\Lambda^{n, n-k+1} \in \Lambda^{k+1,0}$ にとりかえれば同じ
 である。

$$\Lambda_{(r')}^{n, n-k} \sim \Lambda_{(r')}^{n, n-k}$$

$$\vdots$$

$$\Lambda_{(r')}^{k,0} \sim \Lambda_{(r')}^{k,0}$$

左のようになる。と3で直接
 係に同係数のつるがり？
 求める。

[2]を見ながら、定数項
 の修正と Maslov index の
 修正を考慮すればよい。

$$\frac{\Gamma(\lambda+1) \cdots \Gamma(\lambda+(2n-m))}{(\sqrt{2\pi})^{2n-m}} \left\{ \begin{array}{l} \left[(2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\hat{r}}{2}} \right. \\ \left. (2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\hat{r}}{2}} \right] \quad \hat{r} \text{ even} \\ (-2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\hat{r}-1}{2}} \begin{bmatrix} \exp \frac{-\pi i \sqrt{\lambda}}{2} (\lambda+1) & \exp \frac{\pi i \sqrt{\lambda}}{2} (\lambda+1) \\ \exp \frac{\pi i \sqrt{\lambda}}{2} (\lambda+1) & \exp \frac{-\pi i \sqrt{\lambda}}{2} (\lambda+1) \end{bmatrix} \\ \hat{r} \text{ odd} \end{array} \right.$$

ここに $\lambda = 2s + (m-n)$ $\tilde{r} = 2n-m$ とおいて Maslov index に よる 修正は

$$\left[\begin{array}{l} \exp\left(\frac{\pi\sqrt{1}}{4}\right) (q-p) (n-m+2r') \\ \exp\left(\frac{\pi\sqrt{1}}{4}\right) (q-p) (n-m+2r') \end{array} \right]$$

$r' = 0, 1, \dots, n-1, n$ とする。

あとは全く同じようにして、 Γ 夫して計算すればよい。結果は Γ を書くと次のようになる。

i) $p < n$, $q < n$ の場合.

$$\left[\begin{array}{l} |f|_0^s(x) \\ \vdots \\ |f|_k^s(x) \end{array} \right] = \int (2\pi)^{-\frac{m+n}{2}} |c_0|^s |c_1|^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma(s)}{(2\pi)^k} c(\lambda) A(s) \left[\begin{array}{l} |f|_0^{-s-\frac{m}{2}} \\ \vdots \\ |f|_k^{-s-\frac{m}{2}} \end{array} \right] \exp A(x, y) dy$$

$$=: \gamma(s) = \prod_{i=1}^k \Gamma\left(s + \frac{i}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{m}{2} - \frac{i}{2}\right) \quad k = m-n$$

$$\lambda = 2s + (m-n) \quad \tilde{r} = 2n-m \quad \text{とおくと}$$

$$c(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda+1) \dots \Gamma(\lambda+(2n-m))}{(\sqrt{2\pi})^{2n-m}} \times \begin{cases} (-2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\tilde{r}-1}{2}} (2 \cos \frac{\pi}{2}(\lambda+1))^{\tilde{r}_{\text{odd}}} \\ (2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\tilde{r}}{2}} \tilde{r}_{\text{even}} \end{cases}$$

そして $A(s)$ は次に書くとおりである。 $A = \exp\left(\frac{\pi\sqrt{1}}{2} s\right)$ であるとは別のとおりである。

1) $k = 4\tilde{k} + 1$ のとき

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^{n+1}a^2), & (-1)^n - 1 \\ 2(\sqrt{-1})^{n+1}, & -(\sqrt{-1})^{n+1}(a^2 + (-1)^{n+1}a^{-2}) \end{bmatrix} \quad \text{と置く}$$

$$A(s) = (\sqrt{-1})^{1-p} (-1)^{\tilde{k}} (a^{-4} - a^4)^{2\tilde{k}}$$

(k+1) x (k+1) 行列

2) $k = 4\tilde{k} + 2$ のとき

$$\star = \begin{bmatrix} (-1)^n (a^4 - a^{-4}) & 0 & 0 \\ (a^2 + (-1)^{n+1}a^{-2})(-\sqrt{-1})^n + (\sqrt{-1})^{p_0}, & -(\sqrt{-1})^{p_0}(a^2 + a^{-2})(a^2 + (-1)^{n+1}a^{-2}), & (a^2 + (-1)^{n+1}a^{-2})(-\sqrt{-1})^n + (\sqrt{-1})^{p_0} \end{bmatrix}$$

と置く

$$A(s) = (-1)^{\tilde{k} + n - p + 1} (\sqrt{-1}) (a^4 - a^{-4})^{2\tilde{k}}$$

x

(k+1) x (k+1) 行列

$$\star' = (a^4 - a^{-4})$$

3) $k = 4\tilde{k} + 3$ のとき.

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^{p+1} a^2) & - (1 + (-1)^{p+1}) \\ (-\sqrt{t})^{n+1} ((-1)^p + (-1)^n) & (\sqrt{t})^{n+1} (a^2 + (-1)^{p+n} a^{-2}) \end{bmatrix} \quad \text{とある。}$$

$$\tilde{A}(s) = (-1)^{\tilde{k}+1} (\sqrt{t})^p (a^{-k} - a^k)^{2\tilde{k}+1} \begin{bmatrix} \star & & & \\ & (-1)^m \star & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{(m+\tilde{k}+1)} \star \end{bmatrix}$$

4) $k = 4\tilde{k}$ のとき.

$$\star = \begin{bmatrix} a^4 - a^{-4} & 0 & 0 \\ (\sqrt{t})^n (a^2 + (-1)^{m+1} a^{-2}) ((-1)^n + (-1)^p) & (-1)^{p+1} (\sqrt{t})^n (a^2 + (-1)^{m+1} a^{-2}) (a^2 + a^{-2}) & (a^2 + (-1)^{m+1} a^{-2}) (\sqrt{t})^n ((-1)^p + 1) \end{bmatrix}$$

とある。

$$A(s) = (-1)^{\tilde{k}+1} (a^{-k} - a^k)^{2\tilde{k}-1} \begin{bmatrix} \star & & & \\ & \star (-1)^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \star (-1)^{(2\tilde{k}-1)m} \\ & & & & \star \end{bmatrix}$$

$$\star' = (a^4 - a^{-4})$$

行列 = 41行
 $(k+1) \times (k+1)$ 行列

今度は $P = n$ $g < n$ の場合である。

i) $P = n$ $g < n$ の場合。

Complex holonomy diagram は P 32 にあるのと同じである。しかし real の Connected Components (orbit) 分解は異なる。可成り。

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^{n, n-i} = \bigsqcup_{\substack{0 \leq r' \leq i \\ 0 < l_2 \leq n-n-i}} \Lambda_{(l_1, l_2, r')}^{n, n-i} \bigsqcup_{0 \leq r' \leq i} \bigsqcup_{(n-i, 0, r')} \Lambda_{(n-i, 0, r')}^{n, n-i} \bigsqcup_{0 \leq r' \leq i} \bigsqcup_{(n-i, 0, r')} \Lambda_{(n-i, 0, r')}^{n, n-i}$$

ただし

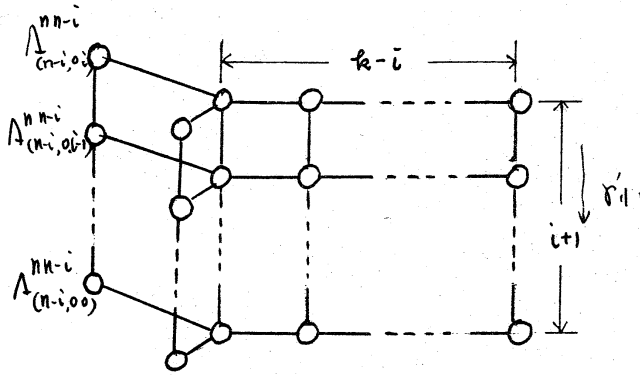
$$\Lambda_{(n-i, 0, r')}^{n, n-i} = \left(\begin{array}{c|c|c} \hline I_{n-i} & & \\ \hline & I_i & I_i \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{c|c} \hline & \\ \hline & E_i & E_i \\ \hline \end{array} \right. \right)$$

\xleftarrow{P} \xrightarrow{g}

$$\Lambda_{(n-i, 0, r')}^{n, n-i} = \left(\begin{array}{c|c|c} \hline I'_{n-i} & & \\ \hline & I_i & I_i \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{c|c} \hline & \\ \hline & E'_i & E'_i \\ \hline \end{array} \right. \right)$$

ただし $I'_{n-i} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ の $(n-i) \times (n-i)$ 行列である。

$\Lambda_{(l_1, l_2, r')}^{n, n-i}$ の $l_2 \geq 0$ とする。Lagrangian 1-2 u 1 は σ に $P //$ に書いた a と同じものがある。(P 39 \wedge $\sigma \sigma <$.)



Λ^{n-i} の real に変ける。

orbit 分解

($\Lambda^{i,0}$ の real に変ける orbit 分解もあらわしてある)

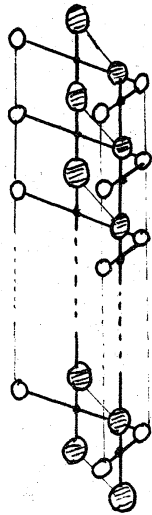
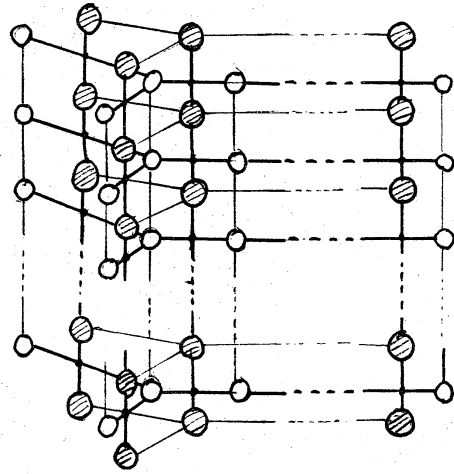
→ l. j.

Λ^{n-i} と Λ^{n-i+1} と

⊙ と ○ と

示して交わり方を図示したものを。

($\Lambda^{i,0}$ と ⊙, $\Lambda^{i+1,0}$ と ○ としたのつながりも表してある)



Λ^{n-k} と Λ^{n-k+1} の間のつながりも ⊙ と ○ と示してある。($\Lambda^{k,0}$ と ⊙, $\Lambda^{k-1,0}$ と ○ としたのつながりもあらわしてある)

いまこの図の場合も、右に書かれたものが、 l の値が小さく、下に書かれたものが、 r' の値が小さい。ゆえに、

右に書かれたものは、左上が / のつながりもあらわす。

また

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^{i,0} = \bigsqcup_{\substack{0 \leq r' \leq i \\ 0 < l_2 \leq m-n-i}} \Lambda_{(l_1, l_2, r')}^{i,0} \bigsqcup_{0 \leq r' \leq i} \Lambda_{(n-i, 0, r')}^{i,0} \bigsqcup_{0 \leq r' \leq i} \Lambda_{(n-i, 0, r')}^{i,0}$$

また

$$\Lambda_{(n-i, 0, r')}^{i,0} = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & E_i^{r'} & E_i^{r'} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c|c|c} I_{n-i} & & \\ \hline & I_i & I_i \\ \hline \end{array} \right)$$

$$\Lambda_{(n-i, 0, r')}^{i,0} = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & E_i^{r'} & E_i^{r'} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c|c|c} I'_{n-i} & & \\ \hline & I_i & I_i \\ \hline \end{array} \right)$$

いすれも $0 \leq i \leq m-n$. つるがり方は P39 のようにする。

さて、問題は、例によつて $\Lambda^{n-k,0}$ と $\Lambda^{k,0}$ の間のつるがりであるか。これは、 $GL(n-k, \mathbb{C}) \times GL(k, \mathbb{C})$ (real form は $\mathbb{C} \in \mathbb{R}$ に変えた) の相対変式の最大過剰決定系と同型であり、これは $p < n$ の場合と変わらない。したがつてあとは同様の tricks を使つて計算することができる。このときには、P36 ~ P37. にあつて書いた行列を $p = n$ としてあつてはかゝらば N 左側の \star の部分

と書きかえることができる。具体的には次のようになる。

i). $p=n$ $q < n$ の場合.

$$\begin{bmatrix} |f|_0^s(x) \\ |f|_{0'}^s(x) \\ \vdots \\ |f|_q^s(x) \end{bmatrix} = \int (2\pi)^{\frac{mn}{2}} |c_0|^s |c_1|^{\frac{1}{2}} C(\lambda)^t A(s) \begin{bmatrix} |f^*|_0^{-s-\frac{m}{2}}(y) \\ |f^*|_{0'}^{-s-\frac{m}{2}}(y) \\ \vdots \\ |f^*|_q^{-s-\frac{m}{2}}(y) \end{bmatrix} \exp \pi \langle x, y \rangle dy$$

$$\text{ここで } |f|_0^s(x) = \begin{cases} |f|^s(x) & x \in \Lambda_{(n,0,0)}^{n,n} \\ 0 & x \notin \Lambda_{(n,0,0)}^{n,n} \end{cases}$$

$$|f|_{0'}^s(x) = \begin{cases} |f|^s(x) & x \in \Lambda_{(n,0,0)'}^{n,n} \\ 0 & x \notin \Lambda_{(n,0,0)'}^{n,n} \end{cases}$$

$$|f^*|_0^{-s-\frac{m}{2}}(y) = \begin{cases} |f^*|^{-s-\frac{m}{2}}(y) & y \in \Lambda_{(n,0,0)}^{0,0} \\ 0 & y \notin \Lambda_{(n,0,0)}^{0,0} \end{cases}$$

$$|f^*|_{0'}^{-s-\frac{m}{2}}(y) = \begin{cases} |f^*|^{-s-\frac{m}{2}}(y) & y \in \Lambda_{(n,0,0)'}^{0,0} \\ 0 & y \notin \Lambda_{(n,0,0)'}^{0,0} \end{cases}$$

と表わす。また i). $p < n$ $q < n$ の場合と同じことと
 する。すると $\lambda = 2s + m - n$ $\tilde{r} = 2n - m$ として

$$C(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda+1) \cdots \Gamma(\lambda+(2n-m))}{(\sqrt{2\pi})^{2n-m}} \times \begin{cases} (-2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\tilde{r}-1}{2}} (2 \cos(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)))^{\tilde{r} \text{ odd}} \\ (2 \sin \pi \lambda)^{\frac{\tilde{r}}{2}} & \tilde{r} \text{ even} \end{cases}$$

となる。

$$A(s) = \tilde{A}(s) \frac{1}{(2\pi i)^k} \prod_{i=1}^k P(s + \frac{i}{2} + \frac{1}{2}) \prod_{i=0}^{k-1} P(s + \frac{m}{2} - \frac{i}{2})$$

とし以下、 $\tilde{A}(s)$ は \mathbb{C} 上で $k = m - n$ である。

1) $k = 4\tilde{k} + 1$

$$\tilde{A}(s) = \begin{bmatrix} \star\star & & & & \\ & (-1)^{n+1} \star & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \star \end{bmatrix} \times (F\Gamma)^{k-n} (-1)^{\tilde{k}} (a^4 - a^4)^{2\tilde{k}}$$

($k+2$) \times ($k+2$) 行列

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^{n+1} a^2) & , & (-1)^{n-1} \\ 2 (F\Gamma)^{n+1} & , & -(F\Gamma)^{n+1} (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) \end{bmatrix}$$

\star は 3×3 行列である。

① $m = \text{even } n \geq 2$

$$\begin{bmatrix} a^2 & , & a^2 (-1)^{n-1} \\ a^2 & , & a^{-2} (-1)^n - 1 \\ (F\Gamma)^{n+1} & , & (F\Gamma)^{n+1} - (F\Gamma)^{n+1} (a^2 + a^{-2}) \end{bmatrix}$$

② $m = \text{odd } n \geq 3$

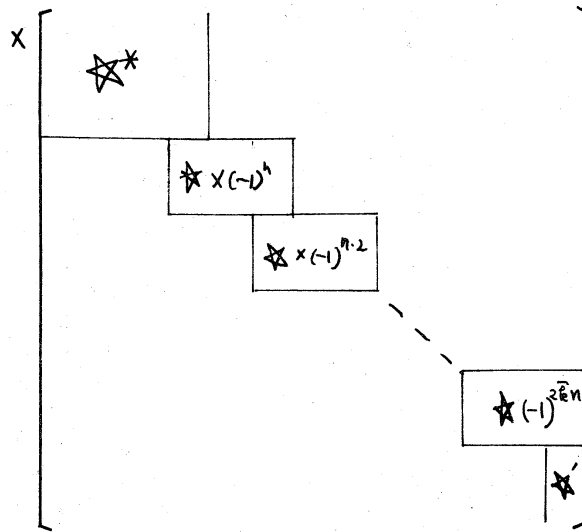
$$\begin{bmatrix} a^{-2} - a^2 & , & 0 & (-1)^{n-1} \\ 0 & , & a^{-2} - a^2 & (-1)^n - 1 \\ (F\Gamma)^{n+1} & , & (F\Gamma)^{n+1} & -(F\Gamma)^{n+1} (a^2 - a^{-2}) \end{bmatrix}$$

2) $k = 4\tilde{k} + 2$

$$\star = \begin{bmatrix} (-1)^n (a^4 - a^4) & , & 0 & , & \\ (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) (-F\Gamma)^n + (F\Gamma)^{2\tilde{k}} & , & -(F\Gamma)^{2\tilde{k}} (a^2 + a^{-2}) (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) & , & (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) (-F\Gamma)^n + (F\Gamma)^{2\tilde{k}} \end{bmatrix}$$

である。

$$\tilde{A}(s) = (-1)^{\tilde{k}+1} (F) (a^{-4} - a^4)^{2\tilde{k}}$$



$$\star' = (a^4 - a^{-4})$$

① $m = \text{even}$, $n \in \mathbb{Z}$ ($n = \text{even}$). \star^* は 3×4 行列で

$$\begin{bmatrix} a^4 - a^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a^4 - a^{-4}) & 0 & 0 \\ (F)^n (a^2 + a^2) & (F)^n (a^2 - a^2) & (F)^n (a^2 + a^2)(a^2 + (-1)^{n+1} a^2) & (a^2 - a^2)(-(F)^n + (F)^n) \end{bmatrix}$$

② $m = \text{odd}$, $n \in \mathbb{Z}$ ($n = \text{odd}$). \star^* は 3×4 行列で

$$\begin{bmatrix} (a^{-2} - (a^2 + a^2)) & -a^2(a^2 + a^2) & 0 & 0 \\ -a^2(a^2 + a^2) & a^2(a^2 + a^2) & 0 & 0 \\ -(F)^n (a^2 + a^2) & -(F)^n (a^2 - a^2) & (F)^n (a^2 + a^2)(a^2 + a^2) & (a^2 + a^2)(\times 0) \end{bmatrix}$$

の ~~3~~ 行 3 列 $\in \mathbb{R}$ である。

$$3) \quad \tilde{k} = 4\tilde{k} + 3$$

$$\star = \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^{n+1} a^2) & -(1 + (-1)^{n+1}) \\ 2(F)^{n+1} (-1)^n & (F)^{n+1} (a^2 + a^2) \end{bmatrix} \quad \text{とおく。}$$

$$\tilde{A}(s) = (-1)^{\tilde{k}+1} (\sqrt{t})^n (a^{-4} - a^4)^{2\tilde{k}+1} x \begin{bmatrix} \star^* & & & \\ & (-1)^{m+1} \star & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{(m+1)(2\tilde{k}+1)} \star \end{bmatrix}$$

$\therefore \star^*$ は

① $m = \text{even}$ ($n = \text{odd}$) $n \in \mathbb{Z}$.

② $m = \text{odd}$ ($n = \text{even}$) $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{bmatrix} a^{-2} & a^2 & -2 \\ a^2 & a^{-2} & -2 \\ (-\sqrt{t})^{n+1} & (-\sqrt{t})^{n+1} & (\sqrt{t})^{n+1}(a^2+a^{-2}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (a^{-2}-a^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^{-2}-a^2) & 0 \\ (\sqrt{t})^{-n+1} & (\sqrt{t})^{-n+1} & (\sqrt{t})^{n+1}(a^2+a^{-2}) \end{bmatrix}$$

4) $k = 4\tilde{k}$

$$\tilde{A}(s) = (-1)^{\tilde{k}+1} (a^{-4} - a^4)^{2\tilde{k}-1} \begin{bmatrix} \star^* & & & \\ & \star (-1)^n & & \\ & & \star (-1)^{n-2} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \star x(-1)^{(2\tilde{k}-1)n} \\ & & & & & \star \end{bmatrix}$$

$$\star = (a^4 - a^{-4})$$

$(k+2) \times (k+2) \times \sqrt{t} \geq 1$

$$\star = \begin{bmatrix} a^4 - a^{-4} & 0 & 0 \\ (\sqrt{t})^n (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) (-1)^n + 1)^p, (-1)^{n+1} (\sqrt{t})^n (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) (a^2 + a^{-2}), (a^2 + (-1)^{n+1} a^{-2}) (\sqrt{t})^n (1)^p + 1 \end{bmatrix}$$

① $m = \text{even}$ ($n = \text{even}$) のとき \star^* は 4×3 行列 τ^n .

$$\begin{bmatrix} -(a^4 - a^2), & 0, & 0, & 0 \\ 0 & -(a^4 - a^2), & 0, & 0 \\ (F)^n(a^2 - a^{-2}), & (F)^n(a^2 - a^{-2}), & (-1)^{n+1}(F)^n(a^2 - a^{-2})(a^2 + a^{-2}), & 2(a^2 - a^{-2})(F)^n \end{bmatrix}$$

② $m = \text{odd}$ ($n = \text{odd}$) のとき \star^* は

$$\begin{bmatrix} -a^2(a^2 + a^{-2}), & a^2(a^2 + a^{-2}), & 0, & 0 \\ a^2(a^2 + a^{-2}), & -a^2(a^2 + a^{-2}), & 0, & 0 \\ -(F)^n(a^2 + a^{-2}), & -(F)^n(a^2 + a^{-2}), & (F)^n(a^2 + a^{-2})^2, & 0 \end{bmatrix}$$

Imaginary Lagrangian が現れる場合の Fourier 変換
(講究録 No. 248 所収)

page. line.	誤	正
P13. l. 8.	$T_S \Lambda_2 \times_{\mathcal{S}} T_S \Lambda_0 / T_S$	$T_S \Lambda_2 \times_{\mathcal{S}} T_S \Lambda_0$
l. 15.	$\tilde{W} = \{ \dots \}$	$\tilde{W} = \{ \dots \mathcal{G}' \neq 0 \}$
P14. l. 9	$\mathcal{G}_2 = 4\mathcal{G}'_0 = 4(x_1^2 + \dots + x_l^2)$	$\mathcal{G}_0 = 4^{-1}\mathcal{G}'_0 = 4^{-1}(\xi_1^2 + \dots + \xi_l^2)$
l. 11	$\omega_{\Lambda_0} = 4^{2(a+\frac{d}{4})} \dots$	$\omega_{\Lambda_0} = 4^{-2(a+\frac{d}{4})} \dots$
P15. l. 1	$\tilde{W} = \{ \dots \}$	$\tilde{W} = \{ \dots \mathcal{G}'_0 \neq 0 \}$
l. 5	$\frac{\tilde{\pi} * (\omega_{\Lambda_2})}{c(s')} \frac{ds'}{ds'}$	$\frac{\tilde{\pi} * (\omega_{\Lambda_2}) \wedge ds'}{c(s')} \frac{ds'}{ds'}$
l. 11	$d\xi \wedge \eta \wedge ds' / c(s') ds'$	$d\xi \wedge \eta \wedge ds' / c(s') / ds'$
P17. F.B. l. 2	$\left(- \frac{\sin \pi(\ell(s)+a)}{(\ell(s)+a)} \right)$	$\left(- \frac{\sin \pi(\ell(s)+a)}{\pi} \right)$
P47. P48. P49.	の \tilde{W} の $\{ \dots \} = \{ f(x) \neq 0, (f(x)+e) \}$ に書込せよ。	