数理解析研究所講究録
268巻 1976年 1-9

HOMEOMORPHISMS OF LARGE SEIFERT MANIFOLDS

関西学院大学 理　浅野孝平

P を polyhedron とし、P の自己同相写像の全体がつくる群の、isotopic to identity な自己同相写像の全体のつくる部分群による剰余群を、P の homeotopy group $\Lambda(P)$ と呼ぶ。ここでは、3-manifold の homeotopy group について考える。3-manifold の homeotopy group については、次の問題に関連して興味がある。

1. 3次元球面の中の knot は、その complementary によって type が決定されるか。

2. Smith Conjecture。

3. knot group の automorphism group を決定する。

sufficiently large な、(すなわち incompressible な orientable surface をふくむ)、irreducible な 3-manifold の homeotopy group については、Waldhausen の基本的な結果 [2] が知られている。しかし、実際に、homeotopy group を決定するこ

一般には.
とは. 非常にむずかしい。ここでは. [1] [2] の結果を利用して. sufficiently large な Seifert fiber space についての結果を述べる。

準備　次のようにして. 構成された 3-manifold を Seifert fiber space (あるいは. Seifert manifold) $\{b; (\epsilon, g); (\alpha_1, \beta_1), \cdots (\alpha_r, \beta_r)\}$ と呼ぶ。但し. $\epsilon = o_1, o_2, n_1, n_2, n_3, n_4$. $b \in \mathbb{Z}$ if $\epsilon = o_1, n_2$　$b \in \mathbb{Z}_2$ if $\epsilon = o_2, n_1, n_3, n_4$. (α_i, β_i) relatively prime integers with $\alpha_i > \beta_i > 0$.

1. genus g で $r+1$ 個の boundary を持つ surface (orientable or nonorientable) の上の S^1-bundle を考える。このとき必ず. cross-section が存在する。この cross-section の boundary を a_i と名づける。($i=1, 2, \cdots, r$)

2. a_i の上の S^1-bundle は torus である。これを T_i とおくことにする。T_i の上の fiber の1つを b_i とおくと. (a_i, b_i) は. $H_1(T_i) \cong \pi_1(T_i)$ の generating system をなす。

3. 各 T_i ($i \neq 0$) に対して meridian disk が $\alpha_i a_i + \beta_i b_i$ に homologous となるように. solid torus V_i をはりつける。V_i の中には. T_i の fibering を拡張しておく。(このとき V_i の center line は普通の意味では fiber ではない。これを

exceptional fiber と呼ぶ。) T_0 には、meridian disk が $a_0 + b b_0$ となるように、solid torus V_0 をはりつける。

4. boundary のある Seifert fiber space は、boundary のない Seifert fiber space から、fiber にそった solid torus をのぞいたものと考えればよい。

最初に、Waldhausen の結果をまとめておく。以下 orientable case すなわち、type O_1 および n_2 の Seifert fiber space に制限しておく。

次の List にふくまれていない Seifert manifold を "large" Seifert manifold と呼ぶ。

$\partial M \neq \phi$ のとき。

(1). $S^1 \times S^1 \times I$, I; interval.

(2) base space が disk で 2つの exceptional fiber type $(2, 1)$ を持つ。

(3). Möbius band の上の fiber space.

$\partial M = \phi$ のとき

(1) $\epsilon = O_1$, $g = 0$, $r \leqq 3$

(2) $\epsilon = n_2$, $g = 1$, $r \leqq 1$

(3) $S^1 \times S^1 \times S^1$

(4) $\{0; (n_2, 2)\}$

(5) $\{-2;(o_1,0);(2,1),(2,1),(2,1),(2,1)\}$

(6) $\{-1;(n_2,1);(2,1),(2,1)\}$

"large"な Seifert fiber space は. sufficiently large である。[1] or [3]。

Waldhausen は large な Seifert manifold について次の定理を証明している。

<u>Theorem</u>　M, N を large Seifert manifold とする。$\phi : M \to N$ を homeomorphism とするならば. ϕ と isotopic な fiber preserving homeomorphism が存在する。

さらに. [1] で. isotopic to identity な fiber preserving homeomorphism は. fiber preserving isotopy によって isotopic to identity であることを注意している。ここでは. 以上の2つの結果を使って考える。

$\Lambda(B, \{z_* \cdots z_*\} \cdots\cdots \{z_* \cdots z_*\})$, $z_i \in B$ を Bの. { } 内の点が set wise に fix されるような homeomorphism の全体の. { }内の点を setwise に fixした Bの isotopy によって isotopic to identity な homeomorphism の全体による剰余群とする。

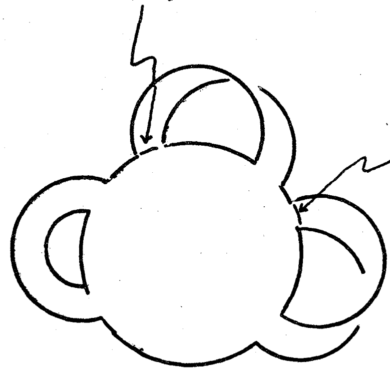
type(α_i, β_j)の exceptional fiber に genus g の surface B の点 z_i を対応させて、もし $(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_j, \beta_j)$ ならば. z_i と z_j を1つの{ }内

にいれ、もしboundaryのあるSeifert fiber spaceのときは、boundaryの各componentに $z_i \in B$ を対応させ1つの{ }にくくる。このようにしてつくった $\Lambda(B, \{z_* \cdots\} \cdots \{\cdots z_*\})$ を $\mathfrak{A}$ と書くことにする。すると、largeなSeifert manifold M に対して、 $\pi : \Lambda(M) \longrightarrow \mathfrak{A}$ というhomomorphismが存在する。

<u>Lemma 1.</u> 次のようなhomomorphism Φ が存在する。 $\pi\Phi = \text{identity}$.

証明. $\mathfrak{A}$ のelementは $\Lambda(B')$ のelementと一対一対応している。但し、B'は、genus g のsurfaceから、$r+1+$ {boundaryの個数}個のdiskのinteriorをのぞいたsurface。$\epsilon = 0$, のとき、M' を M からexceptional fiberのneighbourhoodをのぞいたmanifoldとすると、$M' \approx B' \times S^1$ である。B'のhomeomorphismは、$B' \times S^1$ のhomeomorphismに拡張できるので、この拡張されたhomeomorphismが、さらに、各 V_i に、拡張できることを示せば、十分である。a_iは、$\pm a_j$ に写され b_iは$\pm b_j$ に写されるのであるから、V_i のmeridian curveは V_j のmeridian curveに写される。故に、V_iからV_jのhomeomorphismに拡張可能である。

$\epsilon = n_2$ のとき。 M' を B' の上の S^1-bundle と考えて、$p^{-1}(k_i)$ を、A_i とおく。($i=1,2,\cdots,g$).



但し、p は、M' を S^1-bundle と考えたときの bundle projection.
k_i は図のような、B' 上の proper arc とする。$\tau(M'-\bigcup U(A_i))$ は、product bundle であるので、
$\tau(B'-\bigcup U(k_i))$ の homeomorphism は、$\tau(M'-\bigcup U(A_i))$ に拡張可能である。そして、M' が orientable であることを使えば、M' に拡張できることを証明できる。■

したがって、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\pi \longrightarrow \Lambda(M) \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

は、split する。目標は、$\Lambda(M)$ と $\mathcal{H}$ の関係を明らかにすることであるから、$\mathrm{Ker}\,\pi$ を計算すれば良い。

<u>Lemma 2.</u> $p: N \longrightarrow S$ を surface S の上の、S^1-bundle とする。このとき、S の isotopy $\{i_t ; 0 \leq t \leq 1\}$ と、$i_0 p = pF$ である N の autohomeomorphism F が存在すると仮定する。このとき、N の isotopy $\{I_t ; 0 \leq t \leq 1\}$ で、$i_t p = p I_t$, $I_0 = F$ となるものが存在する。

上の lemmaは、trivialである。このことにより、KerΠは各fiberが自分自身にmapする homeomorphism を考えれば良いことになる。

<u>Lemma 3.</u> fを、Mのfiber preserving homeo で fのisotopy class $[f]$が、KerΠにふくまれているとする。そして、さらに $f(B')=B'$ とするならば、fは isotopic to identity である。

これは、Mを$\cup T_j$ および B'でcutすることにより、証明できる。このlemmaによって、KerΠは、M'のcross-section B'のembedding を分類すればよい。まず、cross-section のboundary を考える。

<u>Lemma 4.</u> fをMのfiber preserving homeomorphism で $[f]\in$ KerΠで、しかも各fiberは、自分自身にmapしているとする。

$\partial M=\phi$のとき、$M=\{b;(\epsilon,g);(2,1)\cdots(2,1)\}, r=2b$ とすれば、

1). $f(a_i)\sim\epsilon a_i$, $f(b_i)\sim\epsilon b_i$

2). $f(a_i)\sim\epsilon(a_i+b_i)$, $f(b_i)\sim-\epsilon b_i$

ここで、$\epsilon = \pm 1$, $\sim$ は homologous on T_i を示す。

$\partial M \neq \phi$ で、exceptional fiber がすべて type (2, 1) のときも、上と同じ。

上以外の Seifert manifold に対しては、$f_i(a_i) \sim \epsilon a_i$ $f(b_i) \sim \epsilon b_i$。

証明は略する。ここで、orientation preserving homeo. であれば、cross-section の boundary は、固定されているので、次のような exact sequence を考える。$\Lambda^+(M)$を、{Mの orientation preserving homeo. の全体} ／ {isotopic to identity な homeo. の全体} とすれば、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\pi^+ \longrightarrow \Lambda^+(M) \xrightarrow{\pi^+} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

は split する。そして、上の lemma により $\Lambda^+(M)$ を決定すれば $\Lambda(M)$ がわかる。そして、

<u>Theorem</u> $\mathrm{Ker}\,\pi^+ \cong H_1(B)$

という結果を得る。さらに $\mathcal{H}$ より $\mathrm{Ker}\,\pi^+$ の automorphism group への homomorphism は、

$$\mathcal{H} \longrightarrow \Lambda(B) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, H_1(B)$$

という自然な homomorphism の合成である。

Example torus knot の complement $T_{p,q}$

$\mathcal{H} \cong \mathbb{Z}_2$, $\mathrm{Ker}\,\pi^+ \cong H_1(B) \cong 0$

$\Lambda^+(T_{p,q}) \cong \Lambda(T_{p,q}) \cong \mathbb{Z}_2$

文献

(1) F. Waldhausen, "Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I," Invent. Math.3 (1967), 308 - 333; II, Invent. Math. 4 (1967), 87 - 117.

(2) F. Waldhausen, "On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large," Ann. Math. 87 (1968), 56 - 88.

(3) P. Orlik, "Seifert Manifolds," Lecture Notes in Math. 291, Springer-Verlag, (1972).