

Singular bordism theory からみた
(コ)ホモロジー論について。

神戸大学 (教養)
高橋 典大

Ordinary homology theory は chain complex の理論を媒介にして構成されており, その chain complex は singular complex の理論をへて構成されるのが普通である。一方, 多様体の境界の関係に基づく (co) bordism theories は ordinary homology theories には属さないが, その拡張である generalized homology theories の一部として位置づけられている。感覚的には, 両者は共に同じ bordism theories の範疇に包括され, 後者は前者の拡張であると理解されていると思うが, 今までのところ, その関係も系統的にはっきりさせる作業は何故かあまりされていない。

先づ, ここでは, R. E. Stong [4] の cobordism category の定義をやや拡大し, chain complex の概念の categorical な見地からの一つの generalization と

しして $\langle \text{bordism category} \rangle$ なる概念を定義する。
 そうすれば、従来の chain complex は その中で特に
 discrete な bordism category として位置づけられる。
 しかし、同じ bordism category の中でも、この (特異複
 体論としての) discrete bordism category を基に展開
 される従来の ordinary homology theory と P. E. Conner
 and E. E. Floyd [1] の中で展開されている同境界理論
 による generalized homology theory の間には、
 theory としての一貫性がかかっている。

それで、ここでは、後者を更に一般化しく singular
 bordism theory なる概念 ([4] の定義とは少し異
 なってくる) を定義し、その観点から ordinary homology
 theory の再構成を試みた。主に、典型的なモデルとして
 ordinary \mathbb{Z}_2 -homology theory を考える。

homogeneous な finite simplicial complexes (これ
 らはいわゆる mod 2 の境界をもつ) と、それらの間の境界
 を境界にうつす様な pl -imbeddings からなる category
 1 を考えると、これは bordism category で、これ
 から singular bordism theory, 更に ordinary
 \mathbb{Z}_2 -homology theory が導かれることを示す。

次に、chain complex の dual として cochain

complex が考えられた様に, 吾々の bordism category, singular bordism theory の dual な概念が定義され, generalized cohomology theory が論ぜられることが望ましいが, 今のところまだ満足のいく様な定式化はされていない。しかし, その一つの予掛かりとして, C.P. Rourke and B.J. Sanderson [2] による mock bundle theory の simplicial な類似を考へ, 吾々の category \mathcal{C} に基づいた形で, とにかく ordinary \mathbb{Z}_2 -cohomology theory を与えることが可能なことを示す。

最後に, \mathbb{Z}_2 -係数の ordinary (co) homology theory についての吾々の構成は, 従来の構成にくらべ, 代数的には〈一步後退〉になっているが, その反面, より〈幾何的〉且, generalized homology theories とにらんだ上で, より〈普遍的〉な側面をもつておることを注意しておく。

以下, できるだけ簡単に, その概要と述べる。

§1. Bordism categories and singular bordism theories.

(1.1) $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}, +, \Phi \rangle$ が category with sum とは, category \mathcal{C} と, bifunctor $+: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$,

及び \rightarrow の object Φ と次の natural isomorphisms からなるものである。

$$1) A + B \simeq B + A$$

$$2) (A + B) + C \simeq A + (B + C)$$

$$3) \Phi + A \simeq A.$$

ここで, \simeq は category \mathcal{C} での equivalence を示し, A, B, C は \mathcal{C} の任意の object を表わす。

(1.2) $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}, \partial, +, \Phi \rangle$ が bordism category とは, $\langle \mathcal{C}, +, \Phi \rangle$ が category with sum であり, $\partial: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が functor であり, 次の natural isomorphisms が成立つものである。

$$1) \partial \circ \partial A \simeq \Phi,$$

$$2) \partial(A + B) \simeq \partial A + \partial B,$$

$$3) \partial \Phi \simeq \Phi.$$

(1.3). $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}, \partial, +, \Phi \rangle$ を bordism category とする。

A と B が bordant: $A \equiv B$ とは,

$$\exists U, V \mid A + \partial U \simeq B + \partial V$$

なることをとする。このとき, \equiv は \mathcal{C} の objects についての equivalence relation となるのが容易にわかる。

$\partial A \simeq \Phi$ なる $A \in \mathcal{C}$ の closed object と呼ぶことに

にするとき,

$$\Omega(\mathcal{C}) = \{ \text{closed objects of } \mathcal{C} \} / \equiv$$

が well-defined で, これを \mathcal{C} の bordism semi-group といふ。実際 $\Omega(\mathcal{C})$ は unit をもつ可換な semi-group となる。

(1.4) 各 integer $n \in \mathbb{Z}$ に対する, category with sum $\mathcal{C}_n = \langle \mathcal{C}_n, +_n, \Phi_n \rangle$ の sequence

$$\mathcal{C} = \{ \mathcal{C}_n \}_{n \in \mathbb{Z}}$$

を考へることにより, graded bordism category を考へることが出来る。 \mathcal{C}_n の objects を \mathcal{C} の n -objects, \mathcal{C}_n の morphisms を \mathcal{C} の n -morphisms といふ。

そして, (1.3) と同様にして, bordism semi-group

$$\Omega(\mathcal{C}) = \{ \Omega_n(\mathcal{C}) \}_{n \in \mathbb{Z}}$$

が定義される。

(1.5) category \mathcal{C} が discrete とは, 各 morphism が identity であるものである。

この定義から, 任意のアーベル群 $\langle C, +, 0 \rangle$ は discrete な category with sum であり, 任意の (graded) chain complex $\langle C, \partial, +, 0 \rangle$ は discrete な (graded) bordism category と考へられる。そして, 吾々の定義から容易に次をえる。

(5)

[定理 1] 任意の (graded) chain complex は discrete な (graded) bordism category で、その bordism groups は homology groups と一致する。

(1.6) category with sum $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}, +, \Phi \rangle$ が regular であるとは、 $+$ が finite sums で、 Φ が initial object からなるものである。

そして、bordism category $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}, \partial, +, \Phi \rangle$ が regular とは category with sum $\langle \mathcal{C}, +, \Phi \rangle$ が regular なこととする。

従来 chain complex $\langle C, \partial, +, 0 \rangle$ は regular でない、従って次の (1.7) の singular bordism theory の範疇からも除外される。

\mathcal{X} で topological spaces と continuous maps からなる category を書ゆし、 $+$ で \mathcal{X} における disjoint union で定義される finite sum、 Φ で \mathcal{X} の empty set で与えられる initial object を表ゆすと $\mathcal{X} = \langle \mathcal{X}, +, \Phi \rangle$ は regular category with sum である。

(1.7). \mathcal{X} 上の singular bordism theory

$$\langle \mathcal{C}, F, \iota \rangle$$

は、次の 3 つ からなる。

(6)

1) $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}, \partial, +, \Phi \rangle$ は regular な bordism category.

2) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X}$ は functor

i) $F(A+B) = F(A) + F(B)$

ii) $F(\Phi) = \phi$.

3) $\iota: F \circ \partial \rightarrow F$ は natural transformation.

(1.8) $\langle \mathcal{C}, F, \iota \rangle$ を \mathcal{X} 上の singular bordism

theory とする。 \mathcal{X} の任意の object X に対し,

\mathcal{C}/X により, objects が \mathcal{C} の object A と, \mathcal{X} の morphism $f: F(A) \rightarrow X$ の pairs (A, f) からなり, morphisms が \mathcal{C} の morphisms $\varphi: A \rightarrow B$ であり,

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(B) \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & X \end{array}$$

が commute する対象をもつからなる category を表わす。

更に, $(A, f) \tilde{+} (B, g) = (A+B, f+g)$

$$\tilde{\Phi} = (\Phi, \phi)$$

$$\tilde{\partial}(A, f) = (\partial A, f \circ \iota_A)$$

$$\tilde{F}(A, f) = F(A)$$

と定義する。ここで, $f+g$ は finite sums の性質から, well-defined であり, $\phi: \Phi \rightarrow X$ は ϕ が

(7)

initial object なることより unique に定まる。
このとき,

$$\mathcal{C}/X = \langle \mathcal{C}/X, \tilde{\partial}, \tilde{F}, \tilde{\Phi} \rangle$$

は又 regular bordism category となる。

更に, $\tilde{\iota}: \tilde{F} \circ \tilde{\partial} \rightarrow \tilde{F}$ を \mathcal{C}/X の任意の object (A, f) に対し, $\tilde{\iota}_{(A, f)} = \iota_A: F(\partial A) \rightarrow F(A)$ で定義すれば, 次をえる。

[定理 2] $\langle \mathcal{C}, F, \iota \rangle$ が \mathcal{X} 上の singular bordism theory のとき, \mathcal{X} の任意の object X に対し, $\langle \mathcal{C}/X, \tilde{F}, \tilde{\iota} \rangle$ はまた \mathcal{X} 上の singular bordism theory である。

§2. The ordinary Z_2 -homology theory.

(2.1) K をある Euclid 空間の中の有限な n 次元 simplicial complex で, homogeneous なものとする。かかる complex を簡単のため, n 次元 Z_2 -complex と呼ぶことにする。空集合 \emptyset は任意次元の Z_2 -complex と考へ, これを empty complex ということにする。

n 次元 Z_2 -complex K の丁度奇数々の n 次元 simplex の辺になっている採な $(n-1)$ 次元の simplex 及び, その辺からなる K の部分複体はまた

$(n-1)$ 次元の Z_2 -complex である。これを ∂K で表わし、 K の境界という。

\mathcal{K} は n -objects が n 次元 Z_2 -complexes で、 n -morphisms がそれらの間の境界と境界にうつす pl -embeddings からなる graded category とする。

$\partial: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ は $\partial \circ \partial K \simeq \emptyset$ をみたす functor で、 $+$ は \mathcal{K} における disjoint union, \emptyset は \mathcal{K} の empty complex とするとき、

$$\langle \mathcal{K}, \partial, +, \emptyset \rangle$$

は regular な graded bordism category となる。

更に、 $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{X}$ は forgetful functor とし、

$\iota: F \circ \partial \rightarrow F$ は 各 Z_2 -complex K に対し、 \mathcal{X} の inclusion $\iota_K: F(\partial K) \rightarrow F(K)$ で定義すれば

$$\langle \mathcal{K}, F, \iota \rangle$$

は \mathcal{X} 上の singular bordism theory となる。

この場合、closed な K に対しては、 $K+K \simeq \partial(K \times I)$

なことから、 $K+K \equiv \emptyset$ となり $\Omega_n(\mathcal{K})$ は group

となる。また、 \mathcal{K} の closed n -objects の間の

relations として、 K, L に対し、ある Γ, V があって

$K + \partial \Gamma \simeq L + \partial V$ となることと、ある W があって、

$K + L \simeq \partial W$ なることは同値であることを注意しておく。

(2.2) \mathcal{X}^2 は topological spaces の pairs を, それらの間の continuous maps からなる category を表わす。今の場合, 特に, 各 Z_2 -complex K に対しては, $i_K: F(\partial K) \rightarrow F(K)$ が \mathcal{X} の inclusion であるから, $F(\partial K)$ は $F(K)$ の subspace と考えられることに注意すれば, 次の定義が可能となる。

任意の pair (X, A) に対し, K は Z_2 -complex とし, f は continuous map $f: F(K) \rightarrow X$ で, $F(\partial K)$ を A にうつすものとするとき, pair (K, f) を (X, A) の singular Z_2 -complex と呼ぶことにする。

2つの singular Z_2 -complexes $(K, f), (L, g)$ に対し, \mathcal{X}/X のある object (W, h) があって,

- 1) $F(K+L) \subset F(\partial W)$
- 2) $h|_{F(K+L)} = f+g$
- 3) $h(F(\partial W) \setminus F(K+L)) \subset A$

をみたすとき, (K, f) と (L, g) は bordant であるといい, $(K, f) \sim (L, g)$ を表わす。

このとき, \sim は pair (X, A) の singular Z_2 -complexes の間の equivalence relation となる。

$$\mathcal{D}_n(X, A) = \{ (X, A) \text{ の } n\text{-次元 singular } Z_2\text{-complexes} \} / \sim$$

と定義し, これを pair (X, A) の n 次元 bordism group と呼ぶ。P.E. Cramer and E.E. Floyd [1] の証明を類似的に進めることにより, 次の命題となる。

[命題 1] $\{1\mathcal{Q}_n(,), \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は \mathcal{X}^* 上の generalized homology theory である。

更に, 容易に check されるように,

$$1\mathcal{Q}_n(\text{pt}, \Phi) \approx \Omega_n(\mathbb{Z}) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

なることより, 次の定理にまとめられる。

[定理 4] $\{1\mathcal{Q}_n(,), \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は \mathcal{X}^* 上の ordinary \mathbb{Z}_2 -homology theory を与える。

これは, 以前に報告したことがあるのでここにはあまり深入りしないことにする。ただ, Eilenberg-Steenrod の諸公理を丹念に check して行けば良い。([3] を参照)

(2.3) Remark 1) \mathbb{Z}_2 -complexes の中でも, $\langle \text{orientation} \rangle$ の概念をもちこむことが可能である。そのとき, \rightarrow の $\langle \text{orientable } \mathbb{Z}_2\text{-complex} \rangle$ に対して, 一般に 2 つ以上の orientations が存在する標になるが, unoriented な場合である $1\mathcal{Q}$ の場合と平行に話を進めるのに障害はない筈である。

Remark 2) \mathcal{X} 上の 2 つの singular bordism

theories が与えられたとき, それらの categorical な product を考え, bordism semi-groups が両者の direct sum になる標 \mathcal{X} 上の (product) singular bordism theory が存在する。

Remark 3) \mathcal{D}_0 を n -objects が, compact な n 次元有向微分多標体とし, n -morphisms が orientation preserving な, 且つ 境界を境界にうつす differential imbeddings である graded category とする。+で, disjoint union, \emptyset で empty manifold を表わす。 $F: \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{X}$ を forgetful functor とすると, natural transformation $\iota: F \circ \partial \rightarrow F$ が存在し, $\langle \mathcal{D}_0, F, \iota \rangle$ が \mathcal{X} 上の singular bordism theory になり, 良く知られた \mathcal{X}^2 上の generalized homology theory を与える。 unoriented の場合も同様である。

R.E. Stong [4] の定式化では, unoriented の場合はとしかく, category \mathcal{D}_0 の場合は都合が悪い。その為, 吾々の場合は, n -morphisms と natural transformation ι の規定の仕方が, それと異なることを注意しておく。

ただ, 一般論として, bordism category \mathcal{B} を考える

場合, *small category* の条件を考慮すべきにあるかも知れないが, ここでは意識的に無視して話を進めた。

§ 3. Ordinary Z_2 -cohomology theory.

(3.1) K はある Euclid 空間の p -balls の finite collection とし, $|K| = \bigcup \{ \sigma \mid \sigma \in K \}$ とかく。

K が ball complex とは,

- 1) $|K|$ は $\sigma \in K$ の interiors $\overset{\circ}{\sigma}$ の disjoint union,
- 2) $\sigma \in K \Rightarrow$ boundary $\overset{\circ}{\sigma}$ は K の balls の union.

これから, 次の通り。

- 3) $\sigma, \tau \in K \Rightarrow \sigma \cap \tau$ は K の balls の union.

(3.2). ball complex K が n -次元 Z_2 -ball complex

とは, K が有限个の n -balls 及び, その面よりなること

である。 n -次元 Z_2 -ball complex K に対し, 境界 ∂K

を K の丁度奇数个の n -balls の面になつていふところの

$(n-1)$ -次元 balls 及びその面からなつていふ K の sub-

complex とする。

(3.3). simplicial q -mock bundle ξ^q/K は

triple $(\xi(K), K, P_\xi)$ である。ここに,

- 1) $\xi(K)$ は simplicial complex,
- 2) K は ball complex,

3) $p_{\xi}: |\xi(K)| \rightarrow |K|$ は pl-map で,
 $\forall K$ -ball $\sigma \in K$ に対し, 次の如き $(q+K)$ 次元 Z_2 -
 complex $\xi(\sigma)$ が存在するものである。

i) $\xi(\sigma)$ は $\xi(K)$ の subcomplex,

ii) $|\xi(\sigma)| = p_{\xi}^{-1}(|\sigma|)$,

iii) $\partial \xi(\sigma) = \xi(\partial \sigma)$, 且し, $\xi(\partial \sigma) = \bigcup_{\tau \in \partial \sigma} \xi(\tau)$.

empty set \emptyset は任意次元の Z_2 -complex であるから,
 K の各 ball に \emptyset が対応させたものは simplicial mock
 bundle である。これを empty bundle といい, \emptyset/K
 で表わす。

(3.4). [定理5] K を n 次元 Z_2 -ball complex,
 ξ^q/K を simplicial q -mock bundle とするとき,

1) $\xi(K)$ は $(n+q)$ 次元 Z_2 -complex で,

2) $\partial \xi(K) = \xi(\partial K)$

が成立つ。

1) は, ほとんど自明, 2) は Z_2 -complex と, simplicial
 mock bundle の定義から, 逐次 check して行けば
 真かれる。

(3.5) simplicial mock bundles $\xi/K, \eta/K$ が
isomorphic: $\xi \cong \eta$ とは, pl-homeomorphism
 $h: \xi(K) \rightarrow \eta(K)$ で,

$$h(\xi(\sigma)) = \eta(\sigma) \quad \text{for } \forall \sigma \in K$$

なるものが存在することである。

[命題 2] \cong は simplicial mock bundles の間の equivalence relation である。

これは、推移律の証明にのみ注意を要する。

(3.6) $Z^g(K)$ は K 上の simplicial g -mock bundles の isomorphism classes の set で, empty bundle を base point としてもよいとする。

$$Z^g(K, L) = \text{Ker}(Z^g(K) \rightarrow Z^g(L))$$

即ち, L 上の empty な bundles の isomorphism classes の set とする

(3.7) simplicial mock bundles $\xi_0/K, \xi_1/K$ が cobordant: $\xi_0 \sim \xi_1$ とは, $L \times I$ 上の empty な simplicial mock bundle $\eta/K \times I$ で,

$$\eta|_{K \times \{i\}} \cong \xi_i, \quad i=0, 1.$$

なるものが存在することである。

[命題 3] \sim は $Z^g(K, L)$ 上の equivalence relation である。

証明は長くなるので省略するが, [2] における証明と比較して, 本質的の障害はない。対象としては, この場合の方がより elementary なのを "simplicial" の特性を full に

活用すればよい。

(3.8) $Z^g(K, L)$ を L 上で empty な simplicial g -mock bundles の \sim による cobordism classes の set を表わす。

(3.9) B_i の objects が ball complexes の pairs (K, L) , morphisms が inclusions と isomorphisms で generate される category \mathcal{B}_i , \bar{B}_i を (K, ϕ) からなる B_i の subcategory を表わす。 S_* は base point をもつ sets の category とする。このとき,

$$Z^g(\) : \bar{B}_i \rightarrow S_*$$

$$Z^g(\ ,) : B_i \rightarrow S_*$$

は contravariant functors である。

以上から, "simplicial" の特性をもとに, 次の命題を逐次 check できる。

[命題 4] 各 $g \in \mathbb{Z}$ に対し, Z^g は次の Axioms を満たす。

Axiom E. (extension). $e: (K_0, L_0) \rightarrow (K, L)$ が expansion なら, $Z^g(e): Z^g(K, L) \rightarrow Z^g(K_0, L_0)$ は surjective.

Axiom G (glue). $(K, L) = (K_1, L_1) \cup (K_2, L_2)$ とし, $\xi_1/K_1, \xi_2/K_2$ がそれぞれ $Z^g(K_1, L_1), Z^g(K_2, L_2)$ に

属し, $\xi_1|_{K_1 \cap K_2} \cong \xi_2|_{K_1 \cap K_2} \in Z^q(K_1 \cap K_2, (L_1 \cup L_2) \cap (K_1 \cap K_2))$
 のとき, $\exists \xi/K_1 \cup K_2 \in Z^q(K, L) \mid \xi|_{K_i} \cong \xi_i/K, i=1,2.$

Axiom S (suspension) natural isomorphisms

$$\Delta^q: Z^q(K, L) \rightarrow Z^{q-1}(K \times I, K \times \dot{I} \cup L \times I)$$

が存在する。

Δ^q は ξ^q/K の $\xi(K)$ と $K \times I$ の half-way level における map である。

Axiom S を用いて,

$$\partial^q: T^q(L) \rightarrow T^{q-1}(K, L)$$

を次の composition で定義する。

$$\begin{array}{ccc}
 T^q(L) \xrightarrow{\Delta^q} T^{q-1}(L \times I, L \times \dot{I}) & \xleftarrow{T(i)} & T^{q-1}(W, K \cup L \times \{0\}) \\
 & & \downarrow T(j) \\
 & \searrow \partial^q & T^{q-1}(K, L)
 \end{array}$$

ここに, $W = K \cup_{L \times \{1\}} L \times I$, i は excision \tilde{c} , $T(i)$ は isomorphism, j は identification $L \rightarrow L \times \{0\}$ の拡張で, map $K \rightarrow W$ として inclusion に homotopic.

これらの Axioms から, T^q についての excision, half-exact sequence が成り立つことがわかる。以上の準備は [2] における次の定理を用いるためのものである。

(3.10) [定理: Rouke-Sanderson の定理]

一般に, contravariant functor $Z^q: \overline{B}_i \rightarrow S_*$, $q \in \mathbb{Z}$, の sequence が Axioms E, G, S をみたすとき, これは compact polyhedra pairs の category 上の generalized cohomology theory と定義する。

(3.11) [命題 5] $q \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$T^q(\text{pt.}) \approx \begin{cases} Z_2 & q = 0 \\ 0 & q \neq 0. \end{cases}$$

これは, $\Sigma^q/\text{pt.}$ が q 次元 Z_2 -complex $\Sigma^q(\text{pt.})$ と identify され, この場合 bordism と cobordism が一致することからわかる。

以上の諸命題, 及び Rourke-Sanderson の定理 (3.10) から, 吾々は, 次の定理をえる。

[定理 5] $\{T^q(,), \partial^q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ は compact polyhedra pairs の category 上の ordinary Z_2 -cohomology theory である。

Remark $T^{-q}(X, A) \approx H^q(X, A; Z_2)$, $q \in \mathbb{Z}$, と dimension の符号が逆になっていることを注意しておく。

(3.12) 以上で, Z_2 -homology の基になつたところの bordism category \mathcal{B} と関係がつけ, ともに, ordinary Z_2 -cohomology theory を構成したか,

homology に対し, cohomology の方は categorical な見地からみると同じ level の定式化とは乏しい。

しかし cohomology が, ある bordism category から, basic なある bordism category \wedge の contra-variant functors と密接にかかわっていることだけははっきりしていると思ふ。(1976, 3/18).

References.

- [1]. Conner, P.E., Floyd, E.E.: Differentiable periodic maps. Springer (1964).
- [2] Rourke, C.P., Sanderson B.J.: a geometric approach to homology theory, Warwick university. (1972)
- [3]. M. Takahashi: The ordinary \mathbb{Z}_2 -homology theory and singular bordism theories (未発表).
- [4] Stong, R.E.: Notes on cobordism theory. Princeton University Press (1968)
- [5] MacLane, S.: Categories for the Working Mathematician, Springer (1971).