数理解析研究所講究録
266巻 1976年 108-129

local equivalence of differential forms and their deformations

東大 理　大島利雄

§1 序

$\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で定義された正則微分 k-型式の原点での茎を $\Omega^{(k)}$ とする。($k=0$ のとき $\mathcal{O}$ と書き、$k=-1$ のときは vector 場の茎と考える。) $\mathcal{O}$-加群 $\Omega^{(k)}$ には原点を固定する座標変換群 G が作用している。ここでは、主に $\Omega^{(1)}$ の G-軌道を調べる。即ち、局所座標系をとったときの標準型と、それに変換される条件を求める訳であるが、deformation の立場から、次の §2 の意味で generic なもの(即ち、versal defomation を持つもの)のみを考える。§5. では、その結果を使って、接触多様体の中の超曲面について、同様の考察を行なう。

§2 versal deformation (= V.D.)

<u>定義</u>　$\omega(x) \in \Omega^{(k)}_{\mathbb{C}^n}$ の deformation とは、$(\mathbb{C}^l, 0)$ から

$\Omega^{(k)}_{\mathbb{C}^n}$ への解析的写像 $t \longmapsto \tilde{\omega}(x;t)$ で，$\tilde{\omega}(x,0)=\omega(x)$ を満たすもの。換言すれば，$t \in \mathbb{C}^{\ell}$ を parameter とする k-型式で，$t=0$ の時，$\omega(x)$ に一致するもの．

<u>注意</u> $p : \mathbb{C}^{n+\ell} \to \mathbb{C}^{\ell}$ を自然な射影とするとき，t を parameter とする k-型式とは，

$$\begin{cases} k \geqslant 1 \text{ のとき} & \Omega^{(k)}_{\mathbb{C}^{n+\ell}} / \Omega^{(k-1)}_{\mathbb{C}^{n+\ell}} \cdot p^{*}\Omega^{(1)}_{\mathbb{C}^{\ell}} \\ k = 1 \quad 〃 & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+\ell}} \\ k = -1 \quad 〃 & (p^{*}\Omega^{(1)}_{\mathbb{C}^{\ell}})^{\perp} \qquad (\subset \Omega^{(-1)}_{\mathbb{C}^{n+\ell}}) \end{cases}$$

の元と同一視される．

<u>定義</u> $\omega(x) \in \Omega^{(k)}$ の deformations $\tilde{\omega}(x;t)$ から $\tilde{\omega}'(x;t')$ への morphism とは，下図と下式とを満たす写像の組 (Φ, φ) を言う。

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C}^{n+\ell}, 0) \arrow[r, "{(\Phi, \varphi)}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathbb{C}^{n+\ell'}, 0) \arrow[d] \\ (\mathbb{C}^{\ell}, 0) \arrow[r, "\varphi"] & (\mathbb{C}^{\ell'}, 0) \end{tikzcd} \qquad \begin{cases} \Phi : (\mathbb{C}^{n+\ell}, 0) \to (\mathbb{C}^{n}, 0) \\ \varphi : (\mathbb{C}^{\ell}, 0) \to (\mathbb{C}^{\ell'}, 0) \end{cases}$$

(1) $x = \Phi(x;0)$ ($\Phi(0;t)=0$ とは限らない.)

(2) $\tilde{\omega}(x;t) = \Phi^{*}(x;t)\,\tilde{\omega}'(x;\varphi(t))$ (t は parameter)

また，

$\mathcal{O}$-加群としての morphism (Φ, φ, a) とは，$a \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+\ell}}$ で，(2) の条件を，次の (2)′ に置き換えたもの。

(2)′ $\tilde{\omega}(x;t) = a(x;t) \cdot \Phi^{*}(x;t)\,\tilde{\omega}'(x;\varphi(t))$

<u>定義</u>　$\omega(x) \in \Omega^{(k)}$ の deformation $\tilde{\omega}(x;t)$ が versal であるとは（又は，$\mathcal{O}$-加群として versal であるとは），$\omega(x)$ の任意の deformation $\tilde{\omega}'(x;t')$ に対し，$\tilde{\omega}'$ から $\tilde{\omega}$ への morphism（resp. $\mathcal{O}$-加群としての morphism）が存在する場合を言う。

以下，（$\mathcal{O}$-加群としての）versal deformation が存在するための必要十分条件を求めることが目的であるが，それに関して，次のことが問題になる。

$\mathfrak{m}$ を $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ の極大 ideal とする（$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+\ell}}$ でないことに注意せよ）

i）$^\forall N$ に対し，modulo $\mathfrak{m}^N\Omega^{(k)}$ で考えれば V.D. が存在するが，その時の parameters の数の最小値を $\ell(N)$ とすれば，

$$\lim_{N\to\infty} \ell(N) < \infty$$

となるか。

ii）形式的巾級数環 $\hat{\mathcal{O}}$ の中で考えて，V.D. が存在するか。この時の V.D. を $\hat{G}$-V.D. と呼ぼう。（$G \to \hat{G}$）

iii）deformation $\tilde{\omega}$ として，$\tilde{\omega} \equiv \omega \mod \mathfrak{m}^N\Omega^{(k)}$ となるもののみの中で考えた時，ω の V.D. が存在するか。この時の V.D. を G_N-V.D. と呼ぼう。

iv) infinitesimal には，（即ち，mod $o(|t|)$ で考えたとき）V.D. が存在するか．

ω の V.D. $\widetilde{\omega}$ が存在するとき，

v) $\widetilde{\omega}$ が good か

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ parameter の空間 $\mathbb{C}^l$ の原点の近傍 U と，それの有限個の disjoint real analytic submanifolds への分割 $U = \bigcup_j U_j$ と，射影 $\pi_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{m_j}$ が存在して，

" $t_1, t_2 \in U_j$, $\widetilde{\omega}(x; t_2) \in G \cdot \widetilde{\omega}(x; t_1) \Longleftrightarrow \pi_j(t_1) = \pi_j(t_2)$ "

vi) ω が性質 (F) を持つか．

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$\omega' \equiv \omega \mod m^N \Omega^{(k)}$ ならば ω' も V.D. を持ち，しかも ω' 自身が ω' の G_N-V.D. である．

§3 vector 場の場合．

$v \in \Omega^{(-1)}_{\mathbb{C}^n}$ に対し，次の条件を考える．

(1) $n = 1$ で $v \neq 0$

(2) $v(0) \neq 0$

(3) $v(0) = 0$ とする。この時，線型写像

$$\begin{array}{cccc} T_v : & T_0\mathbb{C}^n & \longrightarrow & T_0\mathbb{C}^n \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & w & \longmapsto & [v, w] \end{array}$$

が well-defined となるが，その固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ としたとき，$\mathbb{C}$ の原点を通る超平面 H が存在して，$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ はHで区切られた2つの領域の1方にのみ存在するようにできる。

<u>定理</u> (1) または (2) または (3) が成立すれば，v は good で性質 (F) を持つ V.D. が存在する。逆に (1) 〜 (3) のいずれもが成立しなければ，v は $\hat{\mathcal{O}}$-加群としての $\hat{G}_1$-V.D. を（従って，単に V.D. を）持たない。

v が V.D. を持つかどうかということは，Gv の元に関しても同じだから，Gv が V.D. を持つかどうかと言ってもよい。$\mathcal{O}$-加群として考えるときは，Gv の代わりに $G(\mathcal{O}^\times v)$ を考えればよい。（ $\mathcal{O}^\times = \{ f \in \mathcal{O} \, ; \, f(0) \neq 0 \}$ ）

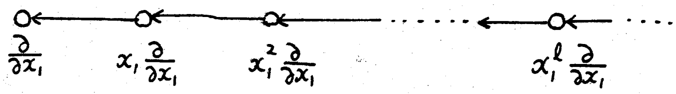
$Gv_1 \neq Gv_2$ の時 （又は $G\mathcal{O}^\times v_1 \neq G\mathcal{O}^\times v_2$ の時）

$$v_1 \longleftarrow v_2$$

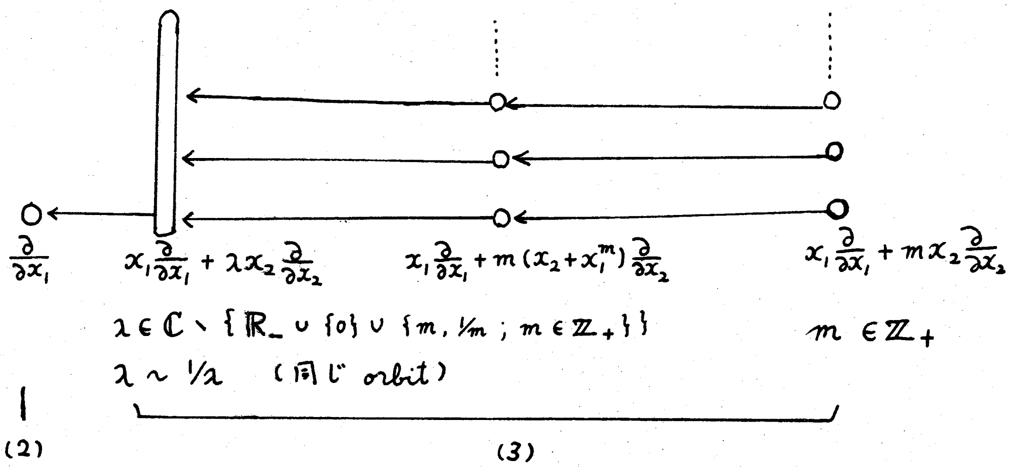
とは，v_2 の（十分小さな）deformation に Gv_1 の元（resp. $G\mathcal{O}^\times v_1$ の元）が現われることを示す。

そこで，$n = 1, 2$ の場合，$\mathcal{O}$-加群としての V.D. が存在する場合の $G\mathcal{O}^\times$-軌道の代表点をすべて図示すれば，（$\mathcal{O}$-加群として，でない場合も大体同じ）

$n=1$ の場合　（(1) の条件）



$n=2$ の場合



G_2-V.D. について，詳しくは略すが，次の例を見よ。

・$n=2$ で，　$v=a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}+a_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}$　　$a_1(0)=a_2(0)=0$

T_v の固有値が，λ_1 と $-\lambda_2$ （$\lambda_i\in\mathbb{R}_+$）　とする。

(イ)　$\lambda_2/\lambda_1\notin\mathbb{Q}$　なら，$\hat{G}_2$-V.D.　を持つ。

(ロ)　$^\exists C>0$　s.t.　$C|\lambda_2/\lambda_1-n/m|\geqq m^{-C}$　$(^\forall m,n\in\mathbb{Z}_+)$

ならば，性質 (F) を持つ G_2-V.D. が存在する。

(ハ)　(イ) であって，性質 (F) を持つ G_2-V.D. が存在しない場合がある。

(ニ)　$\lambda_1=\lambda_2$　となる場合を考えよう。

このとき，v は次のものの $\hat{G}\mathcal{O}^\times$-orbit になる。

$$w_{d,c} = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2(1+(x_1x_2)^d + C(x_1x_2)^{2d})\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$(1 \leq d \leq \infty\ ,\quad C \sim 1-C)$$

このとき, $d<\infty$ ならば $v \in \hat{G}w_{d,c}$ であっても, $v \in Gw_{d,c}$ であるとは限らない。 例えば,

$$Gw_{d,c} \not\ni x_1(1+\varepsilon x_1(x_1x_2)^m)\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2(1+(x_1x_2)^d + C(x_1x_2)^{2d})\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$(\varepsilon \neq 0\ ,\quad m \gg 0)$$

§4 1-form の場合

<u>定義</u> $k \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\begin{cases} k = 2l \ (\text{even}) \text{ の時}, & \omega^k \equiv d\omega \wedge \cdots \wedge d\omega \quad l\text{ケ} \\ k = 2l+1 \ (\text{odd}) \quad \text{〃}, & \omega^k \equiv \omega \wedge \omega^{k-1} \end{cases}$$

<u>定理</u> $n = 2l \ (l \geq 1)$ のとき,

・$\omega \in \Omega^{(1)}_{\mathbb{C}^n}$ が $\mathcal{O}$-加群として V.D. を持つ

$\Leftrightarrow$

(1) $\omega^{n-1}(0) \neq 0$

または

(2) $\omega^{n-1}(0) = 0$, $\omega^n(0) \neq 0$ かつ

$\iota_v d\omega = \omega$ を満たす $\exists 1\ v \in \Omega^{(-1)}$ が V.D. を持つ.

・$\omega \in \Omega^{(1)}_{\mathbb{C}^n}$ が V.D. を持つ.

$\Leftrightarrow$

(1)′ $\omega^{(n-1)}(0) \neq 0$, $\omega^{(n)}(0) \neq 0$

または.

(1)″ $\omega^{(n-1)}(0) \neq 0$ で，$\omega^{(n)}(\overbrace{\Omega^{(-1)} \otimes \cdots \otimes \Omega^{(-1)}}^{n ケ}) = \mathcal{O} f$

　($f \in \mathcal{O}$) と置いたとき，$f(0) = 0$，$df(0) \neq 0$.

または

(2)　これは前頁の(2)と同じ。

$n = 2l - 1$　($l \geqq 1$)　のとき．

・$\omega \in \Omega^{(1)}_{\mathbb{C}^n}$ が V.D. を持つ．($\mathcal{O}$-加群 として V.D. を持つ)
　　　　　　　　　　　　　　　　としても同じ

$\Leftarrow$

1)　$\omega^{(n)}(0) \neq 0$

または

2)　$\omega^{(n)}(\Omega^{(-1)} \otimes \cdots \otimes \Omega^{(-1)}) = \mathcal{O} f$　としたとき，$f(0) = 0$，$df(0) \neq 0$

　$\omega^{(n-2)}\big|_{\{f=0\}}(0) \neq 0$

または，

3)　$\omega^{(n)}(\Omega^{(-1)} \otimes \cdots \otimes \Omega^{(-1)}) = \mathcal{O} f$　としたとき，$f(0) = 0$，$df(0) \neq 0$

　かつ，$\omega(0) = 0$，$\omega^{(n-1)}\big|_{\{f=0\}}(0) \neq 0$　で．

　$\iota_v(d\omega|_{\{f=0\}}) = \omega|_{\{f=0\}}$ を満たす $\exists_1\, v \in \Omega^{(-1)}_{\mathbb{C}^{n-1}}$ が

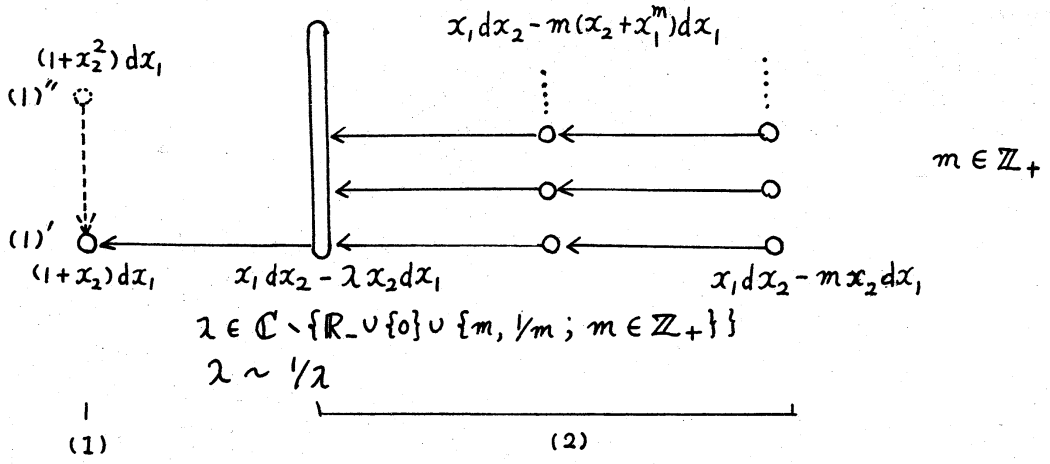
　V.D. を持つ。

(ここで，$\Rightarrow$ も成立すると思われる。)

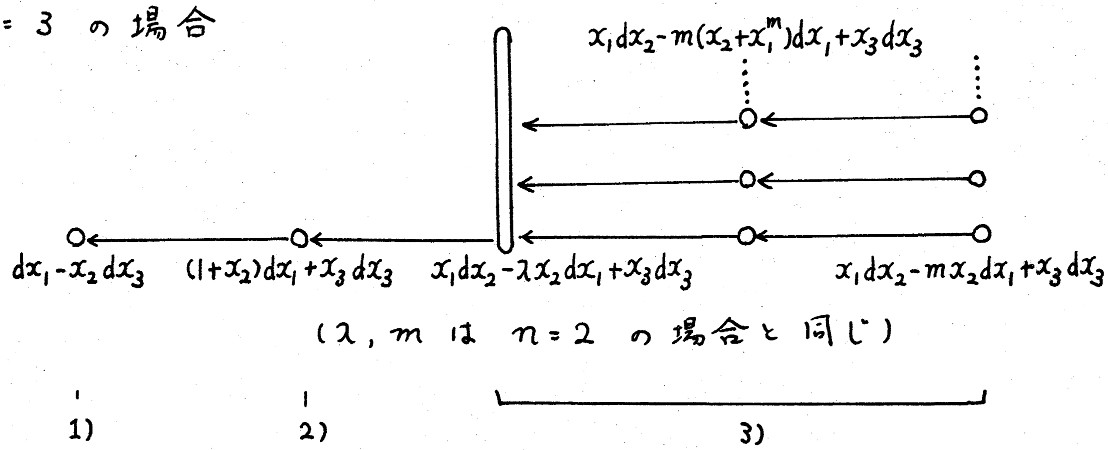
さらに，上のいずれの条件 ((1) ～ 3)) が成立する場合でも，その ($\mathcal{O}$-加群としての) V.D. は good で，性質 (F) を持つ。

さて，§3 におけると同様，上の条件が成立する場合の orbits の代表点を図示しよう。

$n=2$ の場合



$n=3$ の場合



§5 接触多様体の超曲面

$X=(\mathbb{C}^{2n+1},\omega;0)$ を接触多様体の原点での芽とする.
(即ち, $\omega^{(2n+1)}(0)\neq 0$, $\omega\in\Omega^{(1)}_{\mathbb{C}^{2n+1}}$ である)

V を $f=0$ (f は square free) で定義された原点を通るXの超曲面とする。また, G_c を, 原点を固定するXの接触変換群とする(即ち, $G_c=\{\Phi\in G;\ \Phi^*\omega\in\mathcal{O}\omega\}$).

§2における同様，この場合も V の V.D. という概念が定義できる．即ち，$f\in\Omega^{(0)}_{\mathbb{C}^{2n+1}}$ の deformations を考え，それらの間の morphism とは $\mathcal{O}$-加群としての morphism (Φ,φ,a) で，$\Phi(x,t)$ がすべての t に関して接触変換となっているものを言うことにすればよい．（この場合も $\Phi(0;t)=0$ は要請しない．）

<u>定理</u>　V が V.D. を持つ

$\Longleftrightarrow$ V が非特異で，$\omega|_V$ が V.D. を持つ．$(\omega|_V\in\Omega^{(1)}_V=\Omega^{(1)}_{\mathbb{C}^{2n}})$

さらに，次の定理が成立するので，V.D. を持つ超曲面の G_c-orbits の分類は完全に分かる．

<u>定理</u>

$$\left\{\begin{array}{l}\text{原点を通る } X \text{ の非特異超}\\ \text{曲面 } V \text{ の } G_c\text{-orbits}\end{array}\right\}\xrightarrow{\sim}\left\{\begin{array}{l}\varphi_V : V \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^{2n},0) \text{ とみなし}\\ \text{た時の } \varphi_V^{-1\,*}(\omega|_V) \text{ 達の}\\ G'\mathcal{O}'^{\times}\text{-orbits}\end{array}\right\}$$

$$\left(\hookrightarrow\left\{\Omega^{(1)}_{\mathbb{C}^{2n}} \text{ の } G'\mathcal{O}'^{\times}\text{-orbits}\right\}\right)$$

但し，G' は $\mathbb{C}^{2n}$ の原点を固定する座標変換群で，$\mathcal{O}'=\Omega^{(0)}_{\mathbb{C}^{2n}}$.

さて，(V_1,V_2) を，X の原点を通る超曲面の組とする．このときも，(V_1,V_2) の V.D. が定義される．即ち，

$(f_1(x), f_2(x))$ の deformations $(\tilde{f}_1(x,t), \tilde{f}_2(x,t))$ を考えて，それらの間の morphism とは，$\mathcal{O}$-加群としての morphism (Φ_1, φ_1, a_1) と (Φ_2, φ_2, a_2) の組で，

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 \\ \Phi_1(x;t) \text{ は } {}^\forall t \text{ に関し接触変換となるもの} \end{cases}$$

を言えばよい。

$n \geqq 2$ とする.

定理 (V_1, V_2) は性質 (F) を持つ V.D. が存在する.

$\Leftrightarrow$ (V_1, V_2) は性質 (F) を持つ infinitesimal $G_{C.N}$ - V.D. が存在する. $(N \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow$ $(V_1, V_2) \in G_C(\{x_1 = 0\}, \{p_1 = 0\})$

（但し，(p, x, z) は $\omega = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$ となる正準座標系）

$\Leftrightarrow$ " $V_1 = \{f = 0\}$, $V_2 = \{g = 0\}$, $\{f, g\}(0) \neq 0$ " と書ける.

↑ Poisson bracket

上の定理は，回折現象の方程式の標準型に関連した次の予想（佐藤先生による。[1]，[3] を参照せよ）の deformation の立場からの反例を与えていることに注意しよう。

" X の原点を通る非特異超曲面の組 (V_1, V_2) で，次の条件を満たすものは，1つの G_C - orbit を構成している．即ち，$V_i = \{f_i = 0\}$ $i = 1, 2$ と定義されていて，

$\{f_1, f_2\}(0) = 0$, $df_1 \wedge df_2(0) \neq 0$, $\{f_1, \{f_1, f_2\}\}(0) \neq 0$, $\{f_2, \{f_1, f_2\}\}(0) \neq 0$ "

この定理は次の命題から容易に従う.

命題 $P^*X \ni (x;\xi dx\infty)$ の点 $x_0^* = (0; dx_n\infty)$ の近傍で定義された2つの hypersurfaces $(n = \dim X \geqslant 3)$

$$\begin{cases} V_1 = \{\xi_1 = 0\} \\ V_{2,t} = \{\xi_1\xi_n^{-1} + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2 + h(x,\xi)t = 0\} \end{cases}$$

を考える. ($t \in \mathbb{C}$ は 0 の近傍を動く parameter)

$g(s) = \sum_{j\geqslant 0} c_j s^j$ が次の条件を満たすとする.

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|c_j|} < \infty, \quad \underline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{j!\,|c_j|} = \infty$$

この時,

$$\begin{aligned} h &= (\xi_n \tfrac{\partial}{\partial\xi_2} - \tfrac{\partial}{\partial x_1})(x_1 x_2^{\ell}\, g(\xi_2/\xi_n)) \\ &= x_2^{\ell}(x_1 g'(\xi_2/\xi_n) - g(\xi_2/\xi_n)) \end{aligned}$$

とおくと, 任意の正整数 ℓ に対し, 次の条件を満たす Φ_t が存在しない (実際には, modulo $o(|t|)$ でも)

- Φ_t は t を正則 parameter とする P^*X の接触変換である.
- $\Phi_t(V_1) = V_1$, $\Phi_t(V_{2,t}) = V_{2,0}$, $\Phi_0(x_0^*) = x_0^*$

証明 次の正準変換を考える.

$$\begin{cases} \xi_1 \leftarrow \xi_1\xi_n^{-1/3}, & \xi_2 \leftarrow \xi_2\xi_n^{-2/3}, & \xi_3 \leftarrow \xi_3, \cdots, \xi_n \leftarrow \xi_n \\ x_1 \leftarrow x_1\xi_n^{1/3}, & x_2 \leftarrow x_2\xi_n^{2/3}, & x_3 \leftarrow x_3, \cdots, x_n \leftarrow x_n + (\frac{1}{3}x_1\xi_1 + \frac{2}{3}x_2\xi_2)/\xi_n \end{cases}$$

これにより，

$$V_1=\{\xi_1=0\},\quad V_2=\{\xi_1+\tfrac{1}{2}x_1^2+x_2+h'(x,\xi)t=0\}.$$

（h' はもとの座標系で 2/3 次同次，$h'=\xi_n^{2/3}h$ である）

$\Phi_t:(\xi,x)\to(\eta,y)$ で，条件を満たすものが存在すると仮定しよう。$\Phi_0=id.$ としてよい。（$\Phi_t\longrightarrow\Phi_0^{-1}\circ\Phi_t$）

恒等変換の近くの正準変換の generating function Ω_t は次の様に表わせる。

$$\begin{cases}\Omega_t=\Omega'_t(\xi,y)-\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\\ \Omega'_t=\sum_{j=1}^{n}\xi_j y_j+U(\xi,y,t)\cdot t, \qquad U=\sum_{j\geq 0}U_j(\xi,y)t^j\end{cases}$$

$$\begin{cases}\eta_j=\dfrac{\partial\Omega'_t}{\partial y_j}=\xi_j+\dfrac{\partial U}{\partial y_j}\cdot t\\ x_j=\dfrac{\partial\Omega'_t}{\partial\xi_j}=y_j+\dfrac{\partial U}{\partial\xi_j}\cdot t\end{cases}\qquad (j=1,\cdots,n)$$

以後，独立変数として，(ξ,y,t) をとる。

$\Phi_t(V_1)=\{\eta_1=0\}$ であるから，$\left.\dfrac{\partial\Omega'_t}{\partial y_1}\right|_{\xi_1=0}=0$。従って，

(1) $$\left.\frac{\partial U}{\partial y_1}\right|_{\xi_1=0}=0.$$

また，$\Phi_t(V_{2,t})=\{\eta_1+\tfrac{1}{2}y_1^2+y_2=0\}$ であるから，

$$\xi_1+\tfrac{1}{2}\left(y_1+\frac{\partial U}{\partial\xi_1}t\right)^2+\left(y_2+\frac{\partial U}{\partial\xi_2}t\right)+h\left(y+\frac{\partial U}{\partial\xi}t,\xi\right)t$$
$$=(1+{}^{\exists}\varphi t)\left(\xi_1+\frac{\partial U}{\partial y_1}t+\tfrac{1}{2}y_1^2+y_2\right)$$

ここで，$\varphi(\xi,y,t)=\sum_{j\geq 0}\varphi_j(\xi,y)t^j$ とおこう。

これから，次の式を得る。

$$(2)\qquad -\frac{\partial U}{\partial y_1} + y_1\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} - (\xi_1 + \tfrac{1}{2}y_1^2 + y_2)\varphi = -\frac{t}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi_1}\right)^2 - h'(y + \frac{\partial U}{\partial \xi}t, \xi) + t\varphi\frac{\partial U}{\partial y_1}$$

さらに，$\tau_1 = \xi_1 + \frac{1}{2}y_1^2$，$\tau_2 = \xi_2 + y_1$，$z_1 = y_1$，$z_2 = y_2$

という座標変換（＝正準変換）を考えると，

$$\begin{cases} \xi_1 = \tau_1 - \frac{1}{2}z_1^2, \quad \xi_2 = \tau_2 - z_1, \quad y_1 = z_1, \quad y_2 = z_2 \\ \dfrac{\partial}{\partial z_1} = \dfrac{\partial}{\partial y_1} - z_1\dfrac{\partial}{\partial \xi_1} - \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} = -\left(-\dfrac{\partial}{\partial y_1} + y_1\dfrac{\partial}{\partial \xi_1} + \dfrac{\partial}{\partial \xi_2}\right) \end{cases}$$

従って，(2) の左辺は $-\frac{\partial U}{\partial z_1} - (\tau_1 + z_2)\varphi$

U_k，φ_k の満たすべき式は，(1)，(2) より

$$\begin{cases} (1)_k & \left.\dfrac{\partial U_k}{\partial y_1}\right|_{\xi_1=0} = 0 \\ (2)_k & -\dfrac{\partial U_k}{\partial z_1} - (\tau_1 + z_2)\varphi_k = \{(U_j, \varphi_j)_{0\le j\le k-1} \text{ により決まる函数}\} \end{cases}$$

特に，$k=0$ のときは，

$$\begin{cases} (1)_0 & \left.\dfrac{\partial U_0}{\partial y_1}\right|_{\xi_1=0} = 0 \\ (2)_0 & -\dfrac{\partial U_0}{\partial z_1} - (\tau_1 + z_2)\varphi_0 = -h'(y, \xi) \end{cases}$$

以下，$y_3, \cdots, y_n$，$\xi_3, \cdots, \xi_n$ という変数は含まれていても，書かないことにする。

今，$h'(y, \xi) = \frac{\partial}{\partial z_1} f(z_1, z_2, \tau_1, \tau_2)$ とすると $(2)_0$，$(1)_0$ より

$$U_0 = f(z_1, z_2, \tau_1, \tau_2) - (\tau_1 + z_2)\,{}^{\exists}\psi_0(z_1, z_2, \tau_1, \tau_2) - {}^{\exists}\psi_1(z_2, \tau_1, \tau_2)$$

かつ

$$U_0 = {}^{\exists}\psi_2(y_2, \xi_2) + {}^{\exists}\psi_3(y_1, y_2, \xi_1, \xi_2)\cdot\xi_1$$

と表わせることがわかる。 従って，

$$f = (\tau_1 + z_2)\psi_0 + \psi_1(z_2, \tau_1, \tau_2) + \psi_2(y_2, \xi_2) + \xi_1\psi_3.$$

さらに，$\xi_1 = 0$，$y_2 = -\frac{1}{2}y_1^2$ とおくと，

$$f(y_1, -\tfrac{1}{2}y_1^2, \tfrac{1}{2}y_1^2, \xi_2+y_1) = \psi_1(-\tfrac{1}{2}y_1^2, \tfrac{1}{2}y_1^2, \xi_2+y_1) + \psi_2(-\tfrac{1}{2}y_1^2, \xi_2)$$

ここで， $F(y_1, \xi_2) = f(y_1, -\frac{1}{2}y_1^2, \frac{1}{2}y_1^2, \xi_2+y_1)$ とおけば，

(3) $$F(y_1, \xi_2) = \Psi_1(y_1^2, \xi_2+y_1) + \Psi_2(y_1^2, \xi_2)$$

と表わせるはずであり，逆に F が右辺の形に表わせれば，

$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ が存在して（ψ_1, ψ_3 は前頁の形）

$$U_0 = f - (\tau_1+z_2)\cdot\psi_0 - \psi_1 = \psi_2 + \psi_3\cdot\xi_1$$

となる．

以下，2変数の問題となるので，y，ξ の suffix は略す。与えられた F に対し，(3) の形の表示を求めよう。そのために $F(y, \xi)$ が単項式の場合をまず調べる．

⊙ $$\xi^k y^{2N+1-k} = \sum_{j=0}^{N} a_{k,2N+1-k,j}(\xi+y)^{2j+1} y^{2(N-j)} + \sum_{j=0}^{N} b_{k,2N+1-k,j}\, \xi^{2j+1} y^{2(N-j)} \qquad (0 \leq k \leq 2N+1)$$

・$2(N+1) - (2N+2) = 0$ だから $a_{k,2N+1-k,j}$，$b_{k,2N+1-k,j}$ 達は唯一に定まる．（存在は後で示される．）

⊙ $$\xi^k y^{2N-k} = \sum_{j=0}^{N} a_{k,2N-k,j}(\xi+y)^{2j} y^{2(N-j)} + \sum_{j=0}^{N} b_{k,2N-k,j}\, \xi^{2j} y^{2(N-j)} \qquad (0 \leq k \leq 2N)$$

・$2(N+1) - (2N+1) = 0$ だから $a_{k,2N-k,j}$，$b_{k,2N-k,j}$ $(j \geq 1)$ は唯一に定まり，$a_{k,2N-k,0} + b_{k,2N-k,0}$ も決まる．（存在については，次に示す）

$$\left.\begin{aligned} a_{k,2i+1,j} &= a_{k,2i-1,j} = \cdots = a_{k,1,j} \equiv a_{k,j} \\ b_{k,2i+1,j} &= b_{k,2i-1,j} = \cdots = b_{k,1,j} \equiv b_{k,j} \end{aligned}\right\} \text{とおく．}$$

同様に,

$$a_{k,2i,j} = a_{k,0,j} = 0, \quad b_{k,2i,j} = b_{k,0,j} = \delta_{[\frac{k}{2}],j}$$

とすればよい.

$a_{k,j}$ と $b_{k,j}$ は次式を満たす様に定めればよい.

$$(4)_1 \qquad \xi^{2k-1} = \sum_{0\le j\le k} a_{2k-1,j}(\xi+1)^{2j} + \sum_{0\le j\le k} b_{2k-1,j}\,\xi^{2j}$$

$$(4)_2 \qquad \xi^{2k-2} = \sum_{0\le j\le k-1} a_{2k-2,j}(\xi+1)^{2j+1} + \sum_{0\le j\le k-1} b_{2k-2,j}\,\xi^{2j+1}$$

$(4)_1$ に $2k\int_0^{\xi}\cdot\, d\xi$ をほどこすと,

$$\xi^{2k} = \sum \frac{2k}{2j+1} a_{2k-1,j}(\xi+1)^{2j+1} + \sum \frac{2k}{2j+1} b_{2k-1,j}\,\xi^{2j+1} - \sum \frac{2k}{2j+1} a_{2k-1,j}$$

$(4)_2$ に $(2k-1)\int_0^{\xi}\cdot\, d\xi$ をほどこすと

$$\xi^{2k-1} = \sum \frac{2k-1}{2j+2} a_{2k-2,j}(\xi+1)^{2j+2} + \sum \frac{2k-1}{2j+2} b_{2k-2,j}\,\xi^{2j+2} - \sum \frac{2k-1}{2j+2} a_{2k-2,j}$$

よって, $a_{k,j}$, $b_{k,j}$ 達を次式で決めればよいことがわかる.

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} a_{2k,j} = \frac{2k}{2j+1} a_{2k-1,j}, & a_{0,0} = 1, \\ b_{2k,j} = \frac{2k}{2j+1} b_{2k-1,j}, & b_{0,0} = -1, \\ a_{2k-1,j} = \frac{2k-1}{2j} a_{2k-2,j-1} & \text{for } j \geqq 1, \\ b_{2k-1,j} = \frac{2k-1}{2j} b_{2k-2,j-1} & \text{for } j \geqq 1, \\ a_{2k-1,0} = -\sum_{j\geqq 1} \frac{1}{2j+1} a_{2k-1,j} = -\sum_{j\geqq 1} \frac{2k-1}{2j(2j+1)} a_{2k-2,j-1} & \\ b_{2k-1,0} = -a_{2k-1,0} - \sum_{j\geqq 0} \frac{2k-1}{2j+2} a_{2k-2,j}. & \end{array}\right.$$

従って,

$\cdot\ a_{2k,j} = \frac{2k}{2j+1} a_{2k-1,j} = \frac{2k(2k-1)}{(2j+1)2j} a_{2k-2,j-1} = \cdots$

$= \frac{(2k)!}{(2k-2j)!(2j+1)!} a_{2(k-j),0}$

$\cdot\ a_{2k,0} = 2k\, a_{2k-1,0} = -\sum_{j\geq 1} \frac{(2k)(2k-1)}{(2j)(2j+1)} a_{2k-2,j-1} = -\sum_{j\geq 1} a_{2k,j}$

$= -\sum_{1\leq j\leq k} \frac{(2k)!}{(2k-2j)!\,(2j+1)!} a_{2(k-j),0}$

$|a_{2k,0}|$ の $k\to\infty$ での漸近的挙動を調べたい. そのため,

$\cdot\ c_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_{2k,0}$ とおくと, $(c_0 = 1)$

(6) $c_k = \frac{1}{3!} c_{k-1} - \frac{1}{5!} c_{k-2} + \frac{1}{7!} c_{k-3} - \cdots - \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} c_0$

さらに, $d_k = c_{k-1}/c_k$ とおくと,

$$\begin{cases} c_1 = 1/6 & d_1 = 6, & d_5 = 9.841\cdots \\ c_2 = 7/360 & d_2 = 60/7 = 8.75\cdots, & d_6 = 9.8625\cdots \\ c_3 = 31/(6^3\times 70) & d_3 = 294/31 = 9.48\cdots, & d_7 = 9.8678\cdots \\ c_4 = 127/(6^3\times 2800) & d_4 = 1240/127 = 9.76\cdots, & \vdots \end{cases}$$

帰納法により, $9 \leq d_k \leq 11$ $(k\geq 3)$ を示す.

(実際は, $d_k \xrightarrow{k\to\infty} \pi^2 = 9.8696\cdots$ ⇨ "演習問題")

$d_1 = 6$, $d_2 = 60/7 < 11$ であり, d_3, d_4 は不等式を満たす. そこで, $\underline{k\geq 5}$ とすると, 帰納法の仮定より,

$$0 \leq \sum_{j\geq 5} \frac{c_{k-j}}{(2j+1)!} \leq \frac{c_{k-4}}{9!} \sum_{j\geq 5} \frac{9!}{(2j+1)!} (11)^{j-4} \leq \frac{c_{k-4}}{9!} \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} = \frac{c_{k-4}}{9\cdot 9!}$$

ここで，(6) を用いれば，

$$c_k = \sum_{j\geq 1} \frac{-(-1)^j}{(2j+1)!} c_{k-j} \geq \frac{c_{k-1}}{3!} - \frac{c_{k-2}}{5!} + \frac{c_{k-3}}{7!} - \frac{c_{k-4}}{9!} - \frac{c_{k-4}}{9\cdot 9!}$$

$$\geq \frac{c_{k-1}}{3!} - \frac{c_{k-2}}{5!} + \left(\frac{1}{7!} - \frac{10}{9}\frac{11}{9!}\right) c_{k-3} \qquad (\Leftarrow d_{k-3} \leq 11)$$

$$\geq \frac{1}{3!} - \left(\frac{1}{5!} - \left(\frac{1}{7!} - \frac{10}{9}\frac{11}{9!}\right) 9\right) c_{k-2} \qquad (\Leftarrow d_{k-2} \geq 9)$$

$$\geq \left(\frac{1}{3!} - 11\left(\frac{1}{5!} - \left(\frac{1}{7!} - \frac{10}{9}\frac{11}{9!}\right) 9\right)\right) c_{k-1} \qquad (\Leftarrow d_{k-1} \leq 11)$$

$$\geq \frac{1}{11} c_{k-1}$$

最後の不等式は，

$$11\left(\frac{1}{3!} - 11\left(\frac{1}{5!} - 9\left(\frac{1}{7!} - \frac{10}{9}\frac{11}{9!}\right)\right)\right) = \frac{11}{3!} - \frac{11^2}{5!} + \frac{9\cdot 11^2}{7!} - \frac{10\cdot 9\cdot 11^3}{9\cdot 9!} - 1$$

$$= -\frac{121+120-220}{5!} + \frac{1089}{7!} - \frac{11^3\times 10}{9!} = \frac{1089-21\times 42}{7!} - \frac{13310}{9!}$$

$$= \frac{207\times 72 - 13310}{9!} > 0$$ からでる。

同様に，

$$c_k \leq \frac{c_{k-1}}{3!} - \frac{c_{k-2}}{5!} + \frac{c_{k-3}}{7!} - \frac{c_{k-4}}{9!} + \frac{c_{k-4}}{9\cdot 9!}$$

$$\leq \frac{c_{k-1}}{3!} - \frac{c_{k-2}}{5!} + \left(\frac{1}{7!} - \frac{8}{9}\frac{6}{9!}\right) c_{k-3} \qquad (\Leftarrow d_{k-3} \geq 6)$$

$$\leq \frac{c_{k-1}}{3!} - \left(\frac{1}{5!} - 11\left(\frac{1}{7!} - \frac{8}{9}\frac{6}{9!}\right)\right) c_{k-2} \qquad (\Leftarrow d_{k-2} \leq 11)$$

$$\leq \left(\frac{1}{3!} - 9\left(\frac{1}{5!} - 11\left(\frac{1}{7!} - \frac{8}{9}\frac{6}{9!}\right)\right)\right) c_{k-1} \qquad (\Leftarrow d_{k-1} \geq 9)$$

$$\leq \frac{c_{k-1}}{9}$$

最後の不等式は，

$$9\left(\frac{1}{3!} - 9\left(\frac{1}{5!} - 11\left(\frac{1}{7!} - \frac{8}{9}\frac{6}{9!}\right)\right)\right) - 1 = \frac{9}{3!} - \frac{9^2}{5!} + \frac{9^2\cdot 11}{7!} - \frac{8\cdot 6\cdot 9^2\cdot 11}{9\cdot 9!} - 1$$

$$= \frac{180-81-120}{5!} + \frac{891}{7!} - \frac{66}{7!} = \frac{891-21\times 42-66}{7!} = -\frac{57}{7!} < 0$$

よりわかる。

従って，帰納法から，$9 \leq d_k \leq 11$ $(k \geq 3)$ を得る。

よって. $1/11 \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{C_k} \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{C_k} \leq 1/9$ となるので

$$1/\sqrt{11} \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_{k,1}|/k!} \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_{k,1}|/k!} \leq 1/3$$

(実際は. $1/\pi$ に収束する)

これから. 容易に命題を得る。　　　　　　証明終り.

参考文献

証明は., 最後の命題を除いて省略した. "条件" が満たされた場合のV.D.の存在証明は, [2] の Theorem 1.4, 又は Theorem 2.16, 又は [3] の定理3.1 の証明と同様の方法が使える. "条件" が満たされなければ V.D. が存在しないことの証明は, 面倒で, 余り重要とは思われないので, 最後の命題の証明のみ挙げた。

[1] 柏原正樹, 河合隆裕; 単一特性的でない場合の浜田の定理について, 数理研講究録, 226 (1975), 105-113.

[2] 大島利雄; singularities in contact geometry and degenerate pseudo-differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA., 21 (1974), 43-83.

[3] ———— ; 微分形式の特異点について, 数理研講究録, 227 (1975), 97-108.

補足

p11 にある問題"　　"の（deformation の立場からでない）実際の反例について.

（$df_1 \wedge df_2(0) \neq 0 \Rightarrow \omega \wedge df_1 \wedge df_2(0) \neq 0$ と訂正してください）

P^*Y $(\ni (x_0, \ldots, x_n; \sum_{i=0}^{n} \xi_i dx_i \infty))$ の点 $p = (0; dx_n \infty)$ の近傍で定義された3つの hypersurfaces　$(n+1 = \dim X \geq 4)$

$$\begin{cases} W_1 = \{\xi_1 = 0\} \\ W_2 = \{\xi_1 \xi_n^{-1} + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2 = 0\} \\ W_2' = \{\xi_1 \xi_n^{-1} + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2 + h(x_1, x_2, \xi_2/\xi_n) \cdot (\xi_0/\xi_n) = 0\} \end{cases}$$

を考える。但し，h は p12 に与えた形とする。このとき，p の近傍で定義された解析的接触変換 Φ で，

$$\Phi(W_1) = W_1, \quad \Phi(W_2) = W_2', \quad \Phi(p) = p$$

を満たすものは存在しない。

証明　次の正準変換

$$\begin{cases} \xi_1 \leftarrow \xi_1 \xi_n^{-2/3}, & \xi_2 \leftarrow \xi_2 \xi_n^{-2/3}, & \xi_n \leftarrow \xi_n \\ x_1 \leftarrow x_1 \xi_n^{2/3}, & x_2 \leftarrow x_2 \xi_n^{2/3}, & x_n \leftarrow x_n + (\frac{1}{2}x_1\xi_1 + \frac{2}{3}x_2\xi_2)/\xi_n \end{cases}$$

を考えれば，

$$W_1 = \{\xi_1 = 0\}$$

$$W_2 = \{\xi_1 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2 = 0\}$$

$$W_2' = \{ \xi_1 + \tfrac{1}{2}x_1^2 + x_2 + \hat{h}(x_1, x_2, \xi_2, \xi_n)\cdot\xi_0 = 0 \}$$

となる。 これらに対し，条件を満たす正準変換 Φ が，点 $\hat{p} = (0; 0, \cdots, 0, 1)$ の近傍で存在しないことを言えばよい。もし，$\Phi : (x, \xi) \mapsto (y, \eta)$ が存在したとする。 このとき，変換 Φ の 1 次近似を見れば，条件から

$$\begin{cases} \xi_1 \leftrightarrow c_1 \eta_1 & (c_1 \neq 0) \\ x_1 \leftrightarrow \dfrac{1}{c_1} y_1 + (y_1 \text{ を含まぬ項}) & \\ x_2 \leftrightarrow c_2 y_2 + (c_2 - c_1)\eta_1 & (c_2 \neq 0) \end{cases}$$

がわかるので，$\dfrac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}(\hat{p}) \neq 0$ を得る。 従って，適当な indices の集合 $J \subset \{0, 3, 4, \cdots, n\}$ に関する基本正準変換

$$x_j \to \begin{cases} x_j & j \notin J \\ \xi_j & j \in J \end{cases}, \quad \xi_j \to \begin{cases} \xi_j & j \notin J \\ -x_j & j \in J \end{cases}$$

と，indices $\{0, 3, 4, \cdots, n\}$ の中での indices をとりかえる変換とを（これらの変換は，W_1，W_2 を変えないことに注意せよ）考えることにより，

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}(\hat{p}) \neq 0, \quad \frac{\partial(y_0, y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_0, x_1, \cdots, x_n)}(\hat{p}) \neq 0$$

が満たされていると考えてよい。よって，独立変数として (y, ξ) が選べ，generating function Ω として

$$\begin{cases} \Omega = \Omega'(y, \xi) - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} x_j \xi_j \\ \eta_j = \dfrac{\partial \Omega'}{\partial y_j}(y, \xi), \quad x_j = \dfrac{\partial \Omega'}{\partial \xi_j}(y, \xi) \qquad (0 \leqq j \leqq n) \end{cases}$$

をとれる。W_1, W_2, W_2' は, η_0, x_0 を含まない式で定義されていることに注意しよう。 $t \in \mathbb{C}$ に対して
$\Omega'_t = \Omega'(0, y_1, \cdots, y_n, t, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ とおけば

$$\eta_j = \partial\Omega'_t/\partial y_j, \qquad x_j = \partial\Omega'_t/\partial\xi_j \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

は, t を解析的助変数とする正準変換 $\Phi_t^{-1} : (x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n) \longmapsto (y_1, \cdots, y_n, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ を定め, それは

$$\begin{cases} V_1 = \{\xi_1 = 0\} \\ V_{2,t} = \{\xi_1 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2 + \hat{h}(x_1, x_2, \xi_2, \xi_n)\, t = 0\} \end{cases}$$

とおいたとき, $\Phi_t(V_1) = V_1$, $\Phi_t(V_{2,t}) = V_{2,0}$, $\Phi_0(\hat{p}') = \hat{p}'$ を満たす。(但し, $\hat{p}' = (0; 0, \cdots, 0, 1)$)。 以下の証明は, p13 以下と全く同じでよい。