

Holonomy Structure of Landau Singularities

京大 数理研 三輪 哲二
神保 道夫

§0. Introduction.

我々の目標は、場の量子論における S 行列乃至 Green 函数や、統計力学における相関函数のような、或種の超函数の無限系、即ち佐藤[1]の意味での Infinite System を、Microlocal Analysis の立場から解析することにある。

与えられた函数を、それが満たす Microdifferential Equation の holonomic system によつて分析しようというのが Microlocal Analysis の基本原理である。その際に方程式系の台の幾何学的構造を決めることが重要であった。我々の扱おうとする、Infinite system においては、解析しようとする函数も、それが満たすべき方程式系も未知なのであるが、ただ方程式系の台だけは Landau 方程式とよばれる一連の代数方程式系によつて与えられている。そこで最初の課題として、まずこの台の幾何学的構造を明らかにしなければならない。

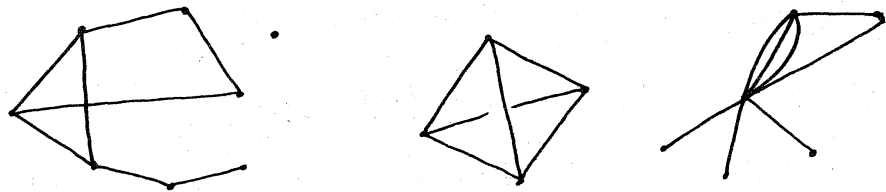
本稿では、この幾何学的部分について得られた最近の結果を報告する。



なお、Infinite Systemについては、佐藤[1]及び佐藤-柏原-三輪[1]を参照して下さい。

§1. Linear Graphs

問題を説明する準備として、linear graph について説明しておく。

linear graph (以下単にグラフという)とは、有限個の頂点を与えてそのうちいくつかを線分で結んだ一次元複体のことである。(この線分を内線とよぶことにする。)



但し、我々は、多重線  は許すが、一つの頂点から出て自分自身に戻る  のようなオタマジックシをもつグラフは考えないことにする。

以下の便宜上、グラフ G に対する基本的諸量の記号を定めるおく。

$$n(G) = \#(G \text{ の 頂点}), \quad N(G) = \#(G \text{ の 内線})$$

$$b_0(G) = \#(G \text{ の 連結成分}), \quad b_1(G) = \#(G \text{ の 独立な circuits})$$

$$\chi(G) = G \text{ の Euler 標数} = b_0(G) - b_1(G) = n(G) - N(G)$$

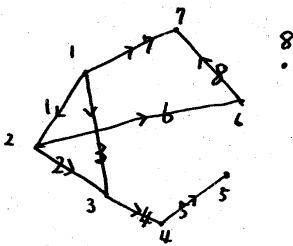
$$m(G) \equiv n(G) - b_0(G) = N(G) - b_1(G)$$

頂点には j , 内線には l という記号を用いる。以下では更に, G の各内線に予め任意の向きを定めた *oriented graph* を扱うが, 特にことわらない限りそれも単に G と書く。

グラフ G を, 頂点の接合状態を表わす行列により, 表示することもできる。即ち

$$[l: j] \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & (\text{内線 } l \text{ が頂点 } j \text{ に流入する}) \\ -1 & (\text{流出する}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

といて, これを成分とする行列 $C = ([l: j])_{\substack{1 \leq l \leq N \\ 1 \leq j \leq n}}$ を作れば, C を与えることと G を与えることは同等になる。この $[l: j]$ を, 頂点 j と内線 l の接合指標 (incidence number), C を接合行列 (incidence matrix) と呼ぶ。



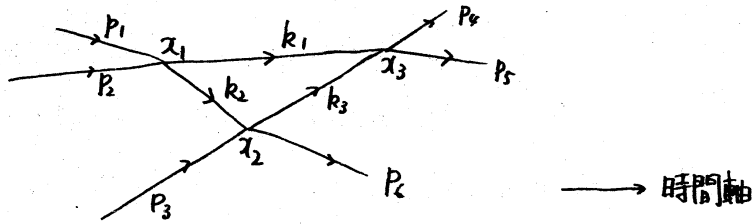
< incidence matrix >

	→ 内線 l							
	1	2	3	4	5	6	7	8
↓ 頂点 j	1	-1	-1				-1	
2	1	-1				-1		
3		1	1	-1				
4				1	-1			
5					1			
6						1		-1
7							1	1
$n=8$								

C は各列に $+1$, -1 が丁度 1 個ずつある行列で, その rank は $m(G) = n(G) - b_0(G) = N(G) - b_1(G)$ である。

§2. Landau equations and Landau holonomic manifolds.

4次元のMinkowski時空間における，素粒子の衝突散乱過程を想像しよう。以下はLandau方程式を導く為のたとえ話であるから，古典力学的な衝突だとして話を進める。



図に描いたのは，4元運動量 p_1, p_2, p_3 をもった粒子が入射して地点 x_2 で衝突し，中間に4元運動量 k_1, k_2 をもった粒子を生み出して，最終的に p_4, p_5, p_6 が射出する過程を表わす。中間を走る粒子の質量を m_2 とすれば，これらの量の間には次の関係式がある：

(I) (4元運動量保存則)

$$p_1 + p_2 = k_1 + k_2, \quad k_2 + p_3 = k_3 + p_6, \quad k_1 + k_3 = p_4 + p_5$$

(II) 適当に $\alpha_l \geq 0$ をとれば，

$$x_3 - x_1 = \alpha_1 k_1, \quad x_2 - x_1 = \alpha_2 k_2, \quad x_3 - x_2 = \alpha_3 k_3$$

(III) (質量殻の条件)

$$k_1^2 = m_1^2, \quad k_2^2 = m_2^2, \quad k_3^2 = m_3^2$$

但し， $k_l^2 = (k_l^{(0)})^2 - (k_l^{(1)})^2 - (k_l^{(2)})^2 - (k_l^{(3)})^2$ は Minkowski 計量。

このように，linear graph に足をつけた図を Feynman diagram と呼び，方程式 (I)~(III) を，この diagram に対す

る Landau 方程式とよぶ。

一般的な定義をしよう。linear graph G と、添字の集合 $\{1, \dots, n'\}$ が与えられたとき、グラフ G と、足を生やす写像 $\sigma: \{1, \dots, n'\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ($n = n(G)$) の組 (G, σ) を, Feynman graph とよぶ。

次に, $M = \mathbb{R}^v$ を, v 次元の Minkowski 計量 $p^2 = (p^{(0)})^2 - (p^{(1)})^2 - \dots - (p^{(v-1)})^2$ の定義された空間, M^* をその dual space とし, M^* の元 α は, 計量によ, M の元と同視する^(†)。

Feynman graph (G, σ) が与えられたとき, これを v 次元空間 $M^* = \mathbb{R}^v$ に描き, 頂点を x_1, \dots, x_n としよう。各頂点 j には, 外線と呼ばれるベクトル $p_j \in M$ ($j \in \sigma^{-1}(j)$) を, 各内線には内線ベクトル $k_l \in M$ を描き込む。このとき, あらかじめ与えた定数 $m_l \geq 0$ を以て, 次の式が成立つことを要求する:

$$(I) \quad p_j = \xi_j(k) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{l=1}^N [l:j] k_l \quad (j=1, \dots, n)$$

$$(II) \quad \alpha_l k_l = \eta_l(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^n [l:j] x_j \quad \text{for } \exists \alpha_l \geq 0.$$

$$(III) \quad k_l^2 = m_l^2 \quad (l=1, \dots, N)$$

但し, $p_j = \sum_{j' \in \sigma^{-1}(j)} p_{j'}$ は, 頂点 j に流入する外線ベクトルの総和である。($\sigma^{-1}(j) = \emptyset$ のときは $p_j = 0$ とおく)

方程式 (I) ~ (III) を Landau 方程式と呼ぶ。

(†) 通常とは逆に, 時空ベクトルである α の方が cotangent vector とみなされている。 α を変数にとったのはうまく Microlocal Analysis に

のらない。

Landau 方程式 (I)~(III) は、次のような解釈もできる。G を電気回路網とみて、 α_j は点 j における電位、 k_l, α_l は内線 l を走る電流及び抵抗を表わすと考えれば、(I), (II) はそれぞれ Kirchhoff の第1法則、第2法則を表わしている。なお、(II) は α を消去した方程式

$$(II') \quad \sum_{l=1}^N [C_{i:l}] \alpha_l k_l = 0 \quad (i=1, \dots, b_r(G))$$

と同値である。

さて、(I)~(III) によつて、 $T^*(M^n)$ の部分多様体が定義される。これを、Feynman graph (G, σ) に対する (positive α -) Landau holonomic manifold と呼び、 $\Lambda_{G, \sigma}^+$ で表わす：

$$\Lambda_{G, \sigma}^+ = \{ (q, y) \in T^*(M^n) \mid \exists \alpha_l \geq 0, \exists k_l \in M \ (l=1, \dots, N) \text{ が存在して, } y_j = \alpha_{0j} \text{ として (I)~(III) が成立つ } \}$$

その複素化 $\Lambda_{G, \sigma}^{\mathbb{C}}$ は単に Landau holonomic manifold と呼ぶ。

特に、 $\sigma = \text{id.}$ のとき、単に Λ_G^+ , $\Lambda_G^{\mathbb{C}}$ と書いて、leading Landau holonomic manifold と呼ぶ。

後に示すように、 $\sigma^{-1}(j) = \emptyset$ となる j (内頂点と呼ぶ) が無い時には、 $\Lambda_{G, \sigma}$ は既約な holonomic (= Lagrangian) manifold となる。

さて、我々が考察の対象とする Infinite System とは、 M^n 上

の超関数 $\tau_n(p_1, \dots, p_n)$ の無限個の組 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ であって、いくつかの付帯条件を満たすものであるが、特に

$$SS\tau_{n_0} \subset \bigcup_{G, \sigma} \Lambda_{G, \sigma}^+ \quad ((G, \sigma) \text{ は, } \sigma: \{1, \dots, n_0\} \rightarrow \{1, \dots, n(G)\} \text{ となるすべての組にわたる})$$

かつ、 τ_{n_0} は $\Lambda_{G, \sigma}^+$ の generic point で、simple な holonomic system を満たす

を要請する。(正確な条件については佐藤[1]参照。)

また、ここでは詳しく述べないが、 (G, σ) に対する Feynman 積分

$$F_{G, \sigma}(q_1, \dots, q_n) = \int \dots \int \prod_{j=1}^n \delta^{\nu}(p_j - \xi_j(k)) \prod_{\ell=1}^N \frac{1}{k_{\ell}^2 - m_{\ell}^2 + i0} d^{\nu}k_1 \dots d^{\nu}k_N$$

については、少なくとも積分が microlocal に意味を持つ限り

$$SSF_{G, \sigma} \subset \bigcup_{\tau} \Lambda_{\tau(G), \tau\sigma}^+ \quad (\tau \text{ は } G \text{ の内線を contract する写像})$$

が証明される。

そこで、これら Landau 多様体たちの holonomy 的構造が問題にされるのである。

§3. Holonomy structure of Landau singularities

本節では、専ら 各頂点に外線が一本ずつ入ったグラフ を考察する。内頂点のないグラフについての結果は、この場合に帰着される。

まず, Landau 方程式から α_l, k_l を消去すれば,

$$\Lambda_G^+ = \text{closure of } \left\{ (p, x) \mid \begin{aligned} p_j &= \text{grad}_{x_j} H_G(x) \quad (j=1, \dots, n), \\ \eta_l(x)^2 &> 0 \quad (l=1, \dots, N) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{但し } H_G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^N m_l \sqrt{\eta_l(x)^2}$$

を得る。(†) $\Lambda_G^{\mathbb{C}}$ についても同様である。

定理 1

$\Lambda_G^+, \Lambda_G^{\mathbb{C}}$ は, 空でない既約な holonomic manifold.

(証明)

基本 1 型式 $\omega = \langle x, dp \rangle$ を Λ_G^+ に制限すれば, $H_G(x)$ が斉次一次の解析関数であることから

$$\begin{aligned} \omega|_{\Lambda_G^+} &= d\langle x, p \rangle|_{\Lambda_G^+} - \langle p, dx \rangle|_{\Lambda_G^+} \\ &= d\langle x, \text{grad}_x H_G(x) \rangle - \langle \text{grad}_x H_G(x), dx \rangle \\ &= dH_G(x) - dH_G(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

従って holonomic であることは次元から明らかである。

(†) 本節では $m_l \geq 0$ とする。

定理 2.

グラフ G の部分グラフ G_1 の各連結成分を一点に縮めて得られるグラフを $\pi(G) = G/G_1$ とする。ここに G_1 は, 適当な写像 $\tau: \{1, \dots, n(G)\} \rightarrow \{1, \dots, n'\}$ で, 各 $\tau'(j')$ が空でなく G で連結であるようなものを選び, $\tau'(j')$ を結

ぶ内線の合併を G_1 の内線として得られるような部分グラフとする。このとき Λ_G^+ と $\Lambda_{\pi(G), \tau}^+$ は regular に交わり,

$$\text{codim}_{\Lambda_G^+} \Lambda_G^+ \cap \Lambda_{\pi(G), \tau}^+ = \text{codim}_{M^{n(G_1)}} L_{G_1} - \nu_{b_0}(G_1)$$

但し, $L_{G_1} = \pi(\Lambda_{G_1}^+)$, $\pi: T^*M^{n(G_1)} \rightarrow M^{n(G_1)}$ は射影。

特に, 余次元 1 の交わり $\Leftrightarrow \text{codim } L_{G_1} = \nu + 1$.

(証明)

簡単の為, G_1 は連結とする。いま

$$H_G(x) = H'(x) + H''(x), \quad H'(x) = \sum_{l \text{ は } G_1 \text{ の内線}} m_l \sqrt{\eta_l(x)^2}$$

と置けば, $H''(x)$ は $\Lambda_G^+ \cap \Lambda_{\pi(G), \tau}^+$ の generic point の近傍で解析的な斉次一次の函数である。そこで,

$$q_j = p_j - \text{grad}_x H''(x), \quad y_j = x_j$$

とすると, $(p, x) \mapsto (q, y)$ は接触変換になる。し

かも, この変換によつて

$$\Lambda_G^+ \longrightarrow \Lambda_{G_1}^+ \times (\{0\} \times M^{*n(G) - n(G_1)})$$

$$\Lambda_{\pi(G), \tau}^+ \longrightarrow \Lambda_{pt, \tau}^+ \times (\{0\} \times M^{*n(G) - n(G_1)})$$

とうつることが分る。 τ は $\{1, \dots, n(G_1)\}^* \rightarrow pt$ なる写像。

よつて, 定理は $\Lambda_{G_1}^+$ と $\Lambda_{pt, \tau}^+$ の場合に帰着し, この場合は容易である。

一般に, Landau 多様体上の点 (p, x) に対しては, つねに

$\sum_{j=1}^n p_j = 0$ (overall 保存則) が成立しており, 従って L_G の余次元は ν 以上である。内頂点のない場合には, この余次元を, グラフから有限回の手続きで判定できる。 (G, σ) が内頂点を持たない時は $\text{codim}_{\mathbb{P}^n} L_{G, \sigma} = \text{codim}_{\mathbb{P}^n} L_G$ だから, leading singularity を考えれば十分である。

定理 3. (次元公式)

$$\dim L_G = \min_{\tilde{G} = G_1 \sqcup \dots \sqcup G_k} (-k + \nu \cdot m(\tilde{G}))$$

或いは

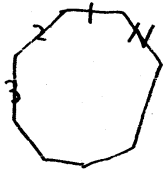
$$\text{codim } L_G = \nu \chi(G) + \max(k + \nu b_i(\tilde{G}))$$

ここに $\tilde{G} = G_1 \sqcup \dots \sqcup G_k$ は, G の内線を分割して生じる部分グラフを表わし, \min (resp. \max) は, 空でないあらゆる分割にわたる。

系. $\text{codim } L_G = \nu + 1 \iff \tilde{G} = G$ のときに \min (resp. \max) が attain される。

証明は次節にまわし, 簡単な例を述べる。

例 1. (1-loop graph)

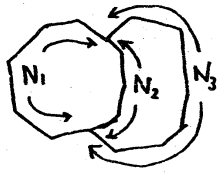


\max に寄与する分割は, 全体と, 内線を全部切離したものである。

$$\begin{aligned} \text{codim } L_G &= \nu \cdot 0 + \max(1 + \nu \cdot 1, N + \nu \cdot 0) \\ &= \max(\nu + 1, N) \end{aligned}$$

例 2. (2-loop graph)

||



N_i は内線数。 $k + \nu b(\tilde{G})$

全体 $\dots 1 + \nu \cdot 2$

N_1 N_2 N_3 $\dots N_1 + 1 + \nu \cdot 1$

N_1 N_2 N_3 $\dots N_1 + N_2 + N_3 + \nu \cdot 0$

$$\begin{aligned} \text{codim } L_G &= -\nu \cdot 1 + \max(2\nu + 1, \nu + N_i + 1, N_1 + N_2 + N_3) \\ &= \max(\nu + 1, N_1 + 1, N_2 + 1, N_3 + 1, N_1 + N_2 + N_3 - \nu) \end{aligned}$$

系のように、 $\tilde{G} = G$ のときに \min が attain されるグラフを, primary とよぶことにする。定理2, 定理3によって Λ_G^+ と $\Lambda_{\pi(G), \tau}$ が余次元1で交わるための必要十分条件は, contract される部分グラフ G_1 が primary であることと言える。次元公式の応用として, 次のことが証明される。

定理4.

G_1 を含む G の primary 部分グラフ中最大のものを G_0 とする。このとき

$$\text{codim } L_{\pi(G), \tau} - \text{codim } L_G = -1, 0, 1, 2, \dots$$

であって, 右辺 = -1 $\Leftrightarrow G_0/G_1$ が primary

右辺 = 0 $\Leftrightarrow G_0 = G_1$

証明は省略する。

以上によつて, 内頂点のない (G, σ) に対する Feynman 積分の holonomy diagram は完全に決定する。(1-loop の場合の図が柏原 [1] にある。)

§4. Proof of dimension formula.

定理3の証明を述べよう。

補題5.

$$\text{codim } L_G = N(G) + \nu_{\text{bo}}(G) - \text{rank}(d_1 \otimes \eta_1(x), \dots, d_N \otimes \eta_N(x))$$

ここに、 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n\nu}$ は generic な点とし、

また $d_\ell = \begin{bmatrix} [c_{1,\ell}] \\ \vdots \\ [c_{n,\ell}] \end{bmatrix}$ は、D-matrixのタテベクトル。

(証明)

以下では $\Lambda_G^{\mathbb{C}}$ のみ考えれば十分であるから、 \mathbb{C} は略記する。 Λ_G は holonomic だから

$$\begin{aligned} \text{codim } L_G &= \dim \bar{\pi}^{-1}(p) \\ &= \text{corank of } ((p, x) \mapsto p = \text{grad } H_G(x)) \\ &= \text{corank Hess } H_G(x) \end{aligned}$$

これは、 $y \in \mathbb{C}^{n\nu}$ についての二次型式 $Q(x, y) = \sum_{\substack{i,j \\ k,l}} \frac{\partial^2 H_G(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} y_i y_j y_k y_l$ の退化度に等しい。計算により

$$Q(x, y) = \sum_{\ell=1}^N \frac{m_\ell}{\sqrt{\eta_\ell(x)^3}} \left\{ \eta_\ell(x)^2 \cdot \eta_\ell(y)^2 - \langle \eta_\ell(x), \eta_\ell(y) \rangle^2 \right\}$$

この退化度を見る時には、Euclid計量をもつ $\mathbb{R}^{n\nu}$ のベクトルとみて考えればよい。その時 Q は準正定値で、

$$\begin{aligned} Q \text{ の退化度} &= \dim_{\mathbb{R}} \left\{ y \in \mathbb{R}^{n\nu} \mid \eta_\ell(x) \not\parallel \eta_\ell(y) \right\} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \left\{ y \in \mathbb{C}^{n\nu} \mid (C \otimes I_\nu) y = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_N \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \left. k_\ell = \beta_\ell \eta_\ell(x) \quad \exists \beta_\ell \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

$\text{rank } C \otimes I_\nu = \nu m(G) = \nu n(G) - \nu b_0(G)$ であり, また,
 $k_\ell = \eta_\ell(\gamma)$ の形に書けるためには $\sum_{\ell=1}^N d_\ell \otimes k_\ell = 0$ となる
 ことが必要かつ十分である。従って

$$\text{codim } L_G = \nu b_0(G) + \dim \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N \mid \sum_{\ell=1}^N d_\ell \otimes \beta_\ell \eta_\ell(\alpha) = 0 \right\}$$

を得る。

証明からわかるように, $\text{codim } L_G$ は, グラフ G を ν 次元空間に *general* に実現しておいて, それと長さは変えてよいが平行な内線をもつグラフを描き得る自由度を表わす。このうち $\nu b_0(G)$ は, 連結成分の平行移動を表わす自明な自由度であり, また $\text{codim } L_G = \nu + 1$ とは, 平行移動と相似拡大以外の自由度を持たないことを意味している。

さて, 余次元の計算は, $(d_1 \otimes \eta_1(\alpha), \dots, d_N \otimes \eta_N(\alpha))$ という行列の階数の計算に帰着した。このタテベクトルの間には, $\sum_{\ell=1}^N d_\ell \otimes \eta_\ell(\alpha) = 0$ という唯一の関係式があるので, 我々の問題は結局次の定理に帰着する。(佐藤-三輪-神保 [1])

定理 6

体 K 上有限次元のベクトル空間 V と, その部分空間 V_1, \dots, V_s が与えられたとする。このとき

$$\max_{\substack{\alpha_1 \in V_1, \dots, \alpha_s \in V_s \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_s = 0}} \dim (K\alpha_1 + \dots + K\alpha_s) = \min_{I_0 = I_1 \cup \dots \cup I_k} (s - k + \dim V_{I_0} \cap \dots \cap V_{I_0 + k})$$

右辺の \min は, 添字集合 $I_0 = \{1, \dots, s\}$ のあらゆる空で

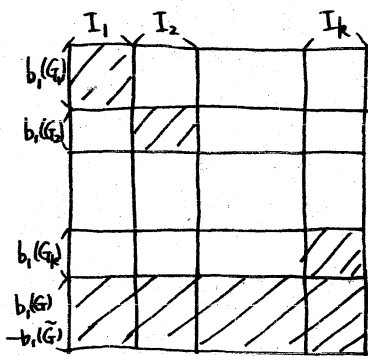
ない分割にわたる。また $I \subset I_0$ に対し、 $V_I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in I} V_i$ 。

(定理6 \Rightarrow 定理3の証明)

補題5と、定理6で $V_k = \{d_k \otimes y \mid y \in \mathbb{C}^\nu\} \subset V = \mathbb{C}^{n\nu}$
と書いたものを用いれば

$$\begin{aligned} \text{codim } L_G &= N(G) + \nu b_0(G) - \min(N(G) - k + \dim V_{I_0-I_1} \cap \dots \cap V_{I_0-I_k}) \\ &= \nu \lambda(G) + \max(k + \nu b_1(G) - \dim V_{I_0-I_1} \cap \dots \cap V_{I_0-I_k}) \end{aligned}$$

そこで、 $\dim V_{I_0-I_1} \cap \dots \cap V_{I_0-I_k} = \nu(b_1(G) - b_1(\tilde{G}))$ をいえば
よい。 V_k の形から、 $\nu=1$ として十分である。



circuit matrix の横ベクトルの一次結合を作、て、 I_0-I_1 になるべく0が並ぶようにすれば、このような行は $b_1(G)$ 本独立に作れる。以下 I_2, \dots, I_k についても同様にする。このとき、

例えば $V_{I_0-I_1}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}^{b_1(G)}$ なる形のベクトル全体となる。従、て

$$\dim V_{I_0-I_1} \cap \dots \cap V_{I_0-I_k} = b_1(G) - \sum_{i=1}^k b_1(G_i).$$

§5. Further Problems.

内頂点のないグラフについてはほぼわか、たが、内頂点を許した場合には問題は複雑である。

例えば、質量 m_2 のとり方によ、ては $\Lambda_{G,\sigma}$ が空になることもある。空でないような $\Lambda_{G,\sigma}$ が、つねに holonomic になるか否かも完全に確定したわけではない。更に、同一のグラフに対して二つ以上の異なる既約成分が生じることもある。それでは、既約成分を指定するにはグラフの他にどんな量を与えればよいのか。これらはいずれも今後の課題である。

References

- 佐藤[1] Recent development in hyperfunction theory and its application to Physics.
 (Proceedings of International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics.
 to appear in Lecture Notes in Physics, Springer)
- 柏原[1] Micro-local Calculus (ibid.)
- 佐藤-柏原-三輪[1] Microlocal study of infinite systems. (数理研講究録掲載予定)
- 佐藤-三輪-神保[1] Dimension formula for the Landau singularity.