数理解析研究所講究録
266巻 1976年 59-74

汎函数と変分方程式

東大 教養学部 青本和彦

以下の議論は細部にわたって厳密とは云い難い。

§1 [定義1.1] $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ から $\mathbb{R}$ への写像 F (汎函数) が与えられた時 任意の変量 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$(1.1)\quad F(\varphi+\psi) = F(\varphi) + \int_{\mathbb{R}^n} A(x;\varphi)\psi(x)\,dx + O(\|\psi\|_{m+1})$$

が満たされているものとする。ここに $A(x;\varphi)$ は x の高々 (m) 階超函数を表わし $\|\psi\|_{m+1}$ は

$$\|\psi\|^2_{m+1} = \sum_{p\le m+1}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{\alpha}\left|\frac{\partial^p \psi}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}\cdots\partial x_{\alpha_p}}\right|^2 dx$$

を意味する。我々はこの時 $A(x;\varphi)$ のことを F の φ における <u>偏変分の x 成分</u> と呼ぶ。

そして $A(x;\varphi) = \dfrac{\delta F(\varphi)}{\delta \varphi(x)}$ とおく。

$A(x;\varphi)$ は Fréchet 微分 従って又 Gâteaux 微分 に他ならない[5]。このような F を <u>1階変分可能</u> と呼ばれる[2]。さらに $A(x;\varphi)$ が x を固定した時 φ について 連続ならば F は

C^1-級と呼ばれる. 同様にして

$$\frac{\delta^2 F}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)},\quad \frac{\delta^3 F}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)\delta\varphi(x_3)},\quad \cdots$$

が考えられるが, 一般に m 階偏変分がすべて連続ならば C^m-級と呼ばれる. こうして有限次元の微~~分~~演算の法則がさしたる変更もなく成立する. 特に

[命題1,1] $$\frac{\delta^2 F}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)} = \frac{\delta^2 F}{\delta\varphi(x_2)\delta\varphi(x_1)}$$

が $F \in C^2$-級で成り立つ.

[命題1,2] (平均値定理) $F \in C^m$-級ならば

$$F(\varphi+\psi) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}dx\right)^k + \frac{1}{m!}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}dx\right)^m F(\varphi+\theta\psi)$$

を満たす $0<\theta<1$ が存在する.

[系] 特に $\dfrac{\delta F}{\delta\varphi(x)} = 0$ ならば F は φ に依らない.

[定義1,2] $F(\varphi)$ が

$$F(\varphi+\psi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\int_{R^n}\psi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}dx\right)^k F(\varphi)$$

と無限級数で表示される時 F は実解析的汎函数と呼ばれる．[命1, 2] から

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m!}\left\{\int_{R^n}\psi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}dx\right\}^m F(\varphi)=0$$

ならば F は実解析的である．特に次の m 次多項式

$$F(\varphi)=\sum_{k=0}^{m}\int_{R^{nk}}A_k(x_1,x_2\cdots x_k)\cdot$$

$$\cdot\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_k)\,dx_1\cdots dx_k$$

は実解析的である．

[注意] $C^\infty(R^n)$ の代わりに 任意のパラコンパクト多様体 M 上の C^∞-函数 $C^\infty(M)$ 上の汎函数でも事情は同じである．

[例 1] $$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)}=\delta(y-x)$$

[例 2] $$F(\varphi)=\int_{R^n}A(x)\varphi(x)^2dx$$

ならば

$$\frac{\delta F(\varphi)}{\delta\varphi(x)} = 2A(x)\varphi(x)$$

$$\frac{\delta^2 F(\varphi)}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = 2A(x)\delta(x-y)$$

一般に $C^0(\mathbb{R}^n)$ 上の汎函数 F が

$$\frac{\delta^2 F(\varphi)}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = 2A(x;\varphi)\delta(x-y) + K(x,y;\varphi)$$

と 書けて $K(x,y;\varphi)$ が x,y について 連続ならば $\int_{\mathbb{R}^n} A(x;\varphi)\,dx$ のことを <u>Lévy の ラプラシアン</u> と 云う. すなわち

$$\Delta F = \int_{\mathbb{R}^n} A(x;\varphi)\,dx$$

§2. 偏変分方程式（線型）

定義2.1 F, $\dfrac{\delta F}{\delta\varphi(x)}$, $\dfrac{\delta^2 F}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)}$, ...

の間に 次のような 等式

$$(2.1)\quad \sum_{\nu=0}^{m} \int_{\mathbb{R}^{n\nu}} \frac{\delta^\nu F(\varphi)}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)\cdots\delta\varphi(x_\nu)} \cdot A_\nu(x_1,\ldots,x_\nu;\varphi)\,dx_1\cdots dx_\nu$$

がみたされる時 $F(\varphi)$ は 線型の偏変分方程式 をみたすとゆう. ここで $A_\nu(x_1,\cdots,x_\nu;\varphi)$ は $x_1,\cdots,x_\nu$ に依存する φ の汎函数である.

[定義2,2] $F(\varphi)$ が与えられた時 適当な自然数 N があって $\nu \geqq N+1$ ならば

$$\frac{\delta^\nu F(\varphi)}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_\nu)} = \sum_{k=0}^{N} \int K(x_1,\cdots,x_\nu;y_1,\cdots,y_k;\varphi)\cdot \frac{\delta^k F(\varphi)}{\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\varphi(y_k)}\,dy_1\cdots dy_k \tag{2,2}$$

と書ける時 $F(\varphi)$ は 極大過剰決定系 をみたすとゆう. このような N の最小値を この方程式系の 階数 とゆう.

以下 これらの例を列挙する.

[例2,1] $F(\varphi)$ が φ に依らない場合.

$$\frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} = 0 \tag{2,3}$$

逆も成立する. 一般に

$$\frac{\delta^\nu F}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_\nu)} = 0 \tag{2,4}$$

を満たす方程式系の解は φ の $(\nu-1)$ 次多項式である.

［例2.2］ Hermite 多項式 ［7］

$$F(\varphi) = e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2}$$

$$\|\varphi\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)^2 dx$$

を考えると
(2,5) $$\frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} = F(\varphi)\cdot(-\varphi(x))$$

を満たす. $\dfrac{\delta^\nu F}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_\nu)}$ $(\nu \geq 2)$ はこの方程式

を繰り返し用いることにより

(2,6) $$\frac{\delta^\nu F}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_\nu)} = F(\varphi)\cdot H_\nu(x_1,\cdots,x_\nu\,;\varphi)$$

と書ける. ここに $H_\nu(x_1,\cdots,x_\nu\,;\varphi)$ は $x_1,\cdots,x_\nu$ の多項式で これを <u>ν次 エルミート多項式</u> と云う.

(2,7) $$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)\,dx$$

とおくと

(2,8) $$e^{-\frac{\|\psi\|^2}{2} - \langle\psi,\varphi\rangle} = \sum_{m=0}^{\infty} \int \frac{H_m(x_1,\cdots,x_m;\varphi)}{m!}\psi(x_1)\cdots\psi(x_m)\cdot dx_1\cdots dx_m$$

故に $e^{-\frac{\|\varphi\|^2}{2}}\langle\psi,\varphi\rangle$ は　エルミート多項式列 $\{H_m(x_1,\cdots,x_m;\varphi)\}$ の母汎函数である.

[例2.3] 1次元 Ising 模型 [8°]

$\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ として　その Fourier 変換を

$$\tilde{\varphi}(p)=\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\,px}\varphi(x)dx$$ とおく.

今　自然数 n によって決まる超函数列

$$\frac{1}{p_1+m+i0}\,\frac{1}{p_1+p_2+i0}\cdots\frac{1}{p_1+\cdots+p_{2n-1}+m+i0}\,\frac{1}{p_1+\cdots+p_{2n}+i0}$$

$(m>0$ 質量$)$　$n=1,2,3,\cdots$

に対して母汎函数 $F(\varphi)$ を

$$(2.9)\quad F(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{1}{p_1+m+i0}\,\frac{1}{p_1+p_2+i0}\cdots$$

$$\cdots\frac{1}{p_1+\cdots+p_{2n-1}+m+i0}\,\frac{1}{p_1+\cdots+p_{2n}+i0}\,\tilde{\varphi}(p_1)\cdots\tilde{\varphi}(p_{2n}).$$

$\cdot\, dp_1\cdots dp_{2n}$　によって定義すると

Heaviside 函数 $Y(x)$ を用いて

$$\Upsilon(x) = \int e^{-\sqrt{-1}\,p_1 x} \frac{1}{p_1 + i0}\, dp_1$$

$$\frac{i}{p_1 + i0} = \int \Upsilon(x) e^{ixp_1}\, dx$$

を用いて

$$(2,10) \quad F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{p_1+m+i0} \frac{1}{p_1+p_2+i0} \cdots$$

$$\cdots \frac{1}{p_1+\cdots+p_{2n-1}+m+i0} \frac{1}{p_1+\cdots+p_{2n}+i0} \cdot dp_1 \cdots dp_{2n}$$

$$\cdot e^{\sqrt{-1}(p_1x_1+\cdots+p_{2n}x_{2n})} \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{2n})\, dx_1 \cdots dx_{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2,\, x_2 \geq x_1} e^{im(x_2-x_1)} \varphi(x_1)\varphi(x_2)\, dx_1 dx_2 \right\}^n$$

$$= \frac{K(\varphi)}{1-K(\varphi)}$$

ここで $K(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2,\, x_2 \geq x_1} e^{im(x_2-x_1)} \varphi(x_1)\varphi(x_2)\, dx_1 dx_2$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{im(x_2-x_1)} \Upsilon(x_2-x_1)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\, dx_1 dx_2$$

でこれは2次の多項式である．だから $F(\varphi)$ が有理汎函数である．(2,10) より

(2,11) $$(1-K(\varphi))F(\varphi) = K(\varphi)$$

だから

(2,12) $$\frac{\delta^3\{(1-K(\varphi))F(\varphi)\}}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)\delta\varphi(x_3)} = 0$$

でこれは多項式を係数とする3階の極大決定系．

[例2,4] 流体模型 [8°]

$A(x,y) = e^{-\beta U(x,y)}$ を $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の函数として

$$A_\nu(x_1,\cdots,x_\nu) = \prod_{1\leq i<j\leq \nu} A(x_i,x_j)$$

とおく．$\xi_\nu(x_1,\cdots,x_\nu,t)$，$\tau_\nu(x_1,\cdots,x_\nu,t)$ を各々次のように定義する：

(2,13) $$\xi_\nu(x_1,\cdots,x_\nu,t) = A_\nu(x_1,\cdots,x_\nu) + \frac{t}{1!}\int A_{\nu+1}(x_1,\cdots,x_\nu,y_1)dy_1 + \frac{t^2}{2}\iint A_{\nu+2}(x_1,\cdots,x_\nu,y_1,y_2)dy_1dy_2 + \cdots$$

(2,14) $$\tau_\nu(x_1,\cdots,x_\nu,t) = \frac{\xi_\nu(x_1,\cdots,x_\nu,t)}{\xi_0(x_1,\cdots,x_\nu,t)}$$

今汎函数 $\mathcal{O}\!\mathcal{l}(\varphi)$，$F(\varphi)$ を

$$(2,15)\quad \mathfrak{A}(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n\nu}} A_\nu(x_1, \cdots, x_\nu, t)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_\nu)\, dx_1 \cdots dx_\nu$$

$$(2,16)\quad F(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n\nu}} \tau_\nu(x_1, \cdots, x_\nu, t)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_\nu)\, dx_1 \cdots dx_\nu$$

によって定義すれば

$$(2,17)\quad F(\varphi) = \frac{\mathfrak{A}(\varphi+t)}{\mathfrak{A}(t)}$$

が成立する．ここで $\mathfrak{A}(\varphi)$ の収束性については不明．さらに $\mathfrak{A}(\varphi)$ が φ について適当な極大系を満たすであろうか？ これは有限次元の ϑ-函数に類似していると思われる．

§3. 場の理論の変分的特徴づけについての考察，Tomonaga-Schwinger 方程式 [10]

M を 4次元 Minkowski 空間としその座標を $x = (x^0, \mathbf{x})$，$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ とする．

を満たす、ここに $H(x;\varphi)$ はエルミート作用素で

(3,1) $$H(x;\varphi)=H_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int H_n(x,x_1,\cdots,x_n)\cdot$$

$$\cdot\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\,dx_1\cdots dx_n\quad,$$

(3,2) $$H_0(x)=-\mathcal{L}_{int}(x)$$

さて $S(\varphi)$ の公理系と呼ばれるものは

1° ユニタリ性 $S(\varphi)S(\varphi)^{\dagger}=1$

2° 共変性 $S(L\varphi)=U_L S(\varphi) U_L^{\dagger}$

ここに L は Lorentz 変換.

3° 因果律 $\dfrac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\dfrac{\delta S(\varphi)}{\delta\varphi(y)}S(\varphi)^{\dagger}\right)=0$

ここに $x^0<y^0$ 又は $(x^0-y^0)^2-(x^1-y^1)^2-\cdots-(x^3-y^3)^2<0$ なる x,y にわたる、すなわち $x\lesssim y$.

4° $S(\varphi+\psi)=S(\varphi)S(\psi)$

ここに $\mathrm{supp}\,\varphi>\mathrm{supp}\,\psi$ すなわち $\forall x\in\mathrm{supp}\,\varphi$ $\forall y\in\mathrm{supp}\,\psi$ に対して $x^0>y^0$ をみたす.

$\mathcal{L}_0(x)$, $\mathcal{L}_{int}(x)$ を各々真空及び相互作用の Lagrangean とする．すると作用 A は

$$(3,3)\qquad A=\int_M \mathcal{L}_0(x)dx+\int_M \mathcal{L}_{int}(x)\varphi(x)dx$$

$\varphi\in C_0^\infty(M)$ によって与えられる．一方 Schrödinger 方程式はあるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 H_0, H_1 を用いて

$$(3,4)\qquad i\frac{d\Phi}{dt}=(H_0+H_1)\Phi$$

によって与えられるものとすれば $H_1(t,x)=e^{-\frac{H_0t}{i}}\cdot H_1\cdot e^{\frac{H_0t}{i}}$ とおくことにより

$$(3,5)\qquad H_1(t,x)=-\mathcal{L}_{int}(x)$$

が成立する．対応する S 行列は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ へのユニタリー作用素であって

$$(3,6)\qquad S(\varphi)=T\left(\exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{L}_{int}(x)\varphi(x)dx\right)\right)$$

（T は年代順積）で与えられる．

この時 $S(\varphi)$ は

$$(3,7)\qquad i\frac{\delta S(\varphi)}{\delta\varphi(x)}=H(x;\varphi)S(\varphi)$$ [1)]

3° は　$x \lesssim y$ の時

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(H(y;\varphi)\right)=0$$

とも云い換えられる．方程式 (3,7) は

$S(\varphi)$ の代わりにベクトル $\Phi(\varphi)$ についての方程式

$$(3,8)\qquad i\frac{\delta\Phi}{\delta\varphi(x)}=H(x;\varphi)\Phi$$

と同等であり　これが<u>積分可能</u>である

ための必要十分条件は

$$(3,9)\qquad i\frac{\delta H(x;\varphi)}{\delta\varphi(y)}-i\frac{\delta H(y;\varphi)}{\delta\varphi(x)}=\left[H(x;\varphi),H(y;\varphi)\right]$$ 2)

である[19] 故に　$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ の代わりに

次の公理系を考える：

$1'^\circ$　$H(x;\varphi)$ はエルミート的

$2'^\circ$　$H(x;\varphi)$ は共変

$3'^\circ$　因果律　$\dfrac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(H(y;\varphi)\right)=0$

が $x \lesssim y$ で成り立つ．

$4'^\circ$　$H(x;0)=-\mathcal{L}_{int}(x)$

すると

[命題3,1] $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ をみたす実解析的汎函数 $H(x;\varphi)$ が一意に存在する.
それは (3,1) の形に書ける.

[命題3,2] $H(x;\varphi)$ が $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ を満たす時 方程式 (3,6) 又は (3,7) は 各々 $S(\cdot,0)=1$, $\Phi(\cdot,0)$ を与えることによって一意に存在し それは 公理 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ を満たす.
φ について実解析的である.

証明は 有限次元の Frobenius の定理[6] を拡張すればよい.

方程式 (3,6) 又は (3,7) は 係数 $H(x;\varphi)$ の極大過剰決定系であり $S(\varphi)$ の性質を $H(x;\varphi)$ のそれから導き出すことが出来ると思われる. もっと具体的にわかるためには これは 物理の問題である.

§4 結論

無限次元解析は筆者の知るかぎりでは数学では Volterra, Hadamard, Gateaux, Levy[2] 等によって始まり 変分法と結びついて実り多い成果が得られている. 場の理論は 変分法

が持ち込まれ定式化が行われているが これが単なる形式ではなく 実体として とらえうることを筆者は期待したいところである。[3)]

文献

1° N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, Introduction to the theory of quantized fields, ~~57~~

2° P. Levy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle

3° V. Volterra -- Theory of functionals and of integral and integro-differential equations

4° N. Wiener, -- Differential space, quantum systems and prediction '66, M.I.T.

5° M.A. Zorn, Derivatives and Fréchet differentials, Bull. Amer. Math. Soc. Vol 52, '46

6° J. Dieudonnée, Foundation of modern analysis

7° T. Hida, Complex white noise and infinite dimensional unitary group, Nagoya Math. J. '71

8° 佐藤, 柏原 and 三輪 Microlocal study of

infinite systems, '74

9° J. Hadamard　Oeuvres completo II

註 1) は 微分幾何 では 積分可能な 接続 と呼ばれている

2) は 接続の 積分可能性の条件，

類似の例は [9°], [2°] にも見出される．

3) 物理学における Bose 粒子の第2量子化 は このような例である．対応 $q \to \varphi$，$p=\frac{d}{dq} \to \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}$ によって 自然に 無限次元の Lagrange 多様体 が 定義される．それが Fock 空間に 他ならぬ．