数理解析研究所講究録
267巻 1976年 7-26

線型微分方程式系の解の収束表現について

広大 理学部　　河野 實彦

不確定特異点の近傍においては、一般には発散する形式的巾級数解が求められるが、それが真の解の漸近表現となるという局所理論は１８８６年 *Poincaré* によって漸近展開の概念が導入されて以来の長い歴史の中で確立されてきた理論である。ところが、一方では確定特異点の場合のように、不確定特異点の近傍においても何らかの解の収束表現を得たいという古典的で素朴な願望は持ち続けられていたが、１９１２年 J. Horn [1] は、解を収束する階乗級数によって展開してみせた。J. Horn [2] [3] は単独線形微分方程式を考察し、不確定特異点における特性方程式が互に相異なる根を持つ場合には、解は階乗級数によって展開できることを示したのである。その後、特性方程式が多重根を持つ場合にも、ある時には同様の結果が成り立つことを W. J. Trjitzinsky（１９３５）[４] が示した。H. L. Turrittin（１９５５）[５]

は、線形微分方程式系に対して J. Horn − W. J. Trjitzinsky の結果を拡張することを試み、それには成功したが、彼の最初の信念とはうらはらに「どんな場合にも、解を階乗級数によって展開できる」ことを示せなかった。この完全なる解答を得られなかったことを、彼の師である R. E. Langer の退官に際する記念講演においても、また彼自身の退官講演「My Mathematical Expectations, Symposium on O. D. E. Lecture Notes in Math. 312 (1972) 1−22」においても悔んでいて、次のように述べている。

"From time to time I had been studying summation of convergent series, ---. From my own point of view this paper [5] was not a complete success, for I was not able in all cases to sum the divergent series and replace them by convergent series. Thus I still have the expectation that some one will get an inspiration that will finish the job."

H. L. Turrittin の論文 [5] を読むと、そこでは先駆者の解析がそのまま踏襲されてあって、その解析には少し合理性に欠けるところがあるように思われる。解析方法を簡単に

説明すると、

線形微分方程式系

$$(1)\quad \begin{cases} \tau \dfrac{dX}{d\tau} = \tau^{g} A(\tau) X \\ A(\tau)\ :\ \tau = \infty \text{ で正則} \end{cases}$$

を変換

$$(2)\quad X(\tau) = \sum_{l=0}^{g-1} \left\{ C_l \tau^{-l} + \tau^{-l} \overline{W}_l(\tau^{g}) \right\} \tau^{-h}$$

によって、関数 $\overline{W}_l(\eta)$ $(l = 0, 1, \cdots, g-1)$ に関する非斉次線形微分方程式系に分解したとき、関数 $\overline{W}_l(\eta)$ $(l = 0, 1, \cdots, g-1)$ が次の Nörlund の定理を満たす関数であるかどうかを調べる問題に帰着される訳である。

<u>定理（Nörlund, 1926）</u>　半平面 $\mathrm{Re}\,\eta \geqq K > 0$ において、

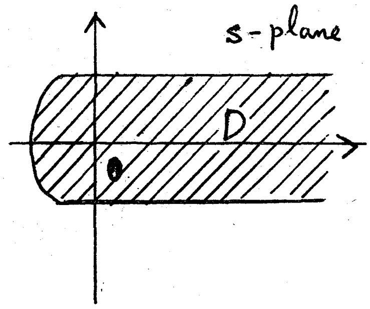
$$(3)\quad \begin{cases} \overline{W}(\eta) = \dfrac{w_0}{\eta} + \dfrac{\mu(\eta)}{\eta^2} \\ \mu(\eta) \text{ は正則で有界} \end{cases}$$

と表わされる関数は、そこで Laplace 積分表示可能で、

$$(4)\quad \overline{W}(\eta) = \int_0^{\infty} e^{-\eta s} w(s)\, ds$$

と表わされるが、このとき被積分関数 $W(s)$ が実軸 $s \geqq 0$ を含む半帯状領域 D において正則で、条件

$$(5) \qquad \lim_{\substack{s\to\infty \\ s\in D}} e^{-Ks}\, W(s) = 0$$



を満たすならば、関数 $\mathbb{W}(\eta)$ は絶対一様収束する階乗級数によって展開される。即ち、ある正の数 $\omega_0 \geqq 1$ があって、$\omega > \omega_0$ に対して、

$$(6) \qquad \mathbb{W}(\eta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{W_r}{\frac{\eta}{\omega}\left(\frac{\eta}{\omega}+1\right)\cdots\left(\frac{\eta}{\omega}+r\right)}$$

$$(\mathrm{Re}\,\eta > K)$$

Turrittin は個々の問題に対して分解すべき個数 q を（不確定特異点の rank に合せて）一つ一つ決めていって、その上で関数 $\mathbb{W}_l(\eta)$ $(l=0, 1, \cdots, q-1)$ の性質を解析しているがそのことの妥当性が明らかでない。そこでこの小論では、分解すべき個数 q は線形微分方程式系 (1) が持つ形式的巾級数解から必然的に決められるものであることを示し、そのこと

から、直ちに Turrittin の結果を含む小さな拡張定理が得られることを示そう。

線形微分方程式系(1)において、$\tau=\infty$は"Poincaré の rank g"の不確定特異点であるという。$g\leq 0$であれば$\tau=\infty$は勿論、確定特異点であるが、$g>0$であっても不確定特異点であるとは限らない。如何なる場合に確定特異点となるかは、Moser－Jurkat－Lutz－Gérard 等の研究があるが、それはまた別の問題であるので、ここでは$\tau=\infty$が本当に不確定特異点であるときのみを考える。

先ず、M. Hukuhara－H. L. Turrittin の定理を述べてそれを出発点とする。

<u>定理(M. Hukuhara－H. L. Turrittin)</u>

$$
(7)\quad \begin{cases} X = P(\tau)Y = \left(\sum_{k=0}^{N} P_k \tau^{-\frac{k}{p}}\right)Y \\ t = \tau^{\frac{1}{p}} \end{cases}
$$

なる適当な変換によって、線形微分方程式系(1)は、いわゆる標準型と呼ばれる次のような線形微分方程式系に変換される:

(8) $$t\frac{dY}{dt}=\Big[\delta_{ij}(p_i(t)I_i+J_i)+\sum_{m=1}^{\infty}B_{ij}(m)t^{-m}\Big]Y$$

$(i,j=1,2,\cdots,\nu)$

δ_{ij} Kronecker のデルタ

I_i は $n_i\times n_i$ − 単位行列

J_i は $n_i\times n_i$ − 行列で

$$J_i=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ \varepsilon_i^{(1)} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_i^{(n_i-1)} & 0\end{pmatrix}$$

$\varepsilon_i^{(k)}=0$ 又は 1

$(k=1,2,\cdots,n_i-1)$

(9) $\sum_{m=1}^{\infty}B_{ij}(m)t^{-m}$ は $n_i\times n_j$ − 行列で $|t|>t_0$ において収束する

$P_i(t)$ $(i=1,2,\cdots\nu)$ は h 次多項式

(10) $$P_i(t)=\alpha_i^{h}t^{h}+\alpha_i^{h-1}t^{h-1}+\cdots+\alpha_i^{0}$$

$(i=1,2,\cdots,\nu)$

で、$P_i(t)\neq P_j(t)$ $(i\neq j)$ である。即ち、$i\neq j$ ならば、どれかの k $(0\leqq k\leqq h)$ に対して $\alpha_i^{k}\neq\alpha_j^{k}$ であるが、特に $\alpha_i^{k}=\alpha_j^{k}$ $(1\leqq k\leqq h)$ ならば、$\alpha_i^{0}\neq\alpha_j^{0}$ (mod 1) である。

(上で、$\tau=\infty$, 即ち $t=\infty$ が不確定特異点であるという仮定から $h>0$ である。)

更に、標準型線形微分方程式系から直ちに次のような形式的巾級数解を求めることができる：

(11) $$Y(t) = [V_{ij}(t)][\delta_{ij}\exp(P_i(t)I_i + J_i \log t)]$$

$(i, j = 1, 2, \cdots, \nu)$

(12) $$P_i(t) = \frac{\alpha_i^{h}}{h}t^{h} + \frac{\alpha_i^{h-1}}{h-1}t^{h-1} + \cdots + \alpha_i^{1} t + \alpha_i^{0}\log t$$

$(i = 1, 2, \cdots, \nu)$

$n_i \times n_j$－行列 $V_{ij}(t)$ は形式的巾級数で

(13) $$\begin{cases} V_{jj}(t) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} V_{jj}(m)t^{-m} \\ V_{ij}(t) = t^{-h_{ij}-1}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} V_{ij}(m)t^{-m} \qquad (i \neq j) \end{cases}$$

なる形をしている。但し h_{ij} $(i \neq j)$ は

(14) $$\begin{aligned} \gamma_{ij}(t) &= p_i(t) - p_j(t) \\ &= \Gamma_{ij}(h_{ij})t^{h_{ij}} + \cdots + \Gamma_{ij}(0) \neq 0 \end{aligned}$$

$(i \neq j)$

において $\Gamma_{ij}(h_{ij}) = \alpha_i^{h_{ij}} - \alpha_j^{h_{ij}} \neq 0$ なる最も大きい整数である。特に $h_{ij} = 0$ のときは、$\Gamma_{ij}(0)$ は整数ではない。

さて、上の定理における形式的巾級数解の係数 $V_{ij}(m)$ の

m が充分大きいときの評価式を求めよう。

実際 (13) を (8) に代入してみれば、係数 $V_{ij}(m)$ は次の漸化式より求められる値であることがわかる:

$$
(15)\quad \begin{cases} V_{jj}(m)(-m-J_j)+J_jV_{jj}(m) \\ \qquad = \displaystyle\sum_{s=1}^{m} B_{ij}(s)V_{jj}(m-s)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu}\sum_{s=1}^{m-h_{kj}-1} B_{jk}(s)V_{kj}(m-h_{kj}-1-s) \\ V_{jj}(0)=I_j,\quad V_{jj}(p)=0 \qquad (p<0) \end{cases}
$$

$i\neq j$ で $h_{ij}\neq 0$ のとき

$$
(16)\quad \begin{cases} \Gamma_{ij}(h_{ij})V_{ij}(m+h_{ij}) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{h_{ij}-1}\Gamma_{ij}(k)V_{ij}(m+k) \\ \qquad + V_{ij}(m)(m+h_{ij}+1-\Gamma_{ij}(0)+J_j)-J_iV_{ij}(m) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{s=1}^{m} B_{ii}(s)V_{ij}(m-s) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{s=1}^{m+h_{ij}+1} B_{ij}(s)V_{jj}(m+h_{ij}+1-s) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{\mu}\sum_{s=1}^{m+h_{ij}-h_{kj}} B_{ik}(s)V_{kj}(m+h_{ij}-h_{kj}-s) \\ \qquad\qquad (m\geqq 0) \\ V_{ij}(0)=\dfrac{B_{ij}(1)}{\Gamma_{ij}(h_{ij})},\quad V_{ij}(p)=0 \quad (p<0) \end{cases}
$$

$i \neq j$ で $h_{ij}=0$ のとき

$$
(17)\quad
\left\{
\begin{aligned}
& V_{ij}(m)(-m-1+\Gamma_{ij}(0)-J_j)+J_i V_{ij}(m) \\
& \quad = \sum_{s=1}^{m} B_{ii}(s) V_{ij}(m-s) + \sum_{s=1}^{m+1} B_{ij}(s) V_{jj}(m+1-s) \\
& \quad + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{\mu} \sum_{s=1}^{m-h_{kj}} B_{ik}(s) V_{kj}(m-h_{kj}-s) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad (m \geqq 0) \\
& V_{ij}(0)(-1+\Gamma_{ij}(0)-J_j)+J_i V_{ij}(0)=B_{ij}(1) \\
& V_{ij}(p)=0 \quad (p<0)
\end{aligned}
\right.
$$

これらの漸化式より、mが充分大きいときの$V_{ij}(m)$の評価式を求めたい訳であるが、そのために例えば$n_j \times n_j$−行列$V_{jj}(m)$の各要素を$(n_j \cdot n_j)$−次元の縦ベクトル$v_{jj}(m)$に書きかえると漸化式(15)は、

$$
(18)\quad (-m-\mathcal{L}_{jj}(0))\, v_{jj}(m) = \sum_{s=1}^{m} \mathcal{L}_{jj}(s)\, v_{jj}(m-s) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{\nu} \sum_{s=1}^{m-h_k-1} \mathcal{L}_{jk}(s)\, v_{kj}(m-h_{kj}-1-s)
$$

と書き表わされる。$\mathcal{L}_{ij}(s)$ $(i,j=1,2,\cdots,\nu)$は$B_{ij}(s)$に対応する$(n_i^2)\times(n_i n_j)$−行列で、特に$\mathcal{L}_{ij}(0)$は

$$V_{ij}(m)J_j = J_i V_{ij}(m)$$

から得られる行列である。

さて、ηをt_0より大きい正の数とするとき、係数$\mathfrak{L}_{ij}(s)$は

(19) $$\|\mathfrak{L}_{ij}(s)\| \leqq M\eta^s \qquad (\eta > t_0)$$

と評価される。Cauchyの評価式である。$\|\quad\|$は今後、行列、ベクトルのconsistentなノルムを表わす。この評価式と不等式

(20) $$\begin{cases} (m - \|\mathfrak{L}_{ij}(0)\|)\|v_{jj}(m)\| \leqq \sum_{s=1}^{m} \|\mathfrak{L}_{jj}(s)\|\,\|v_{jj}(m-s)\| \\ \qquad\qquad + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{\nu} \sum_{s=1}^{m-h_k-1} \|\mathfrak{L}_{jk}(s)\|\,\|v_{kj}(m-h_k-1-s)\| \\ \|\mathfrak{L}_{jj}(0)\| = 2 \end{cases}$$

考慮すれば、充分大きいmに対しては常に

(21) $$\|v_{ij}(m)\| \leqq u_{ij}(m) \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, \nu)$$

となる$u_{ij}(m)$の満たす差分方程式

$$(22)\qquad u_{ij}(m) = \left(\frac{m-3+M}{m-2}\right)\eta\, u_{ij}(m-1) + \left(\frac{M\eta}{m-2}\right)\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu} u_{kj}(m+h_{kj}-2)$$

を得る。j を一つ固定して、係数 $v_{ij}(m)$ $(i=1,2,\cdots,\nu)$ について考えることにして、これからは二番目の添数 j を書かないことにする。上と同様の操作で、(16) より $h_i \neq 0$ のときは

$$(23)\qquad u_i(m) = e_i u_i(m-1) + c_i\left(\frac{m-3+M}{m-2}\right)\eta\, u_j(m-1)$$
$$+ \sum_{k=2}^{h_i-1} d_i(h_i+1-k)\, u_i(m-k)$$
$$+ \left(\frac{m+3}{|\Gamma_i(h_i)|} + d_i(1)\right) u_i(m-h_i)$$
$$+ \left(c_i - \frac{m+2+|\Gamma_i(0)|}{|(\Gamma_i(h_i)|}\right) u_i(m-h_i-1)$$
$$+ c_i\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{\nu} u_k(m-h_k-1) + c_i\left(\frac{M\eta}{m-2}\right)\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu} u_k(m-h_k-2)$$

$h_i = 0$ のときは、(17) より

$$(24)\qquad u_i(m) = \left(\frac{m-2-|\Gamma_i(0)|+M}{m-1-|\Gamma_i(0)|}\right)\eta\, u_i(m-1)$$

$$+\left(\frac{M\eta}{m-1-|P_i(0)|}\right)\left(\frac{m-3+M}{m-2}\right)\eta u_i(m-1)$$

$$+\left(\frac{M\eta}{m-1-|P_i(0)|}\right)\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{\nu} u_k(m-h_k-1)$$

$$+\left(\frac{M\eta}{m-1-|P_i(0)|}\right)\left(\frac{M\eta}{m-2}\right)\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu} u_k(m-h_k-2)$$

を得る。上で定数 e_i, $d_i(k)$, C_i は

$$e_i = \frac{|P_i(h_i-1)|+\eta|P_i(h_i)|}{|P_i(h_i)|}$$

$$d_i = \frac{|P_i(k-1)|+\eta|P_i(k)|}{|P_i(h_i)|} \qquad (1\leqq k\leqq h_i-1)$$

$$C_i = \frac{M\eta}{P(h_i)} \qquad (i\neq j,\quad i=1,2,\cdots,\nu)$$

である。

そこで

(25) $$G(m) = \begin{pmatrix} u_1(m) \\ u_2(m) \\ \vdots \\ u_\nu(m) \end{pmatrix}$$

とおけば、縦ベクトル $G(m)$ は高々 $(n+2)$ 階差分方程式

$$(26)\qquad G(m) = A_1(m)G(m-1) + A_2(m)G(m-2) + \cdots + A_{h+2}(m)G(m-h-2)$$

を満たしている。ここで、また

$$(27)\qquad \| A_k(m) \| = a_k(m) \qquad (k=1, 2, \cdots, \nu)$$

とおいて、線形差分方程式

$$(28)\qquad g(m) = a_1(m)g(m-1) + a_2(m)g(m-2) + \cdots + a_{h+2}(m)g(m-h-2)$$

を考えると、充分大きい m に対して

$$(29)\qquad \| G(m) \| \leqq g(m)$$

となる。このことから、線形差分方程式 (28) を通して、$g(m)$ の評価を求めればよいことがわかる。それに必要な情報は、係数 $a_k(m)$ $(k=1, 2, \cdots, h+2)$ の $m \to \infty$ のときの行動である。

いま、

$$(30)\qquad q = \min_{i \neq j}\{h_i \neq 0\},\quad \hat{h} = \max_{i \neq j}\{h_i \neq 0\}$$

とおくと、(22) (23) (24) より

$$(31)\qquad \begin{cases} \lim_{m\to\infty} a_k(m) = 定数 & (1 \leqq k \leqq q-1) \\ \lim_{m\to\infty} \dfrac{a_q(m)}{m} = 正の定数 & \\ \lim_{m\to\infty} \dfrac{a_k(m)}{m} = 定数 & (q+1 \leqq k \leqq \hat{h}) \\ \lim_{m\to\infty} \dfrac{a_{\hat{h}+1}(m)}{m} = 正の定数 & \\ \lim_{m\to\infty} m\, a_{\hat{h}+2}(m) = 正の定数 & \end{cases}$$

となることは、直ちにわかる。そこで <u>Perron の定理</u> [7][8] を適用すると、次の定理を得る。

<u>定理 1</u>　　各 j に対して、正の整数 q_j を

$$(32)\qquad q_j = \min_{i \neq j}\{h_{ij} \neq 0\}$$

と定義すると、

$$(33)\qquad \overline{\lim_{m\to\infty}} \left| \frac{V_{ij}(m)}{\Gamma(m+1)^{\frac{1}{q_j}}} \right| \leqq C_j \qquad (i=1,2,\cdots,\nu)$$

が成り立つ。 C_j はある適当な定数である。

上の定理の重要な点は、形式的巾級数の係数の評価を与えるのみならず、解の階乗級数展開式を得るために、線形微分方程式系 (8) をどのように分解すればよいかを教えてくれることである。実際

$$(34)\quad \begin{cases} \hat{V}_{jj}(t) = \displaystyle\sum_{l=0}^{q_j-1} \left\{ V_{jj}(l)t^{-l} + t^{-l} W_{jj}^{l}(t^{q_j}) \right\} \\ \hat{V}_{ij}(t) = t^{-h_{ij}-1} \left[\displaystyle\sum_{l=0}^{q_j-1} \left\{ V_{ij}(l)t^{-l} + t^{-l} W_{ij}^{l}(t^{q_j}) \right\} \right] \\ \qquad\qquad (i \neq j) \end{cases}$$

とおいて、 $W_{ij}^{l}(\xi)$ $(i,j=1,2,\cdots,\nu)$ の満たす非斉次線形微分方程式系に分解すれば、解として Laplace 積分

$$(35)\qquad W_{ij}^{l}(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi s} w_{ij}^{l}(s)\,ds$$

$$(i,j=1,2,\cdots,\nu : l=0,1,\cdots,q_j-1)$$

によって表わされるものが存在するかどうか調べてみると、

関数 $w_{ij}^{l}(s)$ は、ある非斉次線形 Volterra 型積分方程式系を満たす関数でなければならないことがわかる。そこで、その Volterra 型積分方程式の解として、Nörlund の定理でいう帯状領域で正則で、性質(5)を満たすような解が存在するかということが問題となるが、$\xi=0$ の近傍において正則な解の存在は直ちにわかる。

$$(36) \qquad w_{ij}^{l}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_{ij}(mq_j+l)}{\Gamma(m)} s^{m-1}$$

$$(i,j=1,2,\cdots,\nu : l=0,1,\cdots,q_j-1).$$

とおくと、

$$(37) \qquad \overline{\lim_{m\to\infty}} \left| \frac{V_{ij}(mq_j+l)}{\Gamma(m)} \right|^{\frac{1}{m}} \leq \overline{\lim_{m\to\infty}} \left| \frac{V_{ij}(mq_j+l)}{\Gamma(mq_j+l+1)^{\frac{1}{q_j}}} \right|^{\left(\frac{1}{mq_j+l}\right)\left(\frac{mq_j+l}{m}\right)}$$

$$\times \overline{\lim_{m\to\infty}} \left| \frac{\Gamma(mq_j+l+1)^{\frac{1}{q_j}}}{\Gamma(m)} \right|^{\frac{1}{m}}$$

$$\leq C_j^{q_j} q_j$$

より，$|s| < C^{-q_j} q_j^{-1}$ において、巾級数(36)は絶対かつ広義一様収束することがわかる。

また、

(39) $$\int_0^\infty e^{-\xi s}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_{ij}(mq_j+l)}{\Gamma(m)} s^{m-1}\right) ds = \sum_{m=1}^{\infty} v_{ij}(mq+l)\,\xi^{-m}$$

となることから、関数(36)が Volterra 型積分方程式の解であることは、分解式(34)と形式的巾級数(13)を考慮すれば容易にわかる。そこで、解 $w_{ij}^{l}(s)$ を原点の近傍 $|s| < c^{-q_j} q_j^{-1}$ から $s=\infty$ へと解析接続していったときに、それが性質(5)を満たすことを示せばよい。この証明が実は困難なのであるが、J. Horn の証明方法を適用すれば、次の結果が得られる。

<u>定理2</u>　$h_{ij} = q$ ($q \leqq h$) かまたは $h_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, \cdots, \nu$) のとき、解は収束する階乗級数によって展開できる。

H. L. Turrittin [5] では $h_{ij} = h$ ($i, j = 1, 2, \cdots, \nu$) となる時と、$h=1$ の場合にはいつも解は収束する階乗級数によって展開できると述べているが、$h=1$ のときは、当然定理2の場合しか起り得ない。

References

[1] J. Horn, Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann., 71 (1912), 510 – 532

[2] J. Horn, Integration Linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen, Jahresber. Deutschen Math. Ver., 24 (1915), 309 – 329, 25 (1916), 74 – 83

[3] J. Horn, Laplacesche Integrale, Binomialkoefficientenreihen und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Z., 21 (1924) 85 – 95

[4] W. J. Trjitzinsky, Laplace integrals and factorial series in the theory of linear differential and linear difference

equations, Trans. Amer. Math. Soc., 37 (1935), 80-146

[5] H. L. Turrittin, Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point, Acta Math., 93 (1955), 27-66

[6] H. L. Turrittin, Solvable related equations pertaining to turning point problems, Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications, edited by C. H. Wilcox, Wiley, New York 27-52

[7] O. Perron, Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzengleichungen im Unendlichen, Jahresber. Deutschen Math. Ver., 19 (1910), 129-137

[8] O. Perron, Über lineare Differenzen-

gleichungen, Acta Math., 34 (1910), 109–137

[9] N. E. Nörlund, Leçons sur les Séries d'Interpolation, Gauthiers-Villars, Paris, 1926

[10] W. Wasow, Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Pub., 1965, Chapter 11.