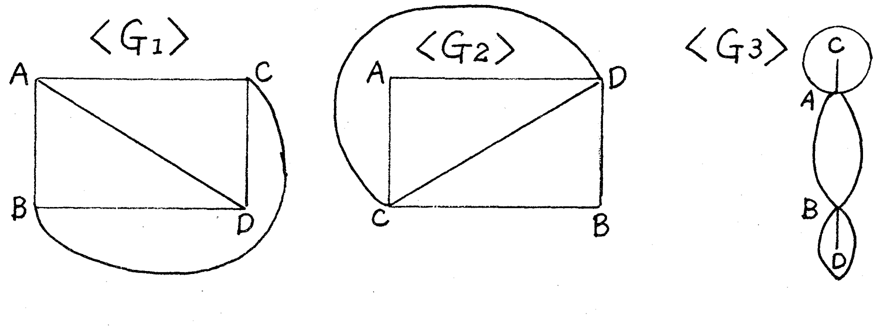
数理解析研究所講究録
268巻 1976年 52-68

genus 2のHeegaard分解をもつhomology 3-sphere

東工大 情報科学科　落合豊行

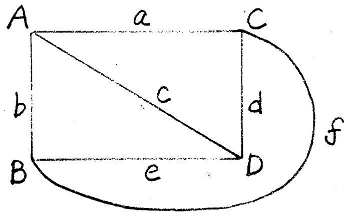
Tatsuo Homma [1]により、genus 2のHeegaard分解を持つ3次元多様体の構造と平面graphとの間に密接な関係があることが示された。この基本的考えにもとずいて、下記に述べる3つの平面graphから全てのgenus 2 homology 3-sphereが理論的にcomputerで実現できることが示される。さらにhomotopy 3-sphereとhomology 3-sphereとの間の相違点をcomputerで作ったhomology 3-sphereのモデルから見つけだすことを目的として、実際にprogramを実行し、解析を行ってみることにする。

定義）平面graph G_1, G_2, G_3とは次の3つのgraphのことである。

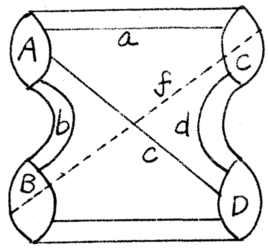


以下で program の説明を行ってみることにする。

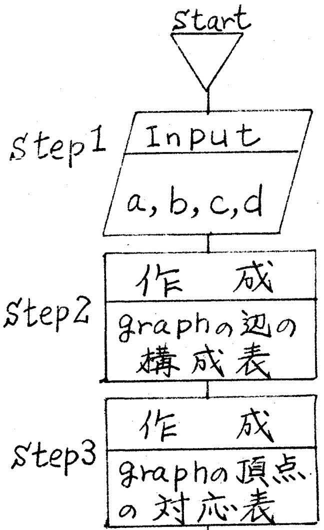
Step 1：graph G は input として、次の様に辺の重複度に基ずく parameter a, b c, d, e, f で与えられる。

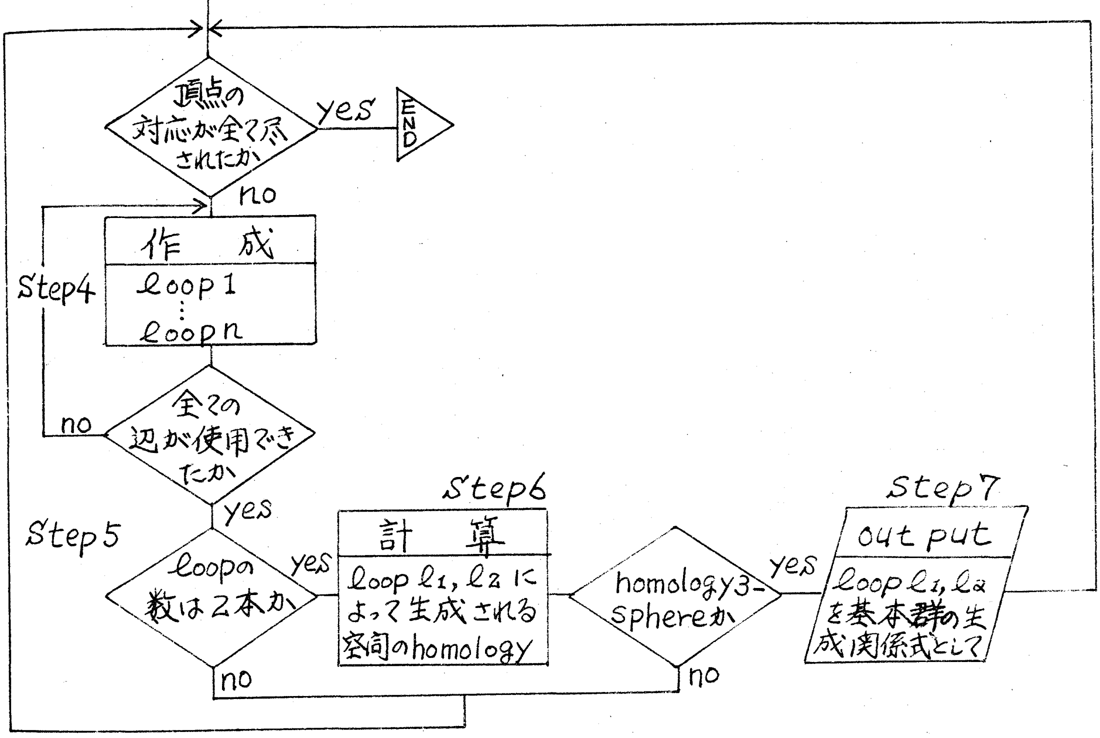


<G1>



<Fig 1>



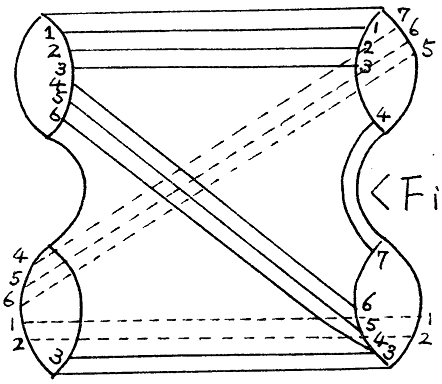


ところが、graph G_1 から Fig-1 をもとにして genus 2 の solid torus を作るには A と B，C と D を張り合わせて作るので、実際には $a = e$，$c = f$ であるので、input すべき

parameter は a, b, c, d でよい。$N = a + b + c$, $M = a + d + c$ とすれば、N, M なる2つの parameter でもよい。

<u>Step 2</u>：次に computer が Heegaard 分解における2つの meridian disk の張り合わせを作る為に必要とする辺の構成を作る。graph G_1 では、

A_1	C_1
A_2 ～ A_a	C_2 ～ C_a
A_{a+1} ～ A_{a+c}	D_{a+1} ～ D_{a+c}
A_{a+c+1} ～ A_{a+c+b}	B_{a+1} ～ B_{a+b}
B_1 ～ B_a	D_1 ～ D_a
B_{a+b+1} ～ B_{a+b+c}	C_{a+d+c} ～ C_{a+d+1}
C_{a+1} ～ C_{a+d}	D_{a+c+1} ～ D_{a+c+d}



<Fig 2>

Fig-2 で与えられる graph の構成表を書いて見ると次の様になる。(Fig-3)

Fig-3

A_1	C_1
A_2	C_2
A_3	C_3
A_4	D_6
A_5	D_5
A_6	D_4
B_1	D_1
B_2	D_2
B_3	D_3
B_4	C_7
B_5	C_6
B_6	C_5
C_4	D_7

<u>Step3</u>：張り合わせを与える diskA と diskB, diskC と diskD との対応表を作る。

例、Fig-2 で次の対応表となる。この対応

$A_1 \longleftrightarrow B_5$	$C_1 \longleftrightarrow D_3$
$A_2 \longleftrightarrow B_6$	$C_2 \longleftrightarrow D_4$
$A_3 \longleftrightarrow B_1$	$C_3 \longleftrightarrow D_5$
$A_4 \longleftrightarrow B_2$	$C_4 \longleftrightarrow D_6$
$A_5 \longleftrightarrow B_3$	$C_5 \longleftrightarrow D_7$
$A_6 \longleftrightarrow B_4$	$C_6 \longleftrightarrow D_1$
	$C_7 \longleftrightarrow D_2$

表で、trefoil knot から Dehn construction によって作られる homology 3-sphere の genus 2 Heegaard 分解ができる。

Step 4：Heegaard 分解を与える（2つの）loop l_1, l_2 を作る。Fig-3 の例で loop l_1, l_2 を表示して見ると、

l_1；$(A_1C_1)(D_3B_3)(A_5D_5)(C_3A_3)(B_1D_1)(C_6B_5)$

l_2；$(A_2C_2)(D_4A_6)(B_4C_7)(D_2B_2)(A_4D_6)(C_4D_7)(C_5B_6)$

Step 5：computer は2本以上の loop を持つ空間を作るが、genus 2 の Heegaard 分解には2つの meridian の張り合わせの為に丁度2本の loop のみを必要とする。

Step 6：2本の loop l_1, l_2 は作られる Heegaard 分解の homology と homotopy 群を決定する、すなわち基本群の生成関係式を与える。これを使って homology 群が trivial かどうかを決める。すなわち、loop l_1, l_2 の辺の結びつきの中で $\overrightarrow{BA}$ を +1, $\overrightarrow{AB}$ を −1, $\overrightarrow{CD}$ を +1, $\overrightarrow{DC}$ を −1 と決め、次の2次の行列式が ±1 になるかどうかで homology 3-sphere かどうかを決定できる。

$$\begin{pmatrix} \sum_{l_1} \overleftrightarrow{BA} & \sum_{l_1} \overleftrightarrow{CD} \\ \sum_{l_2} \overleftrightarrow{BA} & \sum_{l_2} \overleftrightarrow{CD} \end{pmatrix}$$

Step 7：(1) Step4 で書いた loop l_1, l_2 の結合表。

(2) $\overrightarrow{BA}$ を s, $\overrightarrow{CD}$ を t とし, s, t を基本群の

2つの生成元として l_1, l_2 を生成関係式として表現する。
例えば、Step4の例を関係式で書いて見ると、

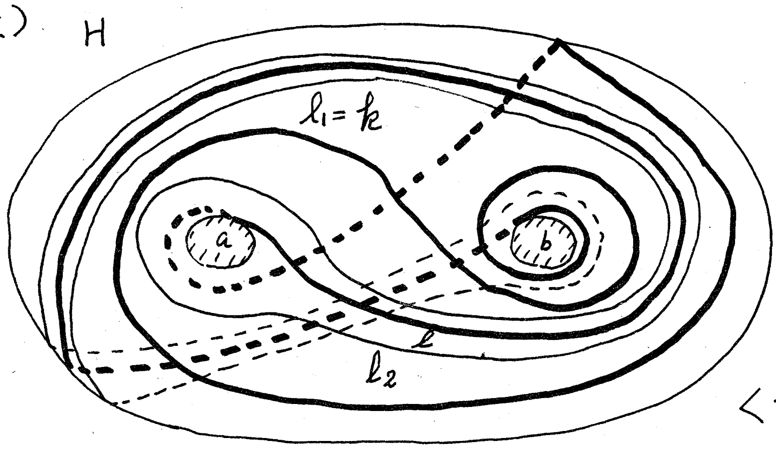
l_1; $tst^{-1}s^{-1}t^{-1}s = 1$

l_2; $ts^{-1}tst^{-2}s = 1$ となる。

(1)、(2) を output として list out する。
次にcomputer で作った example の解析を始める前に、以下のことを述べておく。2-brigde knot から Dehn construction で作られる homology 3-sphere の Heegaard分解は次の proposion で述べる如く簡単に作れる。

prop ; 2-brigde knotから自然な方法でgenus 2のHeegaard分解をもつhomology 3-sphereが作れる。

(証)



<Fig-4>

S^3 にstandard にembedされたgenus 2のSolid torusをHとする。a,bをHの外側に張ったproper な2つのdiskとする。このとき2-brigde knot k は ∂H の上で a,b とそれぞれ一点づつで交わるようにできる。従って、disk

aとbを結ぶk上の2つのarcが存在する。このarcのうちの1つをlとする。そのとき$a \cup b \cup l$と平行な∂H上のsimple closed curveでkと交わらないものが常に存在する。これをl_2とする。l_2にはHの外側でS^3におけるdiskがはれる。今solid torus Hの2つの生成元をs, tとするとl_2に張ったdiskは$st \sim 0$なる関係を与える。一方.$k = l_1$はa, bとそれぞれ一点ずつで交わるのでs, tの間のどんな関係式をも作れるように∂H上にembedされたままで変えられる。よってl_1, l_2をHeegaard分解の2つのmeridian diskの張り合わせとするhomology 3-sphereが作れる。又. disk a, (b)とl_2に張ったdiskで作られるHeegaard分解はS^3のHeegaard分解を与えるので、l_1, l_2はknot kからDehn constructionで作られるhomology 3-sphereのHeegaard分解を与える。実際Fig-4はstep 3で述べているtrefoil knotからDehn constructionで作られるhomology 3-sphereのHeegaard分解を与えている。

さて. Facom 230-45Sで作ったいくつかのhomology 3-sphereの解析を始める。Exampleの範囲は$N \leqq 15$, $M \leqq 15$で作ってみた。使用言語はassemblerを使った。

〔I〕$\pi_1(M) \neq 0$ が示せる例

(I₁) $\begin{cases} b^2a^3b^2a^2b^2a^3b^2a^{-1} = 1 & \text{—— (1)} \\ b^5a^3b^2a^3 = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

(2)より $a^3b^2 = b^{-5}a^{-3}$ これを(1)に代入して

$b^2(b^{-5}a^{-3})a^2b^2(b^{-5}a^{-3})a^{-1} = 1$

$b^{-3}a^{-1}b^{-3}a^{-4} = 1$ $a^4b^3ab^3 = 1$ —— (3)

ここで $b^3 = 1$ とおくと (3) より $a^5 = 1$

(2)より $b^2a^3b^2a^3 = 1$ $b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^{-2} = 1 \to (ba^2)^2 = 1$

$y = ba$ とおくと $b = ya^{-1}$

$a^5 = (ya^{-1})^3 = (ya)^2 = 1$ —— (4)

従って (I₁) は(4)で表現される群が non-trivial なら $\pi_1(M) \neq 0$ ところが $a^5 = y^5 = (ya)^2 = (ya^{-1})^3 = 1$ で表現される群は〔2〕によって non-trivial である。

(I₂) $\begin{cases} baba^{-3}baba^{-3}baba^{-2} = 1 & \text{—— (1)} \\ b^4a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^3a^{-1}b^{-1}a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

Heegaard 分解の 2つの meridian disk を(1), (2)で張り合わせる attach map を f とする。このとき f^{-1} を表現する関係式は図を書いてみると、(f で書いた関係式を f^{-1} で書いたものを conjugate presentation とする。) $a^3 = b^2a^8b^2$ —— (3)

$b^2 = a^3b^7a^3$ —— (4) となる。

今、$a^{11}=b^9=1$ とおくと (3), (4) 共に $(a^3b^{-2})^2=1$

さらに $A=a^3$, $B=b^2$ とおくと、$a=A^4$, $b=B^5$

従って $A^{11}=B^9=(AB^{-1})^2=1$ これは non-trivial [2]。

(Ⅱ3) $\begin{cases} a^2=b^{-1}ab^{-1}aba^{-1}ba^{-1}bab^{-1}ab^{-1} & \text{—— (1)} \\ b^2=a^{-1}ba^{-1}bab^{-1}ab^{-1}aba^{-1}ba^{-1} & \text{—— (2)} \end{cases}$

$x=a^{-1}b$ とおくと、(2) により $b^3=(a^{-1}b)^2a(b^{-1}a)^2b(a^{-1}b)^2$

$a=bx^{-1}$ であるから $b^3=x^2bx^{-1}x^2bx^2$

$b^3=x^2bx^{-3}bx^2$ —— (3)

又 (1) より $a^3=(b^{-1}a)^2b(a^{-1}b)^2a(b^{-1}a)^2$

$(bx^{-1})^3=x^{-2}bx^2bx^{-1}x^{-2}$

$(bx^{-1})^3=x^{-2}bx^2bx^{-3}$ —— (4)

(3) と (4) において $x\longrightarrow -x$

$x^2b^3x^2=bx^3b$ —— (5)

$(bx)^3=x^2bx^{-2}bx^3$ —— (6)

(5) より $x^{-2}bx^3=b^3x^2b^{-1}$ これを (6) に代入して

$(bx)^3=x^2b(b^3x^2b^{-1})$ $(bx)^3=x^2b^4x^2b^{-1}$

$x^3=b^5=1$ とおくと $(bx)^3=x^{-1}b^{-1}x^{-1}b^{-1}$

故って $(bx)^5=1$

(5) より $x^{-1}b^{-2}x^{-1}=b^2$ $(xb^2)^2=1$

ここで $xb=y$ とおくと $x=yb^{-1}$

$b^5=y^5=(yb)^2=(yb^{-1})^3=1$ となる。

ところがこれは、〔2〕により non-trivial。

(II4) $\begin{cases} a = b^2a^2b^{-2}a^{-2}b^{-2}a^2b^2 & \text{—— (1)} \\ b = a^2b^2a^{-2}b^{-2}a^{-2}b^2a^2 & \text{—— (2)} \end{cases}$

(1)より　$b^2a^2b^{-2}a^{-2} = ab^{-2}a^{-2}b^2$

(2)より　$b^2a^2b^{-2}a^{-2} = a^{-2}b^2a^2b^{-1}$

$ab^{-2}a^{-2}b^2 = a^{-2}b^2a^2b^{-1}$

$a^3b^{-2}a^{-2}b^3 = b^2a^2$ —— (3)

ここで $a^5=1$, $b^5=1$ とおくと

$a^3b^3a^3b^3a^3b^3=1 \longrightarrow (a^3b^3)^3=1$ —— (4)

(4)より　$b^{-2}a^{-2}b^{-2} = b^3a^3b^3 = a^{-3}b^{-3}a^{-3}$

故って　$a=b^2a^2(b^{-2}a^{-2}b^{-2})a^2b^2$

$=b^2a^2a^{-3}b^{-3}a^{-3}a^2b^2$

従って　$a=b^2a^{-1}b^{-3}a^{-1}b^2 \longrightarrow (a^{-1}b^2)^3=1$ —— (5)

$A=a^3$, $B=b^3$ とおくと　$a=A^2$, $b=B^2$ となり、

$A^5=B^5=(AB)^3=(A^2B)^3=1$

$C=AB$ とおくと　$A^5=C^3=(A^{-1}C)^5=(AC)^3=1$

$D=AC$ とおくと　$C^3=D^3=(DC^{-1})^5=(CD^{-1}C)^5=1$

$C^3=D^3=(DC^{-1})^5=(DC)^5=1$ —— (6)

(6)式は〔2〕により non-trivial である。

(II5) $\begin{cases} a^2= bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab \\ b^2= aba^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1}aba^{-1}ba \end{cases}$

この式は(Ⅱ2)で述べたconjugate presentationで書いて見ると(Ⅱ4)式になるので、やはりnon-trivialである。

$$(\mathrm{II}_6)\quad \begin{cases} ba^{-1}ba^{2}b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^{2}ba^{-1} = 1 \\ ba^{2}b^{8}a^{2}ba^{-3} = 1 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}_6')\quad \begin{cases} ba^{-1}ba^{2}b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^{2}ba^{-1} = 1 \\ ba^{2}b^{n}a^{2}ba^{-3} = 1 \end{cases}$$

(Ⅱ6')をconjugate presentationで書くと

$$\begin{cases} a^{2} = b^{-1}aba^{-1}bab^{-1}aba^{-1}bab^{-1} & \text{—— (1)} \\ b^{n}a^{-1}ba^{3}ba^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

$a^4=1$ とおくと (2)より $b^n a^{-1}ba^{-1}ba^{-1} = 1$

$$b^{n-1} = (ab^{-1})^3 \quad \text{—— (3)}$$

さらに $b^{n-1}=1$ とおくと $ab^{-1}ab^{-1} = ba^{-1}$ で

(1)より $(ba^{-1})\,b\,(ba^{-1})\,b\,(ba^{-1})\,b\,(ba^{-1})\,b\,(ba^{-1})\,b = 1$

故に $(ba^{-1}b)^5 = 1$

ここで $x=ab^{-1}$ とすると $a=xb$

$$x^3 = b^{n-1} = (xb)^4 = (x^{-1}b)^5 = 1 \quad \text{—— (4)}$$

[2]によって $n-1=3m$ $(m=0,\pm1,\cdots)$ のとき、non-trivial。

注) (Ⅱ6')は(Ⅱ6)がHeegaard分解を与えることから、それ自身Heegaard分解を与える。

$$(\mathrm{II}_7)\begin{cases} babab^{-4}ababa^{-3}=1 \\ babab^{-3}ababa^{-4}=1 \end{cases}$$

conjugate presentationで表わすと

$$(\mathrm{II}_7')\begin{cases} abababab^{-1}a^{-2}b^{-2}a^{-2}b^{-1}=1 & \text{—— (1)} \\ babababa^{-1}b^{-2}a^{-2}b^{-2}a^{-1}=1 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

$x=ab$とおくと　$a=xb^{-1}$, $a^{-1}=bx^{-1}$

(1)より　$x^4b^{-2}bx^{-1}bx^{-1}b^2bx^{-1}bx^{-1}b^{-1}=1$

$x^4b^{-1}x^{-1}bx^{-1}b^{-1}x^{-1}bx^{-1}b^{-1}=1$ —— (3)

(2)より　$bx^3bx^{-1}b^{-2}bx^{-1}bx^{-1}b^2bx^{-1}=1$

$bx^3bx^{-1}b^{-1}x^{-1}bx^{-1}b^{-1}x^{-1}=1$ —— (4)

(3)+(4)より　$bx^3(xbx^{-4})x^{-1}=1$　$bx^4b=x^5$ —— (5)

ここで　$y=bx^4$とおくと　$b=yx^{-4}$, $b^{-1}=x^4y^{-1}$

さらに　$x^9=1$とおくと　(5)より　$y^2=1$

(4)より　$(xy)^5=1$

$x^9=y^2=(xy)^5=1$　(unknown)

$$(\mathrm{II}_8)\begin{cases} a^2=bab^{-1}a^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab \\ b^2=aba^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba \end{cases}$$

conjugate presentationによって(II_3)と同型。

(II_8)は $\begin{cases} a^2=bab^{-1}a^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab \\ b^m=aba^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba \end{cases}$

でも、成立。

(Ⅱ9) $\begin{cases} ba^2ba^{-1}b^{-3}a^{-1} = 1 & \text{—— (1)} \\ ba^3ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^3ba^{-1}b^{-2}a^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

$a^3 = 1$ とおくと (1)より $ba^{-1}ba^{-1}b^{-3}a^{-1} = 1$

$b^4 = (a^{-1}b)^3$ —— (3)

$b^4 = 1$ とおくと (2)より $(b^2a^{-1})^5 = 1$ —— (4)

$y = ba^{-1}$ とおくと $b = ya$ で (3) より $y^3 = 1$

(4)より $(yayaa^{-1})^5 = (yay)^5 = 1$

$(y^2a)^5 = 1 \longrightarrow (y^{-1}a)^5 = 1$

従って $a^3 = y^3 = (ya)^4 = (y^{-1}a)^5 = 1$

[2]により non-trivial。

(Ⅱ10) $\begin{cases} ba^{-1}b^2a^{-1}ba^{-1}b^{-1}ababab^{-1}a^{-1} = 1 & \text{—— (1)} \\ ba^{-1}b^2a^{-1}ba^4ba^{-1}b^2a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

(2)より $b^3 = 1$ とおくと $ba^{-1}ba^{-1}ba^4ba^{-1}ba^{-1} = 1$

$a^5 = (ab^{-1})^5$

$a^5 = 1$ とおくと (1)より $(ba^{-1})^3b^{-1}ababab^{-1}a^{-1} = 1$

$(ba)^4 = 1$

従って $a^5 = b^3 = (ab)^4 = (ab^{-1})^3 = 1$ (unknown)

(Ⅱ11) $\begin{cases} baba^{-1}b^{-1}a^{-3}b^{-1}a^{-1}b^4a^{-1}b^{-1}a^{-3}b^{-1}a^{-1} = 1 & \text{—— (1)} \\ b^3a^{-1}b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

(2)より $a^2 = b^{-1}a^{-1}b^3a^{-1}b^{-1}$ —— (3)

(1) + (3) より $b^2 = aba^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba$ —— (4)

(4)+(2)より $b(aba^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba)a^{-1}b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^{-1} = 1$

$a^{-3} = bab^{-1}a^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab$ —— (5)

$(\mathrm{II}_{11}) \cong (4)+(5)$ で (4)+(5)において $a^5=1$ とおいて上式は non-trivial であるので (II_{11}) も non-trivial。

(II_{12})
$$\begin{cases} ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^{-4} = 1 & \text{—— (1)} \\ ba^{-1}b^{2}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}ababab^{-1}a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

$b^3 = 1$ とおくと (1)より $a^3 = (ba^{-1})^5$

$a^3 = 1$ とおくと (2)より $(ba^{-1})^3 b^{-1}ababab^{-1}a^{-1} = 1$

ところが $(ba^{-1})^3 = ab^{-1}ab^{-1}$ より $(ba)^4 = 1$

従って $a^3 = b^3 = (ab)^4 = (a^{-1}b)^5 = 1$

[2]により non-trivial。

(II_{13})
$$\begin{cases} baba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^{2}ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & \text{—— (1)} \\ ba^{2}ba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba^{2}ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

(1)+(2)より $aba^{-1}bab^{-1} = 1$ $(ba^{-1} = x)$ なる関係式をもつので (II_{13}) は torus knot からの Dehn construction による homology 3-sphere の問題に帰着できるので(4)により non-trivial。

(II_{14})
$$\begin{cases} ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^{2}ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & \text{—— (1)} \\ ba^{2}ba^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}ba^{2}ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

(1)+(2)により $a^2ba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba = 1$

$a^3 = b^{-1}abab^{-1}$ これは変換 $x = ab$ で

$x^{a} = axa$ となり (Ⅱ14) は (Ⅱ13) と同様になる。

(Ⅱ15) $\begin{cases} a^2 = babab^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}abab \\ b^2 = ababa^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}baba \end{cases}$

$b \longrightarrow b^{-1}$ で (Ⅱ15) は (Ⅱ3) と同型。

(Ⅱ16) $\begin{cases} a^2 = b^{-1}a^{-1}b^{-1}abababab^{-1}a^{-1}b^{-1} & \text{—— (1)} \\ b^2 = a^{-1}b^{-1}a^{-1}babababa^{-1}b^{-1}a^{-1} & \text{—— (2)} \end{cases}$

(1)により　$x = ab$ とおくと　$b = a^{-1}x$, $b^{-1} = x^{-1}a$ から

$a = x^{-2}ax^{3}ax^{-2}$

$x^2ax^2 = ax^3a$　　$y = ax$ の変換を続けて.

$x^2yx^2 = y^2$ となる。

従って (Ⅱ16) も又 (Ⅱ13) と同様に non-trivial。

(Ⅱ17) $\begin{cases} a^2 = b^{-1}abab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}abab^{-1} \\ b^2 = a^{-1}baba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}baba^{-1} \end{cases}$

$b \to b^{-1}$　　$a^2 = bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab$

$b^2 = aba^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1}aba^{-1}ba$

$x = a^{-1}b$ の変換で　$a = xax^{-1}axa^{-1}x^{-1}a^{-1}xax^{-1}ax$

$y = a^{-1}x$ の変換で　$1 = yay^{-1}aya^{-1}y^{-1}a^{-1}yay^{-1}ay$

$y^2 = a^{-1}ya^{-1}y^{-1}ayay^{-1}a^{-1}ya^{-1}$

(Ⅱ17) も又 (Ⅱ13) と同様に non-trivial。

(Ⅱ18) $\begin{cases} a^2 = b^{-1}aba^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}bab^{-1} \\ b^2 = a^{-1}bab^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}aba^{-1} \end{cases}$

(II_8) は conjugate presentation でも表示(II_8)をもつ。

unknown。

〔II〕2つの関係式がどちらかに代入可能であるが $\pi_1(M) \neq 0$

(II_1) $\begin{cases} baba^{-2}=1 & \text{—— (1)} \\ babab^{-5}ababa^{-3}=1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

$a^3=(ba)^2=1$ とおくと　$a^3=b^5=(ab)^2=1$ となり、

non-trivial であるが(1)を(2)に代入した後

$babab^{-5}a\underset{\sim\sim\sim}{baba^{-2}}a^{-1}=1$　では $\begin{cases} baba^{-2}=1 \\ b^{-4}aba=1 \end{cases}$ となり

代入可能性はなくなる。

(II_2) $\begin{cases} baba^{-2}=1 \\ baba^{-1}b^{-1}a^{-1}b^3a^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}=1 \end{cases}$

(II_3) $\begin{cases} baba^{-1}ba^2b^4a^2ba^{-1}=1 \\ bababa^{-1}=1 \end{cases}$

$a^3=b^5=(ab)^3=1$　non-trivial

代入1回後では $\begin{cases} a^2b^5=1 \\ bababa^{-1}=1 \end{cases}$ となり代入可能性は.

なくなる。

(II_4) $\begin{cases} baba^{-2}=1 \\ babab^{-6}ababa^{-3}bababa^{-3}=1 \end{cases}$

$a^2=bab,\ b^4=aba$ で non-trivial。

(Ⅱ5) $\begin{cases} bababababa\,ba^{-2}b^{-1}a^{2}b^{4}a^{2}b^{-1}a^{-2}=1 \\ b^{3}a^{2}=1 \end{cases}$

$a^{2}=b^{3}=(ab)^{5}=1$

〔Ⅲ〕$\pi_1(M)=1$ であるexample

(Ⅱ1) $\begin{cases} ba^{2}b^{2}a^{2}b^{2}a^{2}b^{2}a^{2}ba^{-1}=1 & \text{—— (1)} \\ b^{-2}a^{-2}b^{-2}a^{-2}b^{-3}a^{-2}=1 & \text{—— (2)} \end{cases}$

(2)の逆をとって　$b^{3}a^{2}b^{2}a^{2}b^{2}a^{2}=1$ これは(1)に代入可能で　$ba^{2}b^{2}a^{2}b^{2}a^{2}b^{2}a^{2}ba^{-1}=1$

$$\begin{cases} b^{3}a^{2}b^{2}a^{2}b^{2}a^{2}=1 \\ ba^{2}a^{-1}=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b^{3}a^{2}b^{2}a^{2}b^{2}a^{2}=1 \\ ba=1 \end{cases}$$

$N\leqq 15$, $M\leqq 15$ の範囲では $\pi_1(M)=0$ のときは全てのexampleが最後の段階 ($a=1$, $b=1$) まで代入可能である。

〔Ⅳ〕最後に、exampleから予想されるhomologyとhomotopyの相違点は次に帰着するものと思われる。

『genus 2のHeegaard分解をもつhomology 3-sphereがhomotopy 3-sphereである為の必要十分条件は、f あるいは f^{-1} のどちらかが生成する2つの関係式が、どの段階でも、代入可能であること。』

参考文献

[1] Tatsuo Homma ; Heegaard分解と曲面上の曲線系数理解析研究所講究録 1974

[2] H·S·M. Coxeter; The abstract groups $G^{m,n,p}$
Trans. Amer. Math. Soc 45 (1939), 73-150

[3] R.H. Bing & Martin ; Cubeswith knotted holes.
Trans. Amer. Math. Soc 155 (1971), 217-231

[4] J. Hempel ; A simmly connected 3-manifold is S^3 if it is the sum of a solid torus and the complement of a torus knot,
Proc. Amer. Math Soc 15 (1964), 154-158

最近2-brigde knot に関して、特に $6_2, 6_3$ に対する cudes with knotted holes の問題に関して、computer で解決した論文が表われた。

[5] R. Riley ; knots with parabolic property-P,
J. Math Oxford, 25 (1974) 273-283