数理解析研究所講究録
270巻 1976年 60-73

多オートマトン系における definiteness の問題

京大 理学部　西尾 英之助

§0 はじめに

多オートマトン(polyautomaton)は，同一の有限オートマトンを多数個結合した一個の(有限)オートマトンである。ここでは，多オートマトンを順に生成する規則を考え，その規則に従って生成された多オートマトンの列について，例えば definiteness のような性質が，ある番号以降すべてについて成立つか否か，あるいはある番号で初めて成立つようなことが起るか否か，などの問題を扱う。

その動機として，(i)セル構造オートマトン理論の拡張，と(ii)神経系の個体発生や系統発生のモデルづくりとがある。後者については少し説明が必要だと思われる：　神経系の発生の機構は未だ十分に解明されていないが，基本素子であるニューロンが，つぎつぎとシナプス結合をして，特定の神経回路網が完成する。　この時，結合したニューロンは最早細胞

分裂はしないと云われている。各神経系は固有の機能や性質を持っているが，発生の初期から持っているのではなくて，ある発生段階に達して始めてそれらが現われてくる。発生の各段階に対応する多オートマトンを考え，生長の時間的経過に対して，多オートマトンの列を考える。従って，多オートマトンの列について，機能や性質の消長を論ずることによって，発生現象の一側面を知ることができる。

§I 多オートマトン系の定義

I.I 素子オートマトン（cell, a finite automaton）

$A = \langle Q, n, f \rangle$ で定義される。ここで

Q；内部状態の有限集合，　n；入力ターミナル数，各ターミナルには1からnの番号がついていて，各時刻には入力としてQの元が入って来る。

f；$Q \times Q^n \rightarrow Q$ で，Aの状態遷移関数である。

cellのQとfを問題にしないで，入力ターミナル数nのみを扱う場合には，"n-cell"と書く。

I.2 多オートマトン（polyautomaton, a connected set of cells）

まず，n-cell を多数結合した net C_n を定義する：

C_n：$N \times [n] \longrightarrow N \cup X \cup \{0\}$

ただし　$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$，N＝自然数の集合，X≒外部

入力変数の集合 $\{x_i \mid i \in N\}$ である。

net C_n 中の cell k から，cell i のターミナル j へ結線されていれば，　　$C_n(i,j) = k$

とし，外部入力 x_k が cell i のターミナル j へ入っていれば　　$C_n(i,j) = x_k$

とし，(i,j) ターミナルへは上記いずれの線も入っていないときは　　$C_n(i,j) = 0$

とする。$C_n(i,j)=0$ のとき，(i,j) は "open" であるという。

C_n は $N \times [n]$ のすべての点について定義されているとは限らないが，$\exists j \in [n]$ について $C_n(i,j)$ が定義されていれば，その i については，$\forall j \in [n]$ で $C_n(i,j)$ が定義されていると仮定する。このとき n-cell i は "C_n の素子である" という。

C_n の素子の全体を (C_n)，その個数を $\#(C_n)$ と書く。

$B(C_n) = \{(i,j) \mid C_n(i,j) = 0\}$ を境界ターミナルの集合，

$X(C_n) = \{(i,j) \mid C_n(i,j) \in X\}$ を入力ターミナルの集合という。

C_n の全体を $\mathcal{C}_n$ と書き，n-net の全体という。

$A = \langle Q, n, f \rangle$ のとき，$M = \langle A, C_n \rangle$，$(C_n \in \mathcal{C}_n)$ を（A から成る）多オートマトンという。M の cell の数は $\#(C_n)$ であり，入力ターミナルは $X(C_n)$ である。

II.4 生長規則の制限

前節の生長規則の定義は広すぎるので，つぎのような制限を設けたものを扱う。

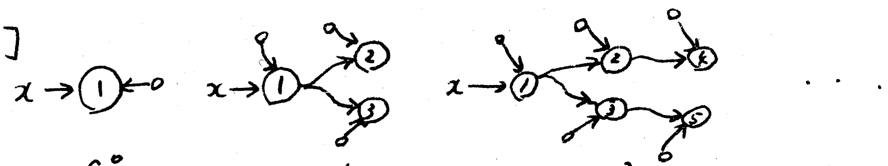
○単調増大型（monotone growth） m-G ではgはつぎの条件を満たす；

(i) $(g(c)) \supset (c), \quad c \in G_n$

(ii) $(\forall i,j,k \in N)(c(i,j)=k \Rightarrow g(c)(i,j)=k)$

すなわち，一旦 net に含まれた cell は以降のすべての net に含まれる。また net 内の結線も消えることはない。

[m-G_2の例]



C^0 C^1 C^2 . . .

○内部生長型（internal growth） i-G

(i) まず単調増大型であること，

(ii) $c(i,j)=x_k \Leftrightarrow g(c)(i,j)=x_k$

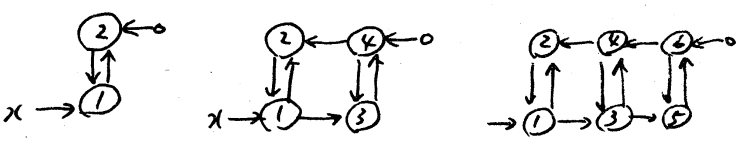
すなわち外部入力ターミナルは不変である。

[i-G_2の例]

A :

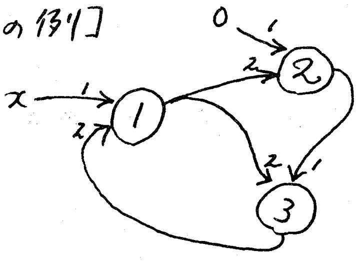
C^0 C^1 C^2 . . .（一次元 array）

B :



C^0 C^1 C^2 . .（梯子型）

[2-net の例]



ターミナル(1.1)が外部入力 x
ターミナル(2.1)が"open"

II.3 多オートマトン系(列)(growth process, series of nets)

まず n-net の生長規則 $G_n = \langle g, c^0 \rangle$ を考える。

n: 素子として n-cell を用いることを示す。明らかなときは省略する。

g: $G_n \to G_n$ の写像であって、$g(c)$ は、定義されているならば、それは c から何らかのアルゴリズムによって一意的に定まるものとする。

c^0: G_n の元で a priori に与えられる。

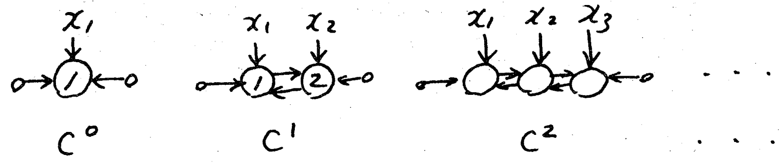
<u>G_n によって生成される net の系列</u>　$S(G_n)$

$g(c^0) = c^1, \quad g(c^i) = c^{i+1} \ (i = 1, 2 \cdots)$ として、

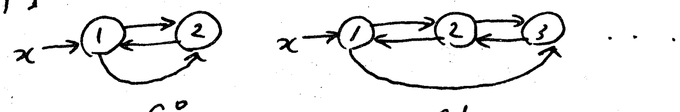
$S(G_n) = (c^0, c^1, c^2, \cdots\cdots)$ を G_n によって生成される net の系列という。

<u>G_n と A によって生成される多オートマトンの系列</u> $S(G_n, A)$ は、$S(G_n)$ の各 net c^i を多オートマトン $\langle A, c^i \rangle = M^i$ でおきかえたものである。

[$S(G_3)$] の例
(m-G でもある)



[m-G でない例]



C^0 C^1

§2 多オートマトン系について論ずるテーマ

小渕, 西尾(1970)は一次元セル構造オートマトンの研究の一つとして, 丁度前節の[i-G_2の例A](一次元array)の場合について, $Q=\{0,1\}$とし, openターミナルに定数1を入れたとき, 一般に(fによらないで)C^iが強連結でないならば, C^{i+1}も強連結ではない事を示した。従って, (fに依存して)あるkがあって, C^{k+1}が初めて強連結でなくなるので, このkをfの強連結性の標数と呼んだ。すべてのC^iについて強連結のときは, $k=\infty$と定義した。同様に, 弱連結性, 到達可能性, 可制御性などの標数も定義された。

また西尾, 小渕(1969)は, 有限長の一次元arrayにおいて, 一端から他端への情報伝達を定義し, cell, とくにfが, その情報伝達能力の点から, (I)初期状態によらず, ある有限長のarrayならば情報が伝わるが, より長い場合は伝わらない, (III)初期状態によらず, いくらでも長いarrayにおいて情報が伝わる, (II)初期状態に依存して, 情報伝達能力が変わる, という3種に類別できることを示した。とくに(I)の類のcellについては, 情報伝達の長さの限界が存在するわけ

である。

以上のような結果を考慮して，つぎの定義をする。

○<u>究極的に安定な性質</u>：　ある性質，あるいは命題（netについての）Pがあり，ある$S(G_n, A)$において，$(\exists k)(P(M^i) = \mathrm{true}\ \forall i \geq k)$のとき，$P$は$(G_n, A)$において究極的に安定であるという。そのような$k$の最小のものを$P$の安定性の標数という。

あるcellのクラス$\tilde{A}$のすべてのcellについて，Pが究極的に安定ならば，Pは$(G_n, \tilde{A})$について究極的に安定であるという。

そこで，問題として，如何なるPがどのような$(G_n, \tilde{A})$について究極的に安定なのか？　を考える。また特定のPを定めておいて，それが安定になる$(G_n, \tilde{A})$を問う。またAを例えばMcCulloch-Pittsニューロンとして，固定しておいて，PとG_nの関係を調べるのも興味あるテーマである。

§3　Definiteness

ここでPの具体例として，definitenessを取上げる。その動機は，実際の神経系は，短時間記憶のニューロンを素子としてより長い記憶を実現しているが，依然として有限時間記憶のnetであると考えたからである。

3.1 Definitenessの定義と基本的事項

o有限オートマトンMの最終状態が入力系列の最近のk時間の部分によって一意的に決まり, $k-1$時間の部分ではそうでないとき, Mはdefiniteであり, そのorderはkであるという。そのようなkが存在しないとき, Mはindefiniteである。

o任意の有限オートマトンのdefinitenessとそのorderを決めるアルゴリズムが存在する。

oオートマトンがdefiniteであるならば強連結部分は一個である。

o $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を入力ターミナル変数とするオートマトンを$A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$と書く。Aが$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$についてdefiniteのとき, Aを(totally) definiteという。変数のいくつかを定数に固定して得られるオートマトンがdefiniteのとき, Aを(partially definiteという。ある変数x_i以外の変数を定数にしたオートマトンが, この定数のとり方に無関係にdefiniteであるとき, Aはx_iについて(totally) definiteであるという。そこで, つぎの命題が成立つ。

$\exists i$, x_iについてAがdefiniteならば, Aはtotally definiteである。そのorderは$A(x_i)$のそれに等しい。(証明略)

3.2 $A = \langle \{0,1\}, 2, f \rangle$, $G_2 =$ 一次元arrayの場合.

cellとして, 2入力, 2状態のオートマトンを用いる一次

元状のnetの列において，definitenessが安定か否かを調べる。

fを表現するのに，$\begin{array}{c|c|cc} & & \multicolumn{2}{c}{x_2} \\ & 0 & 0 & 1 \\ \hline x_1 & 0 & a & c \\ & 1 & b & d \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & e & g \\ 1 & f & h \end{array}$　$(a, b, \cdots = 0 \text{ or } 1)$　のような表を用いることがある。その意味は，例えば，状態が0で，ターミナル$x_1 = 1$，ターミナル$x_2 = 0$ ならば，状態bへ遷移する。このことを $f(0, 1, 0) = b$ とも書く。

さて，ここで得られた主な結果を示そう。

〔定理〕　一次元状のnetの列について，definitenessは究極的に安定ではない。

〔証明〕はつぎの命題による。

〔命題〕　$f_{\oplus}(q, x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$（mod.2の加算）とするcell $A = \langle \{0, 1\}, 2, f_{\oplus} \rangle$ を用いる場合，（そのorderはi）

(i) $i = 2^k - 1$ $(k = 1, 2 \cdots)$ となる M^i はdefiniteであり，

(ii) $i = 2^k$ $(k = 1, 2 \cdots)$ となる M^i はindefiniteである。

G_2としてopen terminalから入れる定数を0，1いずれに選んでもよい。また（内部成長型ではないが）両端から外部入力を入れたnetを考えても結果は同じである。

〔証明〕

まず(i)を証明するが，両端から外部入力系列 $a_0 a_1 \cdots a_t \cdots$ および $b_0 b_1 \cdots b_t \cdots$ が入る場合を考える。

M^i $(i=2^k-1)$ の初期様相を $\alpha^0 = \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_i$ ($\alpha = 0$ or 1 の変数) とする。時刻 $t=1$ の様相は $\alpha^1 = a_0 \oplus \alpha_2, \alpha_1 \oplus \alpha_3, \cdots, \alpha_{i-2} \oplus \alpha_i, \alpha_{i-1} \oplus b_0$ となる。一般に時刻 t における、各セルの状態は、$\alpha_1, \cdots, \alpha_i$ の線型結合($\oplus$の意味で)と外部入力 $a_0 \sim a_{t-1}$, $b_0 \sim b_{t-1}$ の線型結合部分の和$\oplus$で表現される。時刻 $t=k$ ですべての cell の状態が $\alpha_1 \sim \alpha_i$ の項を含まなくなれば、M^i は definite (order k) である。初期様相の情報がいずれかの cell の中に永久に残るならば、M^i は indefinite である。

さて $f_\oplus$ の線型性から、外部入力系列として $000\cdots$ を考えておいてよいことがわかる。初期様相の情報 $\alpha_1 \sim \alpha_i$ が $f_\oplus$ のもとで時間的に変化する様子を見るために、つぎのような線型変換行列を用いる。[小渕氏の示唆による]。

$$T_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{i \times i}$$

ただし T_i の元は $(\{0,1\},\oplus)$ の元だと考える。

時刻 t の様相を α^t $(t=0,1,2,\cdots)$ とすると、

$$\alpha^{t+1} = \alpha^t T_i$$

従って

$$\alpha^t = \alpha^0 T_i^{\,t}$$

いま $f_i(\lambda) = |T_i - \lambda E|$,(ただし E は単位行列、$|\ |$ は行列式)を定義する。

すると　$f_i(\lambda) = -\lambda^i$　が成立つ。　$(i = 2^k-1,\ k = 2, 3 \cdots)$

なぜなら，(i)　$i = 3 = 2^2-1$　のときは手計算で　$f_3(\lambda) = -\lambda^3$ となる。

(ii)　$i = 2^s-1$　のとき　$f_i(\lambda) = -\lambda^i$ が成立ったとする。

さて

$$f_{2^{s+1}-1}(\lambda) = -\lambda\left(f_{2^s-1}(\lambda)\right)^2 - 2\, f_{2^s-2}(\lambda) \cdot f_{2^s-1}(\lambda)$$

（これは第 2^s 行の3要素について小行列展開することによって得られる。）

いま㊉で演算しているから，右辺第2項は消える。

従って，$f_{2^{s+1}-1}(\lambda) = -\lambda \cdot (-\lambda^{2^s-1})^2 = -\lambda^{2^{s+1}-1}$。

帰納法が完成した。

他方，Cayley-Hamilton の定理により

$$f_i(T_i) = [T_i - T_i E] = 0 \quad \text{（ゼロ行列）}$$

$f_i(\lambda) = -\lambda^i$ から，

$f_i(T_i) = -T_i^i$

すなわち

$$T_i^i = 0 \quad (i = 2^k-1,\ k = 2, 3 \cdots)。$$

従って　$\alpha^i = \alpha^0 T_i^i = 0$　（ゼロベクトル）。

すなわち初期様相にかかわらず，$t = i$ において M^i の様相は外部入力 $a_0 \sim a_{i-1}$，$b_0 \sim b_{i-1}$ のみによって決まる。

以上で order は i 以下であることがわかったが，丁度 i であることを証明するために，

$\exists \alpha^0 \mid \alpha^0 T_i^{i-1} \neq 0$ であることを示す。

実際 $\alpha^0 = (\alpha_1 000 \cdots 0)$ とすると

$\alpha^0 T_i^{i-1} = (\alpha_1 0 \alpha_1 0 \alpha_1 \cdots \alpha_1) \neq 0$ である。

つぎに命題の(ii)を証明する。

$i = 2^k$ とし、$\alpha^0 = (\alpha_1 00 \cdots 0)_i$ とする。すると、

$\alpha^0 T_i^{i-2} = (\alpha_1 0 \alpha_1 0 \cdots \alpha_1 0)$ となり、従って

$\alpha^0 T_i^{i-1} = (000 \cdots 0 \alpha_1) \equiv \alpha^*$

T_i は左右対称だから、

$\alpha^* T_i^{i-1} = (\alpha_1 0 \cdots 0) = \alpha^0$

すなわち $\alpha^0 T_i^{2i-2} = \alpha^0$。

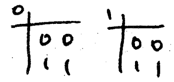
α^0 が周期 $2i-2$ で繰返すから、cell 1 の状態 α_1 が永久に M^i の中に残ることになり、M^i が indefinite であることになる。［命題の証明終り］

$f_\oplus$ については、$i = 2^k$ だけでなく、$2^k - 1$ 以外のすべての i について、M^i が indefinite になると予想される。上の証明法から明らかに、$f_{\oplus 1} = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$ についても同じ命題が成立つ。

◎その他の関数について： 2状態2入力ターミナルの cell は全体で256種ある。それらについて、definiteness の安定

性を調べた。 Kobuchi (1973) が強連結性や弱連結性の標数を全部求めているので、その結果を参考にして、興味のある f について調べた。

関数の名前を先の表の表現における abcdefgh を2進数として読んだ数で表わすことにする。 open terminal には "0" を入れる。

1) f_{85} =  は shift register を形成するから、すべての i について、M^i は definite (order i) である。

2) f_{86} : M^1 は definite, M^i ($i \geq 2$) は indefinite.

[証明] 初期様相 $000\cdots0 \equiv 0^i$ に入力 $000\cdots$ を入れると常に 0^i に留まっているが、$0^{i-2}11$ に $00\cdots$ を入れると $0^{i-2}11$ に留まる。

3) f_{101} : M^1, M^3, M^7 は definite (order 1, 3, 7)

M^2, M^4, M^5, M^6 は indefinite

これは計算機を使って求めた結果である。*)

[予想] f_{101} について M^i ($i = 2^k - 1$) は open terminal が 0 のとき、order i の definite である。

4) f_{105} : M^2 = definite $M^i \mid i = 1, 3, 4, 5, 6, 7$ = indefinite *)

5) f_{106} : M^i ($1 \leq i \leq 7$) indefinite *)

---

*) FACOM U200 で小さな i については M^i の状態遷移表を求め手で definiteness を求めた。$i \geq 5$ では全部計算機にやらせたが、東京電機大学の古東馨氏が東大の山田尚勇氏と共同開発された HLISP

以上はすべて強連結性の標数が∞の関数である。従って、大きなlについてM'がdefiniteになる可能性をもっているが、indefinitenessのつがより続いた後、definiteになるとは予想しにくい。計算結果からつぎの予想が立つ。

〔予想〕2状態、2入力cellの一次元arrayにおいては、M'がdefiniteの場合、そのorderはlである。(lはcell数)

〔問題〕netの型を変えてorderが素子数より大きいdefinite netが存在するか？

§4 まとめ

多オートマトン系の理論の一つの方向を、生物学からの動機によって定式化し、最も単純な場合を解いた。実際の神経系の発生、生長のモデルを直接目標とするには、発生の機構を積極的に取入れ、cellとして、ニューロンやニューロン群を用いねばならない。また性質として、より生物的意味のあるものを考える必要がある。

〔文献〕小渕・西尾(1970)：通信学会研究会資料 A69-62(1970)
西尾・小渕(1969)：連合大会予稿 3369-3370(1969)
Kobuchi(1973)：京大・工・学位論文

---

*をベースにしたオートマトン処理プログラム集STOPをFACOM 230-48にかけて結果を出していただいた。§3の命題の予想はこのような計算結果を利用して立てたものである。